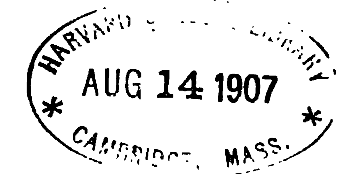


Digitized by Google



VE
RI
TAS



ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND **C. RUNGE** IN GÖTTINGEN.

---

54. BAND.

MIT FÜNF TAFELN UND 117 FIGUREN IM TEXT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

Inhalt.

Bücherschau.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896) UND M. CANTOR (1859—1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

54. BAND. 1. HEFT.

MIT 2 TAFELN UND 21 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 18. Dezember 1906



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1906.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

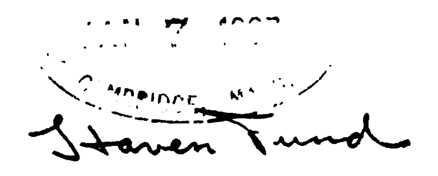
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

P. Bohl, B. Cohn, P. Debye, K. Doehlemann, K. Fuchs, A. Grünwald, W. Láska, R. Mehmke, G. Mie, M. Milankovitch, R. Müller, F. Nußbaum, J. V. Pexider, L. Prandtl, C. Runge, Fr. Schilling, Fr. Schur, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, Fr. Ulkowski, Ph. Weinmeister, P. Werkmeister, K. Wieghardt, C. W. Wirtz, E. Wölffing.



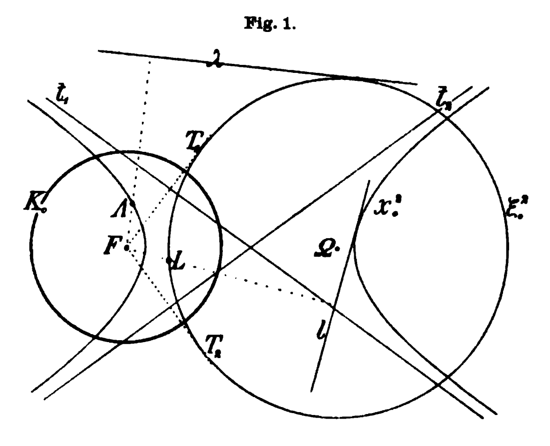
Polarograph und Konikograph.[1])

Von A. WLASSOFF in Moskau.

Es handelt sich in diesem Aufsatz um einige Anwendungen eines bekannten schönen Satzes von Poncelet über die Transformation von Kegelschnitten in Kreise. Erstens kann man mit Hilfe dieses Satzes eine Reihe von Aufgaben über Kegelschnitte in elementare Aufgaben verwandeln. Andererseits konstruiere ich einen Mechanismus, den ich Polarograph nenne und der auf Grund jenes Satzes zum Zeichnen von Kegelschnitten aller Art dienen kann. In diesem Mechanismus sind zwar nicht nur Gelenke, sondern auch gleitende Schlitten benützt, dagegen hat er eine sehr einfache Gestalt und kann daher, wie ich glaube, einiges Interesse darbieten.

Am Schlusse dieses Aufsatzes sind einige echte Gelenkmechanismen beschrieben, die eigentlich zum Zeichnen von Rollkurven bestimmt sind, jedoch zu den Konikographen einige Beziehung haben.

Fig. 1.



1. *Satz von Poncelet.* Sei K_0 (Fig. 1) ein Kreis, $\varLambda$ ein Punkt und λ seine Polare in bezug auf den Kreis K_0. Wenn die Gerade λ in ihrer Bewegung einen anderen Kreis $\mathfrak{k}_0^2$ umhüllt, dann beschreibt der Punkt $\varLambda$ einen Kegelschnitt x^2, der — und das ist nämlich der Satz von Poncelet — einen Brennpunkt im Mittelpunkte F des Kreises K_0 hat. Umgekehrt, wenn eine Gerade l einen Kegelschnitt x^2 mit einem Brennpunkte F im Mittelpunkte des Kreises K_0 umhüllt, so

1) In der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen den 14. Juni 1904 vorgetragen.

beschreibt der Pol L in bezug auf den Kreis K_0 einen Kreis ξ_0^2. Mit anderen Worten:

Die reziproke Polare eines Kreises in bezug auf einen anderen Kreis ist ein Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt im Mittelpunkte des transformierenden Kreises liegt.[1])

Es ist leicht, die Lage und Form der Kegelschnitte x^2 zu bestimmen. Seien T_1, T_2 die Berührungspunkte der Tangenten aus dem Punkte F an den Kreis ξ_0^2; t_1, t_2 ihre Polaren in bezug auf den Kreis K_0. Dann ist leicht zu sehen, daß t_1, t_2 Asymptoten des Kegelschnittes x^2 sind. Seine Exzentrizität e und sein Parameter p, d. h. die Ordinate aus dem Brennpunkte, werden durch die Formeln

$$e = \frac{\Omega F}{\varrho}, \quad p = \frac{R^2}{\varrho}$$

geliefert, wo ϱ, R die Radien der Kreise ξ_0^2, K_0 und Ω der Mittelpunkt von ξ_0^2 sind.

2. *Aufgaben über Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkte.* Poncelet, später Bobillier und Chasles, benützten diesen Satz hauptsächlich zur Übertragung der metrischen und besonders der Winkeleigenschaften des Kreises auf alle Kegelschnitte. Auf solche Weise konnten sie tatsächlich viele bekannte und neue Eigenschaften der Kegelschnitte beweisen.[2]) Aber mit Hilfe desselben Satzes kann man auch eine Reihe von Aufgaben über Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkte in elegantester Weise in elementare Kreisaufgaben verwandeln. Zum Beispiel wird die berühmte Aufgabe, einen Kegelschnitt aus drei Punkten und dem einen Brennpunkte zu konstruieren, in die elementare Aufgabe verwandelt, einen Kreis in ein gegebenes Dreieck einzubeschreiben. Sehr elegant kann auch die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu konstruieren, wenn ein Brennpunkt, ein Punkt des Kegelschnittes und der Krümmungskreis in diesem Punkte gegeben sind, gelöst werden. Ich fasse die Lösung in folgendes Schema: (ξ_0^2, a); (x^2, A); η_0^2; y^2, wo ξ_0^2 der gegebene Krümmungskreis, a seine Tangente im gegebenen Punkte, x^2 und A ihre reziproken Polaren; η_0^2 der Krümmungskreis im Punkte A des Kegelschnittes x^2 und y^2 die reziproken Polaren von η_0^2 sind. Die Kurve y^2 ist der gesuchte Kegelschnitt, weil die Berührung der Kegelschnitte ξ_0^2, y^2 von derselben Ordnung wie die der Kegelschnitte x^2, η_0^2 ist. Alle diese Gebilde können sehr leicht nacheinander konstruiert werden.

1) Dieser Satz war schon l'Hospital (1707) bekannt, aber in anderer Form. Vgl. E. Kötter, Die Entwicklung der synthetischen Geometrie, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 5. Bd., 1901, S. 171.

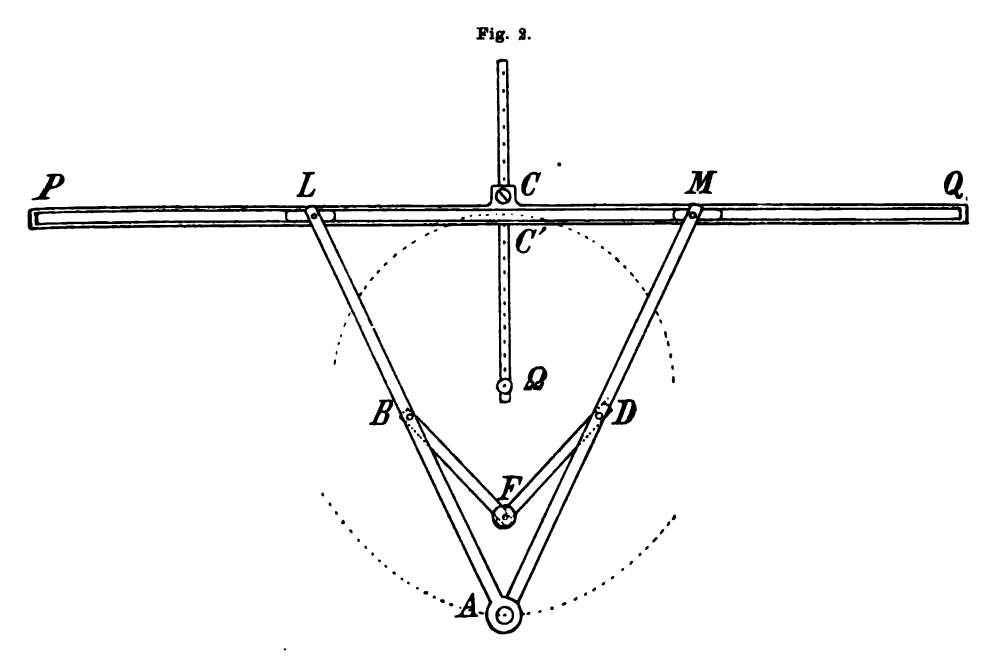
2) Annales des Math. pures et appliquées (Gergonne), T. 18 (1827—1828).

Diese Verwandlung der Aufgaben über Kegelschnitte mit einem gemeinsamen Brennpunkte in elementare Kreisaufgaben kann nicht nur zu ihrer Lösung, sondern auch zu ihrer Analyse dienen. Ich betone diese Bedeutung des Satzes von Poncelet, weil Poncelet selbst wie auch seine Nachfolger sie fast gar nicht erwähnen.

3. *Polarograph.* Nach dem Satze von Poncelet wird ein Kegelschnitt x^2 in einen Kreis ξ_0^2 transformiert. Einen Kreis kann man sehr leicht mechanisch verwirklichen. Jetzt stelle ich mir die Frage, ob es möglich ist, diese beiden Tatsachen zu benützen, um einen Apparat zu konstruieren, der Kegelschnitte von beliebigen Exzentrizitäten zeichnet. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn es gelänge einen Mechanismus zu konstruieren, von welchem ein Punkt und eine Gerade sich wie Pol und Polare in bezug auf einen Kreis bewegten. Einen solchen Mechanismus nenne ich Polarograph.

Seiner geometrischen Gestalt nach ist dieser Apparat sehr einfach. Er stellt ein gleichschenkliges Dreieck mit verlängerten Seiten ($\overline{AB} = \overline{BL}$: $\overline{AD} = \overline{DM}$) dar, dessen Grundlinie in ihrem Mittelpunkte gebrochen ist,

Fig. 2.



Wenn die Knoten A, B, F, D, L, M (Fig. 2) mit Scharnieren, und L, M außerdem mit Schlitten, die der Geraden $\overline{PQ}$ entlang sich bewegen können, versehen sind und der Punkt F in der Ebene befestigt ist, dann werden der Punkt A und die Gerade $\overline{PQ}$ bei den verschiedenen Form-

änderungen des Mechanismus Pol und Polare in bezug auf einen Kreis sein. Um das zu beweisen, betrachten wir das Parallelogramm $ABCD$, wo C der Mittelpunkt der Grundlinie $\overline{LM}$ ist. Das Viereck $ABCD$ ist bei jeder Gestalt des Mechanismus ein Parallelogramm. Wir könnten dieses Parallelogramm mit Gelenken in B, C und D für sich verwirklichen In diesem Falle hätten wir einen Inversor von Lipkin-Peaucellier.[1]) Die Punkte A und C liegen bei festem Punkte B immer auf einem Kreise, dessen Sehne $\overline{AC}$ immer durch den Punkt F geht, und der Punkt F liegt in konstanter Entfernung BF vom Mittelpunkte B. Da FA und FC entgegengesetzte Richtungen haben, können wir schreiben:

$$\overline{FA} \cdot \overline{FC} = n^2 - m^2,$$

wo $m = \overline{AB}$ und $n = \overline{BF}$ ist. Außerdem stehen PQ und AC senkrecht aufeinander. Daraus folgt, daß A und PQ Pol und Polare in bezug auf den Kreis vom Radius $R = i\sqrt{m^2 - n^2}\,(i = \sqrt{-1})$ sind.

Meine erste Aufgabe, einen Polarograph zu konstruieren, ist also gelöst.[2]) Zu demselben Zwecke kann man jeden anderen Inversor benützen, aber der Inversor, den ich gebrauche, gibt dem Apparate mehr Beweglichkeit, als die anderen.

4. *Konikograph oder Kegelschnittzeichner.* Der Polarograph kann leicht in einen Konikograph oder Kegelschnittzeichner verwandelt werden.[3]) Wir können nämlich die Gerade $\overline{PQ}$ zwingen einen Kreis ξ_0^2 zu umhüllen. Zu diesem Zwecke befestigt man an der Geraden $\overline{PQ}$ einen auf derselben senkrecht stehenden Stab $C'\Omega$. Es sei bemerkt, daß der Abstand der Punkte C und C' veränderlich ist. Bei festen Punkten F und Ω beschreibt der Punkt C' den Kreis ξ_0^2 und der Punkt A des Mechanismus nach dem Satze von Poncelet einen Kegelschnitt mit dem Brennpunkte F, der Exzentrizität $e = \frac{\Omega F}{C'\Omega}$ und dem Parameter $p = \frac{R}{C'\Omega}$.

---

1) Peaucellier, Note sur une question de géométrie de compas. Nouv. Ann. de Math. 2ème série, 1873. — L. Lipkin, Über eine genaue Gelenk-Geradführung. Bull. de l'Acad. des Sciences S.-Pétersbourg, T. 16, 1871.

2) Prof. F. Schilling hat unabhängig von mir auch die Idee gehabt, aus dem Inversor von Peaucellier einen Polarograph zu konstruieren; vgl. seine Arbeit: Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Leipzig und Berlin 1904, S. 37.

3) Das Modell des Konikographen wurde von mir konstruiert und den 14. Juni 1904 in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen erklärt.



5. *Das Gebiet der Beweglichkeit des Apparates.* Der Punkt A kann sich in der Ringfläche zwischen zwei Kreisen von den Halbmessern $m+n$ und $m-n$ bewegen. Wenn wir nur Kreise, die in dieser Ringfläche liegen und keinen Grenzkreis schneiden, in Kegelschnitte transformieren wollen, so werden die Exzentrizitäten der Ellipsen zwischen 0 und $\frac{n}{m}$, die der Hyperbeln zwischen $\frac{m}{n}$ und ∞ liegen. In der Tat, es sei ϱ der Radius des Kreises ξ_0^2 und $\delta = F\Omega$ der Abstand seines Mittelpunktes vom Punkte F. Im Falle der Ellipse werden wir haben

$$\varrho + \delta \leqq m + n,$$

$$\varrho - \delta \geqq m - n.$$

Daraus folgt

$$\delta \leqq n, \quad \delta = \theta n, \quad (0 \leqq \theta \leqq 1)$$

und

$$\varrho \geqq m - (1-\theta) n,$$

$$\varrho \leqq m + (1-\theta) n$$

oder

$$\varrho = m + \theta'(1-\theta) n, \quad (-1 \leqq \theta' \leqq 1).$$

Also

$$e = \frac{\delta}{\varrho} = \frac{\theta n}{m + \theta'(1-\theta) n},$$

d. h. e liegt zwischen 0 und $\frac{n}{m}$. Ebenso kann man die Grenzwerte der Exzentrizitäten der Hyperbeln bestimmen.

Ellipsen dieser Exzentrizitäten können vollständig oder richtiger fast vollständig gezeichnet werden. Hyperbeln dieser Exzentrizitäten $\left(\frac{m}{n} \cdots \infty\right)$ durchschneiden mit beiden Zweigen die Ringfläche der Beweglichkeit. Diese beiden Zweige können beschrieben werden, natürlich nicht auf einmal.

Der Mechanismus kann in seiner Bewegung folgende Hindernisse treffen: entweder trifft der Stab $C\Omega$ den Punkt F (der Fall der Ellipse), oder berührt die Gerade PQ einen von den Grenzkreisen des Gebietes, oder endlich kann der Punkt L oder M bis zum Ende P resp. Q des Lineals PQ gelangen. Das letztere Hindernis können wir beseitigen, indem wir das Lineal PQ lang genug machen. Für die Kreise ξ_0^2, die in der Ringfläche der Beweglichkeit liegen, ist die ausreichende Länge $PQ = 4n + 2(m+n) = 6n + 2m$, da LM höchstens gleich $4n$

ist und die Mitte C' von PQ von der Mitte LM sich nicht weiter als um $(m + n)$ nach rechts oder links entfernen kann:

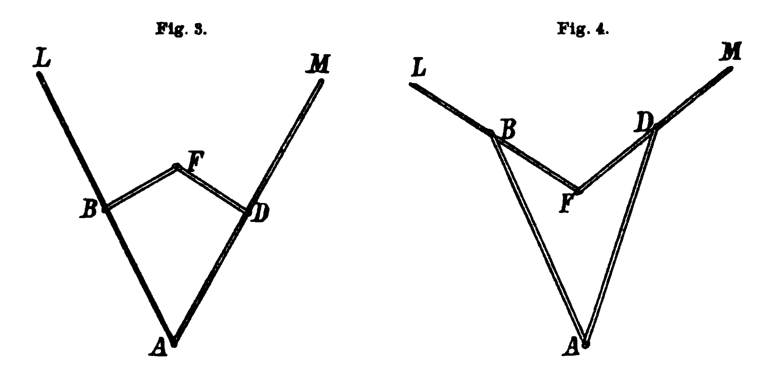
$$CC' \leq F\Omega \leq m + n.$$

Die notwendige Länge wird sogar kleiner als $6n + 2m$ sein.

Wenn ein Kreis ξ_0^2 nicht ganz in der Ringfläche der Beweglichkeit liegt, sondern einen von den Grenzkreisen trifft, dann erhalten wir einen Bogen des Kegelschnitts x^2, aber — was zu bemerken ist — mit einem Scheitelpunkte. Zu solchen Kegelschnitten gehören Parabeln, deren Parameter leicht zu bestimmen ist, nämlich nach der Formel: $p = \frac{R^2}{\varrho}$.

6. *Praktische Verwendungen des Polarographen.* Der Polarograph kann nicht nur zum Zeichnen von Kegelschnitten, sondern auch zum Erläutern der Polartransformation verwendet werden; es kann an demselben z. B. gezeigt werden, in welcher Weise ein Wendepunkt in einen Rückkehrpunkt und umgekehrt und Rückkehrpunkte zweiter Art ineinander transformiert werden.

Bei unstetiger Verwendung der Polartransformation, d. h. für diskrete Punkte oder Geraden, können wir den Mechanismus bedeutend



vereinfachen, indem wir das Lineal PQ entfernen. Dann kann der Apparat (Fig. 3) mit einem einfachen Lineal zur Lösung verschiedener Aufgaben der Polarentheorie dienen. Einen ähnlichen Apparat kann man auch für Polartransformation in bezug auf einen reellen Kreis konstruieren (Fig. 4).

Wenn der Punkt A des Apparates verschiedene Lagen auf einer Geraden annimmt, dann dreht sich die Polare PQ um den Pol dieser Geraden. Der Apparat in vereinfachter Form kann also ebenso bequem zur Fluchtpunktkonstruktion dienen, wie andere dazu bestimmte Instrumente.

7. *Konikograph von Peaucellier.* Peaucellier hat 1873[1]) einen Gelenkmechanismus als Konikograph in Vorschlag gebracht. Der Konikograph von Peaucellier ist aus zwei Inversoren zusammengesetzt und auf der Tatsache begründet, daß die inverse Kurve des Kegelschnitts

$$\varrho = \frac{p}{1 + e \cos \omega}$$

in bezug auf den Brennpunkt als Inversionsmittelpunkt eine Pascalsche Schnecke

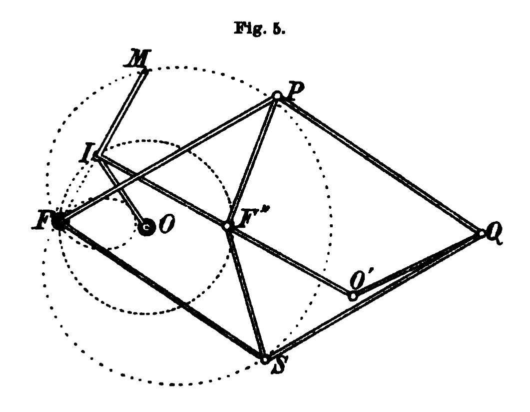
$$\varrho' = \frac{k^2(1 + e \cos \omega)}{p}$$

ist.

Das folgt auch aus dem Satze von Poncelet. Der Punkt C, der in meinem Konikograph nicht verwirklicht ist und auf der Geraden PQ liegt, ist Fußpunkt der Senkrechten, die aus dem Brennpunkte F auf die Tangente des Kreises ξ_0^2 gefällt werden kann. Der geometrische Ort dieser Punkte C ist folglich eine Pascalsche Schnecke.

Der Mechanismus, den Peaucellier zum Zeichnen der Pascalschen Schnecke konstruiert, ist ein veränderter Inversor, der zur Geradführung bestimmt ist. Es sei $F''O' = O'Q$ (Fig. 5). Dann beschreibt der Punkt F' bei festen Punkten F'' und O' eine gerade Linie $F'M$, die auf $\overline{OF''J}$ senkrecht steht. Wenn die Glieder $\overline{MJO'}$ und JO hinzugefügt werden, wobei MJO' ein fester rechter Winkel ist und in den Punkten J, F'', O' Gelenke angebracht sind, so wird der Punkt J bei festen Punkten O und F' einen Kreis beschreiben und die Strecke MJ immer nach dem Punkte F' zielen. Der Punkt M beschreibt also eine Pascalsche Schnecke oder richtiger einen Teil dieser Kurve. Wenn die Strecke MJ nach der anderen Seite des geraden Stabes JO' um die Strecke $M'J = MJ$ verlängert wird, so wird der Punkt M' den anderen Teil der Pascalschen Kurve beschreiben.

Fig. 5.



Der andere Inversor $ABCDF$, dessen Punkt F mit dem Punkte F' des ersten zusammenfällt und dessen Punkt C mit dem Punkte M

1) M. Peaucellier, Note sur une question de géométrie de compas. Nouvelles Annales de Mathematiques, 2ème série, 1873.

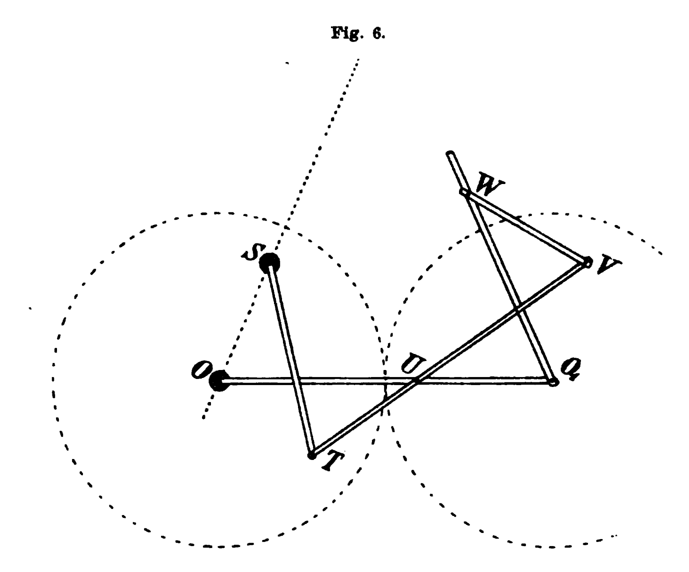
durch ein Gelenk verbunden ist, bildet einen Konikograph: der Punkt A beschreibt einen Bogen eines Kegelschnitts.

Der Mechanismus von Peaucellier ist jedoch, wie man sieht, ziemlich verwickelt. Anstatt des ersten Inversors können wir einen Apparat nehmen, der die Pascalsche Schnecke durch Rollen eines Kreises auf einem anderen gleichen Kreise erzeugt. Ferner beschreibe ich einen neuen Gelenkmechanismus, der auch auf rollenden Kreisen beruht und der nicht nur zum Zeichnen von Pascalschen Schnecken, sondern bei einiger Änderung auch zu demjenigen von verschiedenen Epi- und Hypozykloiden dienen kann.

8. *Der Gelenkmechanismus zum Zeichnen der Pascalschen Schnecken.* Wenn ein Kreis auf einem gleichgroßen Kreise rollt, so bleibt die bewegliche Mittelpunktslinie zu zwei bestimmten Radien des festen oder des rollenden Kreises immer gleich geneigt. Die Radien der Kreise sind in dieser Weise paarweise verbunden.

Diese Tatsache kann ohne Kreise durch einen Gelenkmechanismus, wie in Fig. 6 gezeigt ist, verwirklicht werden. Die Vierecke $SOTU$

Fig. 6.



und $UVWO_1$ sind zwei ähnliche Antiparallelogramme. Bei Bewegung des Mechanismus bleiben diese Vierecke immer ähnlich, da sie immer Antiparallelogramme mit proportionalen Seiten und gleichen Winkeln $\overline{OUT} = \overline{VUO_1}$ bleiben. Folglich bleiben die Winkel $\overline{SOO_1}$ und $\overline{OO_1W}$ einander gleich. Jeder Punkt des Stabes O_1W, oder ein mit ihm fest verbundener, wird eine Pascalsche Schnecke beschreiben, wie ein Punkt des rollenden Kreises.

Wenn der Winkel $\overline{SOT}$ zwei Rechten gleich wird, so fallen alle Stäbe ST, TV usw. auf der Geraden SO zusammen, aber sie können, wenn die Stäbe $STVW$ auf den Stäben OO_1W liegen, einander durchdringen und auf der anderen Seite der Geraden SO eine zur ersten symmetrische Figur bilden. Es entspricht Bekanntem, daß die Lage auf der Geraden SO nicht stabil ist und bei ungeschickter Führung die Antiparallelogramme sich sehr leicht in Parallelogramme verwandeln können.

Bei $\sphericalangle\, \overline{SOO_1} = 0$ können die Stäbe nicht aneinander vorbeikommen. Die Pascalsche Schnecke kann also mit diesem Gelenkmechanismus nicht vollständig beschrieben werden.

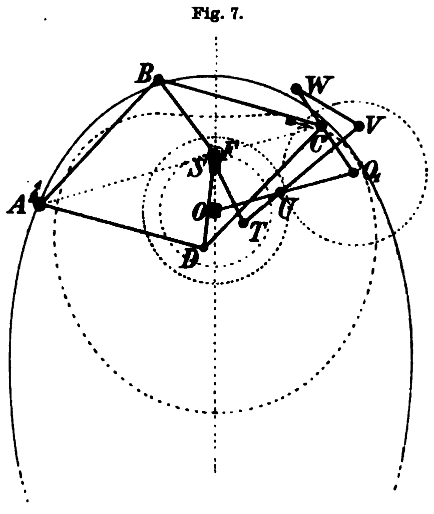


Fig. 7.

Es ist leicht, die Lage des Doppelpunktes, der entweder ein Knotenpunkt oder ein isolierter Punkt sein kann, zu bestimmen. Wenn der Punkt F des Inversors von Lipkin-Peaucellier (Fig. 7) im Doppelpunkte befestigt und ein Punkt, z. B. C', mit einem Punkte des Stabes O_1W gelenkig verbunden wird, so beschreibt der Punkt A des Inversors, während der Punkt C' eine Pascalsche Schnecke beschreibt, einen Kegelschnitt, dessen Exzentrizität wie früher sehr leicht zu bestimmen ist.

9. *Gelenkmechanismen zum Zeichnen der Epi- und Hypozykloiden.* Nehmen wir jetzt einen Isoklinostat, d. h. einen Apparat, der einen Winkel verdoppelt, verdreifacht usw.

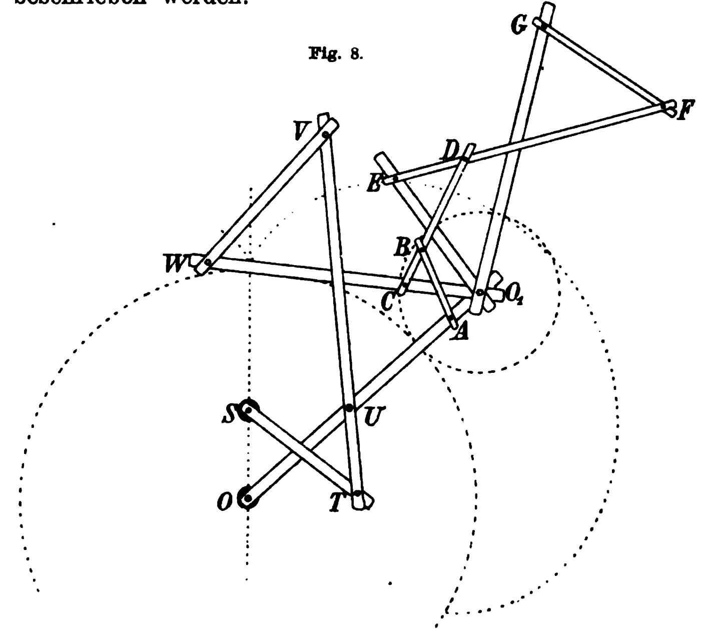
Sind die Vierecke AO_1BC, O_1CDE, O_1EFG (Fig. 8) ähnliche Antiparallelogramme, so bekommen wir einen solchen Isoklinostat: die Winkel $\overline{AO_1C}$, $\overline{CO_1E}$, $\overline{EO_1G}$ bleiben immer unter sich gleich.[1])

Fügen wir einen solchen Isoklinostat dem Mechanismus des § 8 hinzu, der den Winkel $\overline{OO_1W}$ in der Richtung von OO_1 zu O_1W vervielfachen soll. Dann bekommen wir einen Gelenkmechanismus zum Zeichnen der Epizykloiden, die durch die Punkte des Stabes O_1G oder durch die mit ihm fest verbundenen beschrieben werden. Die Punkte der Stäbe O_1E, O_1C usw. beschreiben auch Epizykloiden, aber mit

1) Kempe, How to draw a straight line. London 1877, S. 42—44.

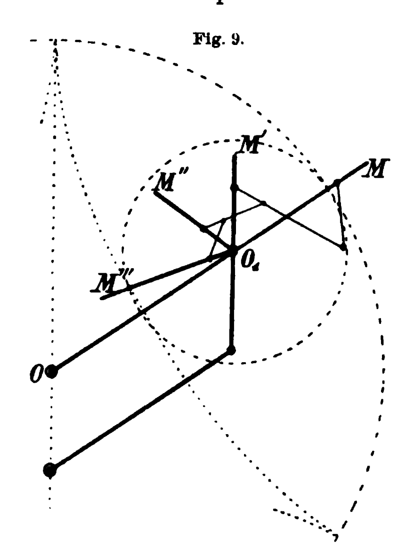
einer anderen Anzahl Zweige. Ganz frei kann nur ein Zweig der Kurve beschrieben werden.

Fig. 8.



Wenn wir einen Isoklinostat einem Parallelogramm (Fig. 9) hinzufügen, um einen Außenwinkel $M O_1 M'$ in der Richtung von $O_1 M$ zu

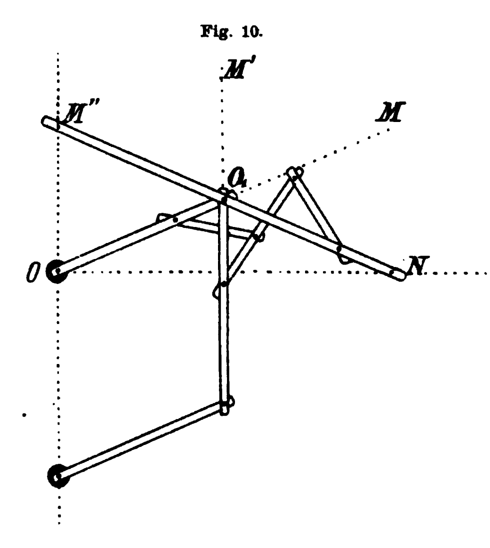
Fig. 9.



$O_1 M'$ zu verdoppeln, so bekommen wir einen Gelenkmechanismus zum Zeichnen der Hypozykloiden.

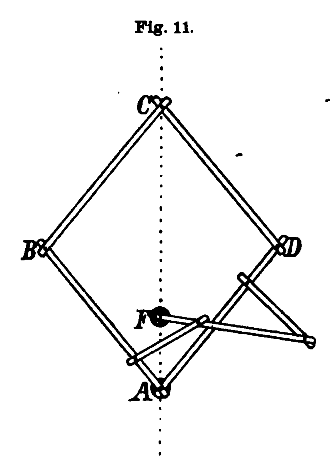
Beim Rollen eines Kreises auf einem anderen von außen oder von innen sind ihre entsprechenden Bogen gleich und also bleiben die entsprechenden Zentriwinkel in konstantem Verhältnis. Der Abstand der Mittelpunkte der

Fig. 10.



Kreise bleibt auch konstant. Die oben genannten Mechanismen verwirklichen diesen Gedanken. Die Winkel $\overline{A O O_1}$ und $\overline{O O_1 G}$ (Fig. 8) einerseits und $\overline{A O O_1}$, $O O_1 M'''$ (Fig. 9) anderseits bewahren konstantes Verhältnis. Die Punkte der Seiten $O_1 G$ und $O_1 M'''$ beschreiben also Epi- resp. Hypozykloiden.

Fig. 11.



Speziell bei Verdoppelung des Winkels $M O_1 M'$ (Fig. 10) kann der Mechanismus zur Geradführung oder zum Ellipsenzeichnen verwendet werden. Hier (Fig. 10) ist also eine Bewegung der festen Strecke, deren zwei Enden zwei rechtwinkligen Geraden entlang gleiten, durch den Gelenkmechanismus verwirklicht. Die letzte Seite $O_1 M''$ eines Isoklinostat kann in bezug auf die Strecke $O_1 M$ einen Winkel von nicht mehr als 360° beschreiben und das beschränkt bedeutend die Beweglichkeit der Mechanismen dieser Art.

Dem letzteren Mechanismus (Fig. 10) kann man eine andere Gestalt (Fig. 11) geben. Bei festen Punkten A und F (Fig. 11) bewegt sich der Punkt C auf der Geraden AC, weil die Winkel $\overline{BAF}$ und $\overline{FAD}$ immer untereinander gleich bleiben. Der Stab CD bewegt sich ebenso wie der Stab $M'' O_1$ des ersteren Mechanismus (Fig. 10).

Bemerkungen zu dem vorstehenden Aufsatz.

Von R. Mehmke in Stuttgart.

Es ist meine Pflicht, darauf hinzuweisen, daß lange vor den Herren Wlassoff und Schilling, nämlich im Jahre 1891, Prof. H. Ruoss den Gedanken angegeben hat, aus dem Peaucellierschen Inversor einen Mechanismus abzuleiten, der zu jedem Punkt die Polare in bezug auf einen festen Kreis liefert. Unter dem Namen „Reziprokalführung" hat Herr Ruoss diesen Mechanismus, der auch ausgeführt und wirklich zum Zeichnen reziproker Kurven ausgiebig benützt worden ist, in Böklens mathem.-naturw. Mitteilungen Bd. 4 (1891), S. 88 kurz beschrieben. Allerdings ist der Mechanismus des Herrn Wlassoff etwas einfacher, da bei ihm (s. S. 3 Fig. 2 der vorhergehenden Abhandlung) die Strecken BC und CD und die Gerade AC nicht verkörpert worden sind, weil es wegen der Verlängerung der Stangen AB und AD bis zu den Punkten L und M nicht nötig war. Eines aber leisten die Mechanismen von Ruoss und Wlassoff nicht: Wenn man den Punkt A einer gegebenen stetigen Kurve entlang führt, so gibt zwar das Lineal PQ in jeder Lage eine Tangente der neuen Kurve an, die zur gegebenen Kurve reziprok ist, aber die neue Kurve entsteht keineswegs von selbst auf dem Papier, sondern es ist notwendig, nachdem eine Reihe der von dem Mechanismus gelieferten Tangenten mit Bleistift gezogen worden sind, die Hüllkurve dieser Geradenschar mit freier Hand zu zeichnen (außer die konstruierten Tangenten folgten so dicht aufeinander, daß die Gestalt der Hüllkurve genügend hervorträte), und es ist nicht möglich, den Berührungspunkt irgend einer dieser Tangenten anders denn schätzungsweise anzugeben. Es scheint noch niemand versucht zu haben, den Mechanismus in der Weise zu vervollständigen, daß er die fragliche Kurve selbst auf das Papier zeichnet. Meiner Erinnerung nach stellte Herr Felix Klein diese Aufgabe gelegentlich der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (bezw. der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte) in Frankfurt a. M. im Jahre 1896. Durch Anbringen einer Rolle mit scharfem Rande, deren auf der Zeichenebene senkrechte Mittelebene durch die Mittellinie des Lineals PQ geht und die sich in der Richtung dieses Lineals unter ihm nach beiden Seiten frei bewegen kann, ist jedoch der Zweck leicht zu erreichen. Man hat nur dafür zu sorgen, daß bei der Anfangsstellung des Mechanismus der Berührungspunkt der Rolle mit dem Papier sich in der richtigen Lage auf der Geraden PQ befindet, was nicht schwer ist, dann wird bei stetigem Weiterführen des Punktes A auf der gegebenen Kurve die Rolle, wenn ihr Rand mit

Farbe versehen ist, die gesuchte Kurve auf das Papier zeichnen. Derselbe Gedanke läßt zahlreiche andere Anwendungen zu, die in der mechanischen Ausführung beliebiger Berührungstransformationen gipfeln. Ich hoffe, bald Genaueres hierüber mitteilen zu können.

Geschichtlich sei noch angemerkt, daß die erste Mitteilung von Peaucellier über seinen Inversor aus dem Jahre 1864 stammt und daher Peaucellier der Vorrang vor Lipkin gebührt.

Das Grundproblem der Photogrammetrie, seine rechnerische und graphische Lösung nebst Fehleruntersuchungen.

Von Eduard Doležal, Wien.

(Mit 2 Tafeln.)

Die geometrische Lösung des Grundproblems der Photogrammetrie als Umkehrungsaufgabe der Perspektive hat J. H. Lambert in seinem Lehrbuche „Freie Perspektive“, Zürich 1759, gegeben G. Hauck zeigte in mehreren Arbeiten in Crelles Journal, Band 95 und 97 (1883 und 1884), wie die projektive Geometrie Probleme der Photogrammetrie elegant zu lösen vermag. Prof. K. Heun befaßte sich in seinem Aufsatze: „Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie“ in der Zeitschrift für Mathematik und Physik im Jahre 1899 mit dem Grundprobleme der Photogrammetrie, und auch Prof. A. Sprung veröffentlichte in der Einleitung der offiziellen Publikation des meteorologischen Institutes zu Potsdam „Bearbeitung der Ergebnisse des Internationalen Wolkenjahres 1896/97“, Berlin 1903 eine Studie: „Über die allgemeinen Formeln der Photogrammetrie“, die einen wertvollen Beitrag zur Photogrammetrie liefert.

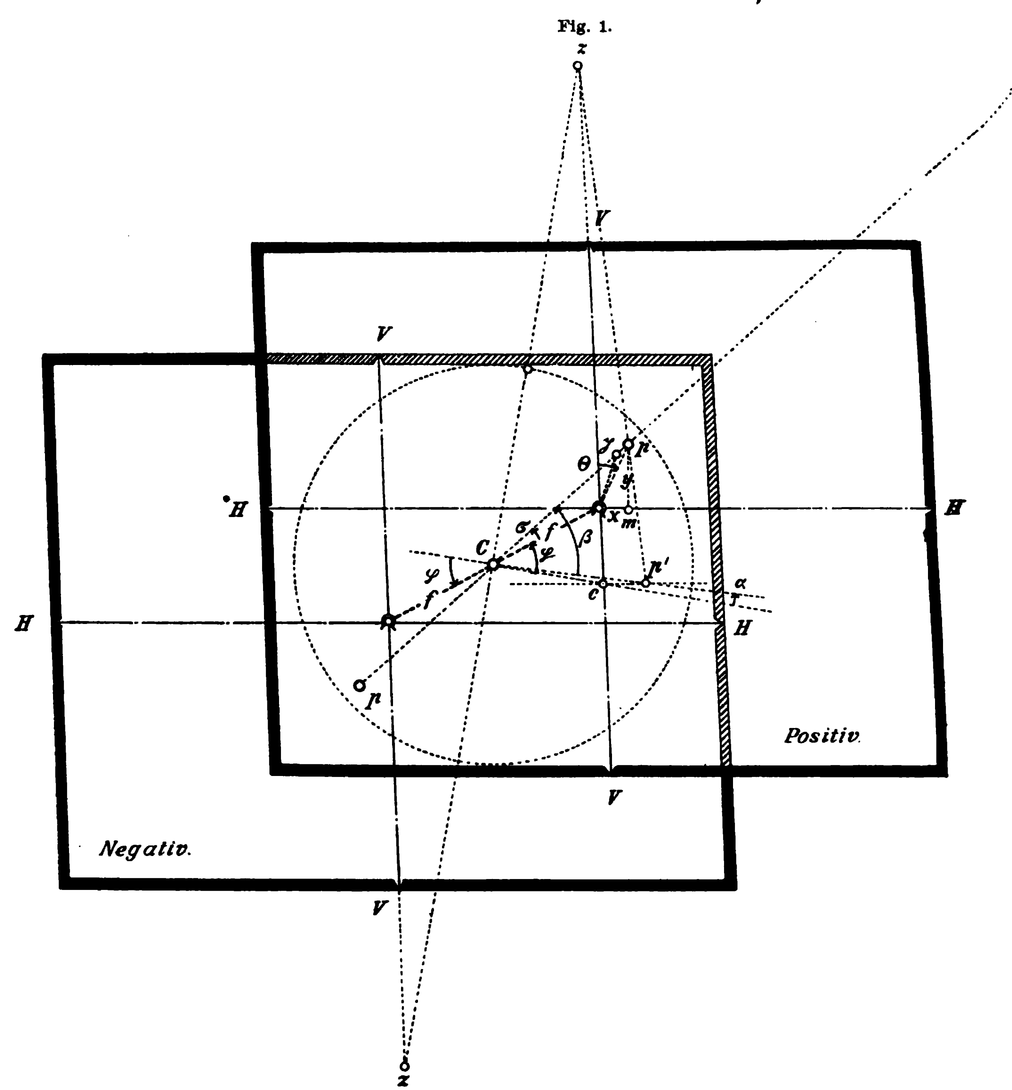
In der folgenden Abhandlung wird die Lösung des Grundproblems der Photogrammetrie in allgemeinster Form rechnerisch und graphisch behandelt; daran schließen sich eingehende Fehleruntersuchungen. Aus den gewonnenen Formeln können alle in der Praxis der Photogrammetrie benützten Ausdrücke nach Berücksichtigung der herrschenden Verhältnisse äußerst bequem und mühelos entwickeln werden.

I.

Denken wir uns im Punkte C (Fig. 1) den ersten und zweiten Hauptpunkt eines photographischen Objektives, welche Punkte im Allgemeinen bei diesem in sphärischer und chromatischer Beziehung möglichst korrigierten optischen Systeme einen mehr oder weniger großen Abstand haben, zusammenfallend und aus diesem Punkte eine

Kugel mit dem Radius f beschrieben, welche Größe der Bildweite in vielen Fällen der Praxis unmittelbar der Brennweite des Objektives und des photogrammetrischen Apparates entspricht; denken wir uns die Bilddistanz des Instrumentes unter dem Winkel φ zum Horizonte

Fig. 1.



geneigt, so tritt von den Originalpunkten der vor dem Objektiv befindlichen Gegenstände ein Strahlenbündel in das Objektiv ein.

Während in der Wirklichkeit jeder auf das Objektiv auffallende Lichtstrahl einen ziemlich komplizierten Weg durch das zentrierte optische System zurücklegt, den man nach den Sätzen der Dioptrik

rechnerisch und graphisch bestimmen kann, gestattet die bekannte Gaußsche Theorie der Hauptpunkte und Hauptebenen eine einfache konstruktive Ermittelung der erzeugten optischen Bilder. Man betrachtet hierbei nur die drei charakteristischen Strahlen: Haupt-, Parallel- und Fokalstrahl, welche in den ersten Hauptpunkt, bezw. der ersten Hauptebene eintretend, in dem Zwischenraum eine Transformation erfahren und aus dem zweiten Hauptpunkte, bezw. der zweiten Hauptebene austreten und in ihrem gemeinsamen Schnittpunkte das Bild des Originalpunktes bestimmen.

Die Bilder der Originalpunkte entstehen auf der lichtempfindlichen Platte, der Bildebene, welche das Negativ darstellt: dieses bildet im Schnittpunkt Ω der Bilddistanz mit der Kugel eine Tangentialebene an die letztere. Das Positiv muß gleichfalls als Tangentialebene an die Kugel aufgefaßt werden. Beide stellen mathematisch genaue Perspektiven dar, mit dem zweiten, bezw. ersten Hauptpunkte als Zentren; der zweite Hauptpunkt stellt das perspektivische Zentrum für das Negativ und der erste Hauptpunkt jenes für das Positiv vor.

In der Fig. 1 hat man sich beide Zentren mit C zusammenfallend zu denken.

Die Gerade VV bezeichnet den Schnitt der durch die Vertikallinie zz des Punktes C und die Bilddistanz f gelegten Vertikalebene mit dem Negative, bezw. dem Positive und stellt die *Vertikalebene der Perspektiven* vor; die Schnittlinie HH der durch die Bilddistanz unter dem Neigungswinkel φ derselben gelegten Ebene mit dem Negative und Positive bezeichnet man als die *Horizontallinie der Perspektiven*; ihre Schnittpunkte Ω gibt den *Hauptpunkt der Perspektiven.*

Nehmen wir die aufeinander senkrecht stehenden Horizontal- und Vertikallinien zu Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes, so wird ein jeder Bildpunkt p durch seine rechtwinkligen Koordinaten xy in der Ebene des Bildes bestimmt werden können; sie stellen die *Bild-* oder *Plattenkoordinaten* des Bildpunktes p vor.

Auch die Winkel: α das Azimut, β der Vertikalwinkel, sowie die Strecken $Cp = r$, Radiusvektor, können als Polarkoordinaten die Fixierung, des Bildpunktes p vermitteln.

Bezeichnen wir ferner die Winkel: $V\Omega p = \Theta$, $pC\Omega = \sigma$, endlich die Strecken $\overline{\Omega m} = x$; $\overline{pm} = y$ und $\overline{C\Omega} = f$, so können aus der Fig. 1 unmittelbar die folgenden Beziehungen abgeleitet werden.

Wir haben aus dem rechtwinkligen Dreiecke Ωpm:

$$(1) \qquad \begin{cases} x = s \sin \Theta \\ y = s \cos \Theta \\ s = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

und weiter mit Berücksichtigung von

$$s = f \operatorname{tg} \sigma$$

(2) auch
$$\begin{cases} x = f \operatorname{tg} \sigma \sin \Theta \\ y = f \operatorname{tg} \sigma \cos \Theta \end{cases}$$

Werden auf das sphärische Dreieck $Z\Omega p$ die Fundamentalgleichungen der sphärischen Trigonometrie angewendet, so folgt:

Sinussatz ... $\sin (90^0 - \beta) \sin \alpha = \sin \Theta \sin \sigma$

Sinus-Kosinussatz ... $\sin (90^0 - \beta) \cos \alpha = \cos \sigma \sin (90^0 - \varphi) - \sin \sigma \cos (90^0 - \varphi) \cos \Theta$

Kotangentensatz $\operatorname{ctg} (90^0 - \beta) \sin (90^0 - \varphi) = \cos (90^0 - \varphi) \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \Theta$

$\operatorname{cotg} \sigma \sin (90^0 - \varphi) = \cos (90^0 - \varphi) \cos \Theta + \sin \Theta \operatorname{cotg} \alpha$

oder

(3)
$$\begin{cases} \cos \beta \sin \alpha = \sin \Theta \sin \sigma \\ \cos \beta \cos \alpha = \cos \sigma \cos \varphi - \sin \sigma \sin \varphi \cos \Theta \\ \operatorname{tg} \beta \cos \varphi = \sin \varphi \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{cotg} \Theta \\ \operatorname{cotg} \sigma \cos \varphi = \sin \varphi \cos \Theta + \sin \Theta \operatorname{cotg} \alpha \end{cases}$$

Rechnet man aus der 1. und 2. der vorstehenden Gleichungen (3) $\operatorname{tg} \alpha$ und aus der dritten $\operatorname{tg} \beta$, so folgt:

(4)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\operatorname{tg} \sigma \sin \Theta}{\cos \varphi - \operatorname{tg} \sigma \sin \varphi \cos \Theta} \\ \operatorname{tg} \beta = (\sin \varphi + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cotg} \Theta) \dfrac{\cos \alpha}{\cos \varphi} \end{cases};$$

wird hierin aus Gleichung (2)

$$\operatorname{tg} \sigma \sin \Theta = \frac{x}{f}$$

$$\operatorname{tg} \sigma \cos \Theta = \frac{y}{f}$$

und in die zweite der Gleichungen (4) der Wert für $\operatorname{tg} \alpha$ eingesetzt, so kommen die folgenden zwei wichtigen Gleichungen:

(I)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{x}{f \cos \varphi - y \sin \varphi} \\ \operatorname{tg} \beta = \dfrac{f \sin \varphi + y \cos \varphi}{f \cos \varphi - y \sin \varphi} \cos \alpha, \end{cases}$$

auf Grund welcher das Azimut α und der Vertikalwinkel β als Funktionen der Größen f, φ und der Bildkoordinaten x und y auftreten.

Eine zweite Form für das Azimut α und den Vertikalwinkel β, wonach dieselben nur durch trigonometrische Funktionen zum Ausdrucke kommen, ist nach den Gleichungen (4):

(II)
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = \dfrac{\sin \Theta}{\cos \varphi \operatorname{cotg} \sigma - \sin \varphi \cos \Theta} \\ \operatorname{tg} \beta = \cos \alpha \operatorname{tg} \varphi + \dfrac{\sin \alpha \operatorname{cotg} \Theta}{\cos \varphi} \end{cases}$$

Interessante Relationen ergeben die Verhältnisse der Koordinaten zur Bildweite; aus Gleichung (2) hat man:

$$5)\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{f} = \operatorname{tg}\sigma \sin\Theta \\ \dfrac{y}{f} = \operatorname{tg}\sigma \cos\Theta, \end{cases}$$

welche nach Heranziehung der letzten Gleichung im Systeme (3) für $\operatorname{tg}\sigma$, nämlich

$$\operatorname{tg}\sigma = \frac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\alpha \sin\Theta + \sin\varphi\cos\Theta},$$

übergehen in:

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{f} = \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\alpha\sin\Theta + \sin\varphi\cos\Theta}\sin\Theta = \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\alpha + \sin\varphi\operatorname{cotg}\Theta} \\ \dfrac{y}{f} = \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\alpha\sin\Theta + \sin\varphi\cos\Theta}\cos\Theta = \dfrac{\cos\varphi}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{tg}\Theta + \sin\varphi}. \end{cases}$$

Die abgeleiteten Gleichungen gelten für den Fall, daß die Bilddistanz unter dem Winkel φ zum Horizonte geneigt ist; bei vertikaler Lage der Bildebene, wobei $\varphi = 0$ ist, gehen die abgeleiteten Formeln I, II und III über in:

$$\text{(IV)}\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{x}{f} \\ \operatorname{tg}\beta = \dfrac{y}{f}\cos\alpha. \end{cases}$$

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha = \sin\Theta\operatorname{tg}\sigma \\ \operatorname{tg}\beta = \sin\alpha\operatorname{cotg}\Theta \end{cases}$$

und

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases} \dfrac{x}{f} = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \\ \dfrac{y}{f} = \dfrac{1}{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{tg}\Theta} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\Theta}. \end{cases}$$

II.

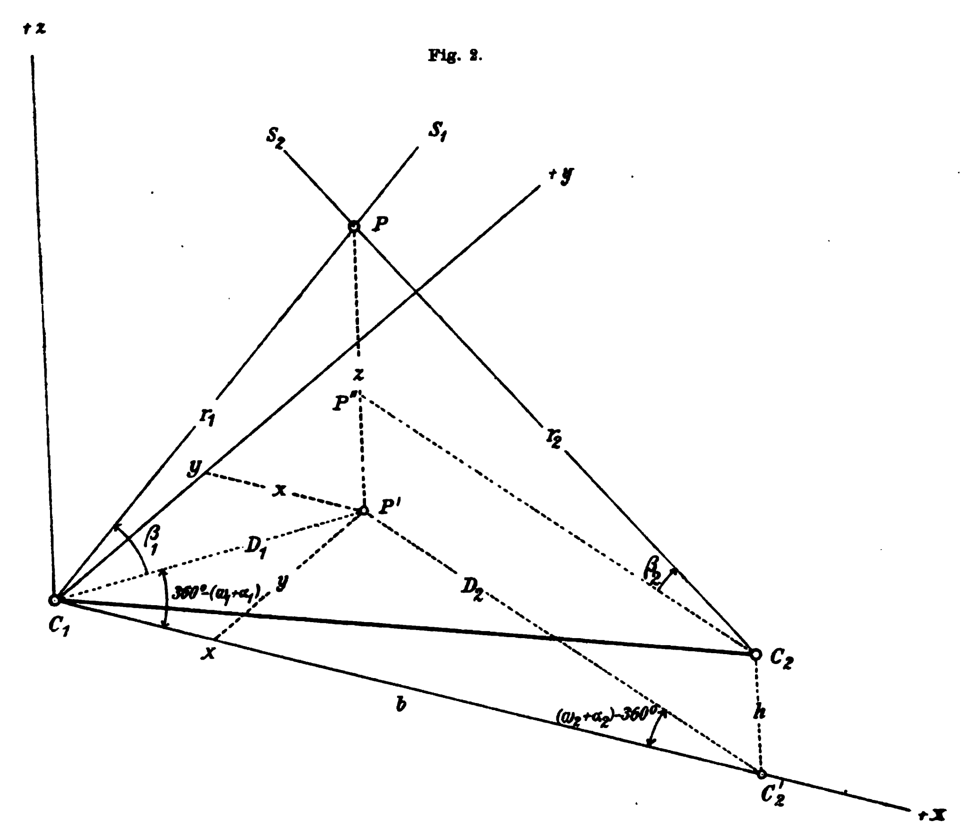
Die Grundaufgabe der Photogrammetrie:

Die Lage eines Raumpunktes aus zwei in bezug auf eine Basis orientierten Perspektiven festzulegen, läßt sich auf ein einfaches Problem der analytischen Geometrie des Raumes zurückführen, nämlich *auf die Bestimmung der Schnittpunktskoordinaten zweier bestimmter Raumgeraden.*

Von diesen Raumgeraden, Visierstrahlen, sind die Koordinaten zweier Punkte derselben, der Stationen, durch welche die Raumgeraden gehen, die Horizontalwinkel derselben in bezug auf eine bekannte Richtung und die Vertikalwinkel dieser Raumgeraden gegeben.

C_1 und C_2 in Fig. 2 stellen die Zentren zweier Perspektiven vor, die auf zwei beliebig geneigten Bildebenen sich befinden und gleichgültig auf welche Weise hergestellt wurden. Der Einfachheit halber beziehen wir die Raumpunkte auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt mit dem einen Zentrum, z. B. C_1 zusammenfällt, dessen xy-Ebene horizontal und dessen xz-Ebene vertikal ist, wobei die letztere durch das zweite Zentrum hindurchgeht und ferner die xz-Ebene auf den andern zwei genannten Projektionsebenen senkrecht steht.

Fig. 2.



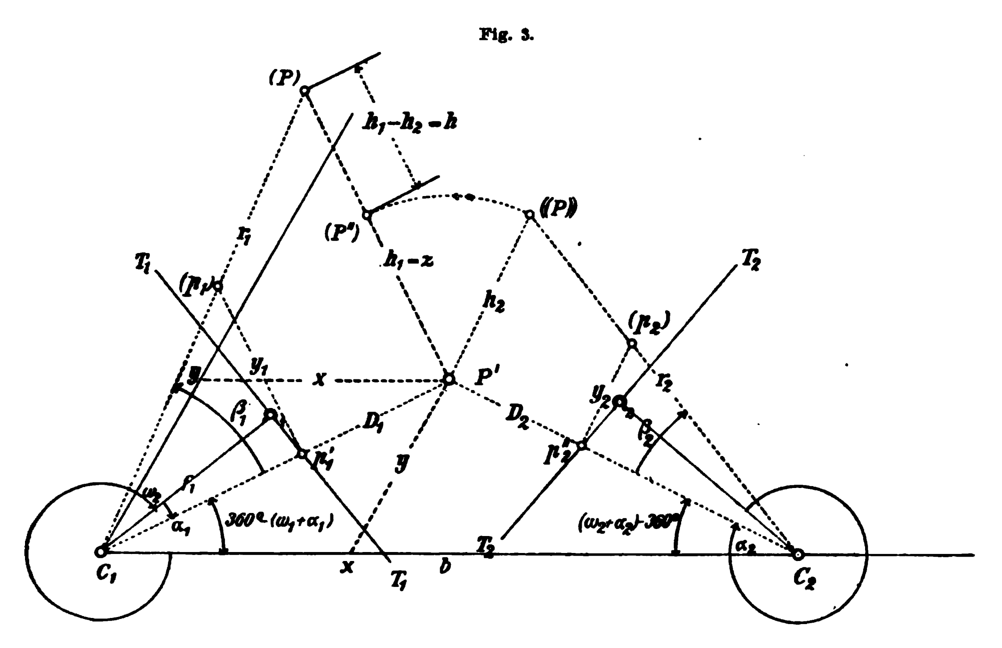
Die Bilddistanz von der linearen Ausdehnung f schließe in ihrer horizontalen Projektion mit der Basis die Horizontalwinkel ω_1 und ω_2, die Orientierungswinkel, und mit den Horizonten die Winkel φ_1 und φ_2 ein; die Projektionsebenen E_1 und E_2 und die Projektionsstrahlen S_1 und S_2, deren Längen bis zum Raumpunkte $C_1P = r_1$ und $C_2P = r_2$ die Radienvektoren darstellen, bilden die Horizontalwinkel α_1 und α_2 mit den bezüglichen Hauptvertikalebenen; die Vertikalwinkel dieser Projektionsstrahlen seien β_1 und β_2.

Nennen wir die rechtwinkligen Koordinaten beider Zentren:

$$(1) \qquad C_1\begin{cases} X_1 = 0 \\ Y_1 = 0 \\ Z_1 = 0 \end{cases} \text{ und } C_2\left\{\begin{matrix} X_2 = b \\ Y_2 = 0 \\ Z_2 = +h \end{matrix}\right\},$$

wobei b die reduzierte Distanz der beiden Zentren und h den Höhen-

Fig. 3.



unterschied derselben angibt, und seien bei systematischer Zählung der Winkel die Polarkoordinaten des Raumpunktes P nach Fig. 2:

$$(2) \qquad \text{für } C_1\left\{\begin{matrix} r_1 \\ \omega_1 + \alpha_1 \\ \beta_1 \end{matrix}\right. \text{ und für } C_2\left\{\begin{matrix} r_2 \\ (\omega_2 + \alpha_2) - 360^0 \\ \beta_2 \end{matrix}\right\},$$

so lassen sich die rechtwinkligen Koordinaten des Raumpunktes P in bekannter Weise durch die Polarkoordinaten ausdrücken; aus Fig. 3 wird unmittelbar erhalten:

$$(3) \begin{cases} \text{von } C_1\begin{cases} x = r_1 \cos\beta_1 \cos[360^0 - (\omega_1 + \alpha_1)] = + r_1 \cos\beta_1 \cos(\omega_1 + \alpha_1) \\ y = r_1 \cos\beta_1 \sin[360^0 - (\omega_1 + \alpha_1)] = - r_1 \cos\beta_1 \sin(\omega_1 + \alpha_1) \\ z = r_1 \sin\beta_1 \end{cases} \\ \text{von } C_2\begin{cases} x = b - r_2 \cos\beta_2 \cos[\omega_2 - (360^0 - \alpha_2)] = b - r_2 \cos\beta_2 \cos(\omega_2 + \alpha_2) \\ y = r_2 \cos\beta_2 \sin[\omega_2 - (360^0 - \alpha_2)] = + r_2 \cos\beta_2 \sin(\omega_2 + \alpha_2) \\ z = r_2 \sin\beta_2 + h, \end{cases} \end{cases}$$

wobei die Winkel α_1 und α_2 im positiven oder negativen Sinne von der Bilddistanz gezählt werden und die Vertikalwinkel β_1 und β_2 ebensogut Höhen- als Tiefenwinkel sein können.

Die Gleichungen der Projektionsstrahlen sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= m_1 z \\ y &= n_1 z \end{aligned}\right\} \quad \text{für den Strahl} \quad S_1 = C_1 P \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} x - X_2 &= m_2(z - Z_2) \\ y - Y_2 &= n_2(z - Z_2) \end{aligned}\right\} \quad \text{„ „ „} \quad S_2 = C_2 P \tag{5}$$

Die Richtungskoeffizienten dieser Geraden lassen sich aus den Gleichungen (3) ableiten; es ist:

$$\left\{\begin{aligned}
m_1 &= \frac{x}{z} = \frac{\cos(\omega_1 + \alpha_1)}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{+ r_1 \cos\beta_1 \cos(\omega_1 + \alpha_1)}{r_2 \sin\beta_2 + h} \\
&= \frac{b - r_2 \cos\beta_2 \cos(\omega_2 + \alpha_2)}{r_1 \sin\beta_1} = \frac{b - r_2 \cos\beta_2 \cos(\omega_2 + \alpha_2)}{r_2 \sin\beta_2 + h} \\
n_1 &= \frac{y}{z} = \frac{-\sin(\omega_1 + \alpha_1)}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{- r_1 \cos\beta_1 \sin(\omega_1 + \alpha_1)}{r_2 \sin\beta_2 + h} \\
&= \frac{+ r_2 \cos\beta_2 \sin(\omega_2 + \alpha_2)}{r_1 \sin\beta_1} = \frac{+ r_2 \cos\beta_2 \sin(\omega_2 + \alpha_2)}{r_2 \sin\beta_2 + h} \\
m_2 &= \frac{x - X_2}{z - Z_2} = \frac{r_1 \cos\beta_1 \cos(\omega_1 + \alpha_1) - b}{r_1 \sin\beta_1 - h} = \frac{r_1 \cos\beta_1 \cos(\omega_1 + \alpha_1) - b}{r_2 \cos\beta_2} \\
&= \frac{- r_2 \cos\beta_2 \cos(\omega_2 + \alpha_2)}{r_1 \sin\beta_1 - h} = \frac{- r_2 \cos\beta_2 \cos(\omega_2 + \alpha_2)}{r_2 \sin\beta_2} \\
n_2 &= \frac{y - Y_2}{z - Z_2} = \frac{- r_1 \cos\beta_1 \sin(\omega_1 + \alpha_1)}{r_1 \sin\beta_1 - h} = \frac{- r_1 \cos\beta_1 \sin(\omega_1 + \alpha_1)}{r_2 \sin\beta_2} \\
&= \frac{+ r_2 \cos\beta_2 \sin(\omega_2 + \alpha_2)}{r_1 \sin\beta_1 - h} = \frac{+ r_2 \cos\beta_2 \sin(\omega_2 + \alpha_2)}{r_2 \sin\beta_2}
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Berücksichtigt man, daß

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{h}{b}$$

ist und ferner in dem Dreiecke $C_1 P' C_2$ die Proportionen bestehen:

$$\left\{\begin{aligned}
b : r_1 \cos\beta_1 &= \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)] : + \sin(\omega_2 + \alpha_2) \\
b : r_2 \cos\beta_2 &= \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)] : - \sin(\omega_1 + \alpha_1),
\end{aligned}\right.$$

so kann durch Einführung dieser Werte in die Gleichungen (6) nach einfacher Reduktion erhalten werden:

$$\left\{\begin{aligned}
m_1 &= \frac{+\cos(\omega_1 + \alpha_1)}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{+\cos(\omega_1 + \alpha_1)\sin(\omega_2 + \alpha_2)}{-\sin(\omega_1 + \alpha_1)\operatorname{tg}\beta_2 + \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]\operatorname{tg}\psi} \\
n_1 &= \frac{-\sin(\omega_1 + \alpha_1)}{\operatorname{tg}\beta_1} = \frac{-\sin(\omega_1 + \alpha_1)\sin(\omega_2 + \alpha_2)}{-\sin(\omega_1 + \alpha_1)\operatorname{tg}\beta_2 + \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]\operatorname{tg}\psi} \\
m_2 &= \frac{-\cos(\omega_2 + \alpha_2)}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{+\sin(\omega_1 + \alpha_1)\cos(\omega_2 + \alpha_2)}{+\sin(\omega_2 + \alpha_2)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]\operatorname{tg}\psi} \\
n_2 &= \frac{+\sin(\omega_2 + \alpha_2)}{\operatorname{tg}\beta_2} = \frac{-\sin(\omega_1 + \alpha_1)\sin(\omega_2 + \alpha_2)}{+\sin(\omega_2 + \alpha_2)\operatorname{tg}\beta_1 - \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]\operatorname{tg}\psi}
\end{aligned}\right. \tag{7}$$

Mit Berücksichtigung der vorstehenden Gleichungen (7) für die Richtungskoeffizienten nehmen die Projektionsgleichungen der Raumstrahlen S_1 und S_2 nach dem Raumpunkte die Form an:

Erster Projektionsstrahl S_1, *bezw.* S_{I}.

$$(8)\qquad S_1\begin{cases}\operatorname{tg}\beta_1\, x - \cos(\omega_1+\alpha_1)\, z = 0\\ \operatorname{tg}\beta_1\, y + \sin(\omega_1+\alpha_1)\, z = 0\end{cases}$$

$$(9)\quad S_{\mathrm{I}}\begin{cases}[-\sin(\omega_1+\alpha_1)\operatorname{tg}\beta_2+\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]\operatorname{tg}\psi]x-\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)z=0\\ [-\sin(\omega_1+\alpha_1)\operatorname{tg}\beta_2+\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]\operatorname{tg}\psi]x+\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)z=0\end{cases}$$

vom Projektionszentrum C_1 und

zweiter Projektionsstrahl S_2, *bezw.* S_{II}

$$(10)\qquad S_2\begin{cases}\operatorname{tg}\beta_2\, x + \cos(\omega_2+\alpha_2)\, z = b\operatorname{tg}\beta_2 + \cos(\omega_2+\alpha_2)\, h\\ \operatorname{tg}\beta_2\, y - \sin(\omega_2+\alpha_2)\, z = -\sin(\omega_2+\alpha_2) h\end{cases}$$

$$(11)\quad S_{\mathrm{II}}\begin{cases}\{\sin(\omega_2+\alpha_2)\operatorname{tg}\beta_1-\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]\operatorname{tg}\psi\}\, x-\sin(\omega_1+\alpha_1)\cos(\omega_2+\alpha_2)z\\ \qquad=\{\sin(\omega_2+\alpha_2)\operatorname{tg}\beta_1-\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)\}\, b-\sin(\omega_1+\alpha_1)\cos(\omega_2+\alpha_2)h\\ \{\sin(\omega_2+\alpha_2)\operatorname{tg}\beta_1-\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]\operatorname{tg}\psi\}\, y+\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)z\\ \qquad=+\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)\, h\end{cases}$$

für das Projektionszentrum C_2.

Die rechtwinkligen Koordinaten des Raumpunktes P berechnen sich aus den Gleichungen (8)—(11) mit:

$$(12)\qquad\begin{cases}x=\dfrac{\Delta_{x,12}}{\Delta_{xz,12}}=\dfrac{\Delta_{x,1\mathrm{II}}}{\Delta_{xz,1\mathrm{II}}}=\dfrac{\Delta_{x,\mathrm{I}2}}{\Delta_{xz,\mathrm{I}2}}=\dfrac{\Delta_{x,\mathrm{III}}}{\Delta_{xz,\mathrm{III}}}\\[2ex] y=\dfrac{\Delta_{y,12}}{\Delta_{yz,12}}=\dfrac{\Delta_{y,1\mathrm{II}}}{\Delta_{yz,1\mathrm{II}}}=\dfrac{\Delta_{y,\mathrm{I}2}}{\Delta_{yz,\mathrm{I}2}}=\dfrac{\Delta_{y,\mathrm{III}}}{\Delta_{yz,\mathrm{III}}}\\[2ex] z=\dfrac{\Delta_{z,12}}{\Delta_{xz,12}}=\dfrac{\Delta_{z,1\mathrm{II}}}{\Delta_{xz,1\mathrm{II}}}=\dfrac{\Delta_{z,\mathrm{I}2}}{\Delta_{xz,\mathrm{I}2}}=\dfrac{\Delta_{z,\mathrm{III}}}{\Delta_{xz,\mathrm{III}}}\\[2ex] \quad=\dfrac{\Delta_{z,12}}{\Delta_{yz,12}}=\dfrac{\Delta_{z,1\mathrm{II}}}{\Delta_{yz,1\mathrm{II}}}=\dfrac{\Delta_{z,\mathrm{I}2}}{\Delta_{yz,\mathrm{I}2}}=\dfrac{\Delta_{z,\mathrm{III}}}{\Delta_{yz,\mathrm{III}}},\end{cases}$$

wobei Δ Symbole für Determinanten, aus den Gleichungen für die Projektionsstrahlen S_1 (S_1 und S_{I}) und S_2 (S_2 und S_{II}) abgeleitet, bedeuten; der erste Index bezieht sich auf die Unbekannte, bezw. auf die Unbekannten, die in den verwendeten Gleichungen vorkommen; der durch ein Komma getrennte Index zeigt jene Gleichungen an, welche in Betracht gezogen wurden und in den Indizes der zwei Strahlen S_1, S_{I} und S_2, S_{II}, die durch die Gleichungen (8) und (9), sowie (10) und (11) gegeben sind, sich vorfinden.

$$(15)\quad\begin{cases}\cos(xr_1) = \dfrac{x}{r_1} = \cos\beta_1 \cos(\omega_1 + \alpha_1) \\ \cos(yr_1) = \dfrac{y}{r_1} = -\cos\beta_1 \sin(\omega_1 + \alpha_1) \\ \cos(zr_1) = \dfrac{z}{r_1} = \sin\beta_1 \\ \text{und} \\ \cos(xr_2) = \dfrac{x-b}{r_2} = -\cos\beta_2 \cos(\omega_2 + \alpha_2) \\ \cos(yr_2) = \dfrac{y}{r_2} = \cos\beta_2 \sin(\omega_2 + \alpha_2) \\ \cos(zr_2) = \dfrac{z-h}{r_2} = \sin\beta_2\end{cases}$$

ferner für den Kosinus des Neigungswinkels der Leitstrahlen selbst:

$$(16)\quad \cos(r_1 r_2) = \sin\beta_1 \sin\beta_2 - \cos\beta_1 \cos\beta_2 \cos[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]$$

Die Festlegung des Raumpunktes P kann auch dadurch geschehen, daß man neben den Horizontalwinkeln seiner Leitstrahlen in bezug auf die Basis, d. i. $\omega_1 - \alpha_1$ und $\omega_2 - \alpha_2$, auch die Horizontaldistanzen D_1 und D_2, sowie die relativen Höhen h_1 und h_2, bezogen auf die Zentren C_1 und C_2, ermittelt.

Für die Horizontaldistanzen folgt:

$$(\text{VII})\quad\begin{cases}D_1 = r_1 \cos\beta_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = b\,\dfrac{\sin}{\sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]} \\ D_2 = r_2 \cos\beta_2 = \sqrt{(b-x)^2 + y^2} = b\,\dfrac{\sin}{\sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)]}\end{cases}$$

und für die relativen Höhen hat man:

$$(\text{VIII})\quad\begin{cases}h_1 = r_1 \sin\beta_1 = \sqrt{r_1^2 - (x^2 + y^2)} = D_1 \operatorname{tg}\beta_1 \\ h_2 = r_2 \sin\beta_2 = \sqrt{r_2^2 - [(b-x)^2 + y^2]} = D_2 \operatorname{tg}\beta_2,\end{cases}$$

welche Formeln sich mehrfach umändern lassen, wenn aus den vorher abgeleiteten Ausdrücken die Werte für die rechtwinkligen und Polarkoordinaten eingeführt werden.

Sind die perspektivischen Konstanten des photogrammetrischen Instrumentes bekannt, so lassen sich die Winkel α und β in den beiden Zentren C_1 und C_2 aus den rechtwinkligen Bild- oder Plattenkoordinaten $x_1\, y_1$ und $x_2\, y_2$ der korrespondierenden Bildpunkte p_1 und p_2 bestimmen.

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, die Bildebene sei vertikal, so hat man:

$$(17)\quad \begin{cases} \sin\alpha_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{f_1^2+x_1^2}}, \ \cos\alpha_1 = \dfrac{f_1}{\sqrt{f_1^2+x_1^2}} \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{x_1}{f_1} \\ \operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt{f_1^2+x_1^2}} = \dfrac{y_1}{f_1}\cos\alpha_1 = \dfrac{y_1}{x_1}\sin\alpha_1 \end{cases} \text{und} \quad \begin{cases} \sin\alpha_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{f_2^2+x_2^2}}, \ \cos\alpha_2 = \dfrac{f_2}{\sqrt{f_2^2+x_2^2}} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{x_2}{f_2} \\ \operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{y_2}{\sqrt{f_2^2+\alpha_2^2}} = \dfrac{y_2}{x_2}\sin\alpha_2 = \dfrac{y_2}{f_2}\cos\alpha_2 \end{cases}$$

und die rechtwinkligen Koordinaten nehmen die Form an:

$$(\mathrm{I}')\quad \begin{cases} x = \dfrac{(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{(f_1 f_2 + x_1 x_2)\sin(\omega_2-\omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2-\omega_1)}\, b \\ y = \dfrac{-(f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1)(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{(f_1 f_2 + x_1 x_2)\sin(\omega_2-\omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2-\omega_1)}\, b \\ z = \dfrac{(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)\, y_1}{(f_1 f_2 + x_1 x_2)\sin(\omega_2-\omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2-\omega_1)}\, b \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}')\quad \begin{cases} x = \dfrac{(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{y_2(f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1) + y_1(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}\, h \\ y = \dfrac{-(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)(x_1\cos\omega_1 + f_1\sin\omega_1)}{y_2(f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1) + y_1(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}\, h \\ z = \dfrac{(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)\, y_1}{y_2(f_1\sin\omega_1 + \omega_1\cos\omega_1) + y_1(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}\, h \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}')\quad \begin{cases} x = \dfrac{[b y_2 + h(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)](f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)}{y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1) + y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)} \\ y = -\dfrac{[b y_2 + h(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)](f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1)}{y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1) + y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)} \\ z = \dfrac{[b y_2 + h(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)]\, y_1}{y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1) + y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)} \end{cases}$$

und endlich die letzte Form:

$$(\mathrm{IV}')\quad \begin{cases} x = \dfrac{[b y_1 - h(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)](f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)}{[y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2) + y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)](f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1)} \\ y = \dfrac{[b y_1 - h(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)](f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2) + y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)} \\ z = \dfrac{-[b y_1 - h(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)](f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{y_2(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2) + y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)}\, y_1. \end{cases}$$

Für die Radienvektoren wird erhalten:

$$(13')\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)\sqrt{f_1^2+x_1^2+y_1^2}}{(f_1 f_2 + x_1 x_2)\sin(\omega_2-\omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2-\omega_1)}\, b \\ \quad = \dfrac{(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)\sqrt{f_1^2+x_1^2+x_2^2}}{y_2(f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1) + y_1(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}\, h \\ \quad = \dfrac{[b y_2 + h(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)]\sqrt{f_1^2+x_1^2+x_2^2}}{y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1) + y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2)} \\ \quad = \dfrac{-[b y_1 - h(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)](f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{y_1(f_2\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2) + y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)}\, \dfrac{\sqrt{f_1^2+x_1^2+y_1^2}}{f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1} \end{cases}$$

und

$$(14')\quad \left\{\begin{aligned} r_2 &= \frac{-(f_1 \sin\omega_1 + x_1 \cos\omega_1)\sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{(f_1 f_2 + x_1 x_1)\sin(\omega_2 - \omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2 - \omega_1)}\, b \\ &= \frac{-(f_1 \sin\omega_1 + x_1 \cos\omega_1)\sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{y_2 (f_1 \sin\omega_1 + x_1 \cos\omega_1) + y_1 (f_2 \sin\omega_2 + x_2 \cos\omega_2)}\, h \\ &= \frac{-[b y_2 + h(f_2 \cos\omega_2 - x_2 \sin\omega_2)]\sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{y_2 (f_1 \cos\omega_1 - x_1 \sin\omega_1) + y_1 (f_2 \cos\omega_2 - x_2 \sin\omega_2)} \frac{f_1 \sin\omega_1 + x_1 \cos\omega_1}{f_2 \sin\omega_2 + x_2 \cos\omega_2} \\ &= \frac{[b y_1 - h(f_1 \cos\omega_1 - x_1 \sin\omega_1)]\sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{y_1 (f_2 \cos\omega_2 - x_2 \sin\omega_2) + y_2 (f_1 \cos\omega_1 - x_1 \sin\omega_1)}. \end{aligned}\right.$$

Für den Winkel ψ ergibt sich die Relation:

$$(\mathrm{V}')\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{y_2 (f_1 \sin\omega_1 + x_1 \cos\omega_1) + y_1 (f_2 \sin\omega_2 + x_2 \cos\omega_2)}{(f_1 f_2 + x_1 x_2)\sin(\omega_2 - \omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2 - \omega_1)}$$

und für den Winkel der beiden Leitstrahlen:

$$(\mathrm{VI}')\qquad \cos(r_1 r_2) = \frac{y_1 y_2 - x_1 x_2 - f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2}\sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}.$$

Wird eine geneigte Lage der Bildebene in den beiden Zentren C_1 und C_2 vorausgesetzt, so ergeben sich mit Benützung der Gleichung I des ersten Abschnittes:

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\alpha_1 &= \frac{x_1}{\sqrt{(f_1 \cos\varphi_1 - y_1 \sin\varphi_1)^2 + x_1^2}} = \frac{\operatorname{tg}\sigma_1 \sin\Theta}{\sqrt{(\cos\varphi_1 - \operatorname{tg}\sigma_1 \sin\varphi_1 \cos\Theta_1)^2 + \operatorname{tg}^2\sigma_1 \sin^2\Theta_1}} \\ \cos\alpha_1 &= \frac{f_1 \cos\varphi_1 - y_1 \sin\varphi_1}{\sqrt{(f_1 \cos\varphi_1 - y_1 \sin\varphi_1)^2 + x_1^2}} = \frac{\cos\varphi_1 - \operatorname{tg}\sigma_1 \sin\varphi_1 \cos\Theta_1}{\sqrt{(\cos\varphi_1 - \operatorname{tg}\sigma_1 \sin\varphi_1 \cos\Theta_1)^2 + \operatorname{tg}^2\sigma_1 \sin^2\Theta_1}} \\ \operatorname{tg}\alpha_1 &= \frac{x_1}{f_1 \cos\varphi_1 - y_1 \sin\varphi_1} \\ \operatorname{tg}\beta_1 &= \frac{f_1 \sin\varphi_1 + y_1 \cos\varphi_1}{f_1 \cos\varphi_1 - y_1 \sin\varphi_1}\cos\alpha_1 = (\sin\varphi_1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\Theta_1)\frac{\cos\alpha_1}{\cos\varphi_1} \end{aligned}\right.$$

für die Station C_1 und für die zweite Station C_2:

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\alpha_2 &= \frac{x_2}{\sqrt{(f_2 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_2)^2 + x_2^2}} = \frac{\operatorname{tg}\sigma_2 \sin\Theta_2}{\sqrt{(\cos\varphi_2 - \operatorname{tg}\sigma_2 \sin\varphi_2 \cos\Theta_2)^2 + \operatorname{tg}\sigma_2^2 \cos\Theta_2^2}} \\ \cos\alpha_2 &= \frac{f_2 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_2}{\sqrt{(f_2 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_2)^2 + x_2^2}} = \frac{\cos\varphi_2 - \operatorname{tg}\sigma_2 \sin\varphi_2 \cos\Theta_2}{\sqrt{(\cos\varphi_2 - \operatorname{tg}\sigma_2 \sin\varphi_2 \cos\Theta_2)^2 + \operatorname{tg}\sigma_2^2 \cos\Theta_2^2}} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 &= \frac{x_2}{f_2 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_2} \\ \operatorname{tg}\beta_2 &= \frac{f_2 \sin\varphi_2 + y_2 \cos\varphi_2}{f_2 \cos\varphi_2 - y_2 \sin\varphi_2}\cos\alpha_2 = (\sin\varphi_2 + \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{cotg}\Theta_2)\frac{\cos\alpha_2}{\cos\varphi_2}. \end{aligned}\right.$$

Die vorstehenden Werte können in die Gleichungen I—VI eingeführt werden; diese Gleichungen zeigen jedoch keinen übersichtlichen und regelmäßigen Bau, weshalb wir auf die Vorführung derselben verzichten. Im gegebenen Falle wird man sie leicht aufstellen können.

III.

Die Auswertung der abgeleiteten Formeln für gegebene Fälle der Praxis wird nach Überlegung der obwaltenden Verhältnisse niemals Schwierigkeiten bieten.

Die Bildweiten in den beiden Zentren werden wohl gleich zu setzen sein, also $f_1 = f_2 = f$, und zwar aus dem Grunde, weil die photogrammetrische Aufnahme in den beiden Standpunkten mit demselben Apparate erfolgen wird; die Formeln ergeben sich unmittelbar aus den abgeleiteten Ausdrücken des vorhergehenden Abschnittes.

Indem wir die Fülle der Sonderfälle, die betrachtet werden könnten und aus den allgemein geltenden Formeln eine reiche Ausbeute von Spezialformeln liefern würden, übergehen, wollen wir uns nur auf einen sehr interessanten Fall beschränken, den Prof. Dr. K. Koppe bei einer Studie über die Genauigkeit photogrammetrischer Distanzmessung angewendet und später mit einer Abänderung auch auf Wolkenaufnahmen ausgedehnt hat.

Koppe hat nämlich die Bilddistanzen nicht unter beliebigen Orientierungswinkeln ω_1 und ω_2 bei seinen Untersuchungen angenommen, sondern $\omega_1 = \omega_2 = 90^0$ gesetzt; die Basis wird hierdurch parallel zu den Bildebenen angenommen.

Praktisch derselbe Fall kommt bei der Stereophotogrammetrie vor, welche durch Dr. Pulfrichs und Prof. Schells Arbeiten und Apparate eine so große Wichtigkeit erlangt hat.

Die allgemeinsten Ausdrücke, Formel I—IV, Abschnitt II, gehen dann über in:

$$(1)\quad\begin{cases} x = -\dfrac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\,b = -\dfrac{\sin\alpha_1\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\,h \\ y = -\dfrac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\,b = -\dfrac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\,h \\ z = \dfrac{\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\,b = \dfrac{\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}{\cos\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\,h \end{cases}$$

und

$$(2)\quad\begin{cases} x = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta_2 - h\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\sin\alpha_1 = -\dfrac{b\operatorname{tg}\beta_1 + h\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2}\,\dfrac{\cos\alpha_2}{\operatorname{cotg}\alpha_1} \\ y = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta_2 + h\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\cos\alpha_1 = -\dfrac{b\operatorname{tg}\beta_1 + h\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2}\cos\alpha_2 \\ z = -\dfrac{b\operatorname{tg}\beta_2 - h\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta_1 + h\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2}\,\dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\operatorname{tg}\beta_1; \end{cases}$$

die Radienvektoren werden bestimmt durch:

$$(3)\quad\begin{cases} r_1 = \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\beta_1\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\,b = \dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\,\dfrac{h}{\cos\beta_1} \\ = -\dfrac{b\operatorname{tg}\beta_2 - h\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\,\dfrac{1}{\cos\beta_1} = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta_1 + h\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2}\cdot\dfrac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}\cdot\dfrac{1}{\cos\beta_1} \end{cases}$$

und

$$(4)\begin{cases} r_2 = -\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\beta_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)}\,b = -\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}\cdot\dfrac{h}{\cos\beta_2} \\ = -\dfrac{b\operatorname{tg}\beta_1+h\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2}\cdot\dfrac{1}{\cos\beta_2} = \dfrac{b\operatorname{tg}\beta_1+h\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1+\sin\alpha_1\operatorname{tg}\beta_2}\cdot\dfrac{\cos\alpha_1}{\cos\alpha_2}\cdot\dfrac{1}{\cos\beta_2}; \end{cases}$$

für die Höhenrelation folgt:

$$(5)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{h}{b} = \frac{\cos\alpha\operatorname{tg}\beta_2+\cos\alpha_2\operatorname{tg}\beta_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}$$

oder nach Einführung der Winkel φ_1 und φ_2 auch:

$$(6)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{\cos\alpha_1\cos\varphi_1\,[\sin\varphi_2\cos\alpha_2+\sin\alpha_2\operatorname{cotg}\Theta_2]+\cos\alpha_2\cos\varphi_2\,[\sin\varphi_1\cos\alpha_1+\sin\alpha_1\operatorname{cotg}\Theta_1]}{\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Wird die Bildebene vertikal angenommen, also $\varphi_1 = \varphi_2 = 0^0$ gesetzt, so folgt die einfache Beziehung:

$$(7)\qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\alpha_1\sin\alpha_2\operatorname{cotg}\Theta_2+\cos\alpha_2\sin\alpha_1\operatorname{cotg}\Theta_1}{\sin(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Die parallaktischen Winkel der Leitstrahlen r_1 und r_2 mit den Koordinatenachsen sowie untereinander sind gegeben durch:

$$(8)\begin{cases} \cos(xr_1) = \dfrac{x}{r_1} = -\cos\beta_1\sin\alpha_1 \\ \cos(yr_1) = \dfrac{y}{r_1} = -\cos\beta_1\cos\alpha_1 \\ \cos(zr_1) = \dfrac{z}{r_1} = \sin\beta_1 \\ \text{weiter} \\ \cos(xr_2) = \dfrac{x}{r_2} = \cos\beta_2\sin\alpha_2 \\ \cos(yr_2) = \dfrac{y}{r_2} = \cos\beta_2\cos\alpha_2 \\ \cos(zr_2) = \dfrac{z}{r_2} = \sin\beta_2 \\ \text{und} \\ \cos(r_1r_2) = \sin\beta_1\sin\beta_2 - \cos\beta_1\cos\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1). \end{cases}$$

Werden die auf den Photogrammen ausgemessenen Bildkoordinaten x_1y_1 und x_2y_2 eingeführt, so erhalten wir:

$$(9)\begin{cases} x = -\dfrac{f_2x_1}{x_2f_1-x_2f_1}\,b = -\dfrac{x_1f_2}{f_1y_2+f_2y_1}\,h \\ y = -\dfrac{f_1f_2}{f_1x_2-f_2x_1}\,b = -\dfrac{f_1f_2}{f_1y_2+f_2y_1}\,h \\ z = \dfrac{f_2y_1}{f_1x_2-f_2x_1}\,b = \dfrac{f_2y_2}{f_1y_2+f_2y_1}\,h, \end{cases}$$

weiter

$$(10)\quad \begin{cases} x = \dfrac{by_2 - hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1}\, x_1 = -\dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_1} \cdot \dfrac{f_2}{f_1} \cdot x_1 \\ y = \dfrac{by_2 - hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1}\, f_1 = -\dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_1} \cdot f_2 \\ z = -\dfrac{by_2 - hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \cdot y_1 = \dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2} \cdot \dfrac{f_2}{f_1} \cdot y_1 . \end{cases}$$

Für die Leitstrahlen wird erhalten:

$$(11)\quad \begin{cases} r_1 = \dfrac{f_2 \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2}}{f_1 x_2 - f_2 x_1}\, b = \dfrac{f_2 \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2}}{f_1 y_2 + f_2 y_1}\, h \\ \quad = -\dfrac{by_2 - hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2} = \dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2} \cdot \dfrac{f_2}{f_1} \cdot \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2} \end{cases}$$

und

$$(12)\quad \begin{cases} r_2 = -\dfrac{f_1 \sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{x_2 f_1 - x_1 f_2}\, b = -\dfrac{f_1 \sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{f_1 y_2 + f_2 y_1}\, h \\ \quad = \dfrac{by_2 + hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \cdot \dfrac{f_1}{f_2} \cdot \sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2} = -\dfrac{by_1 + hy_2}{x_2 y_1 + x_1 y_2} \sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2} . \end{cases}$$

Eine einfache Formel ergibt sich für den Vertikalwinkel ψ, es ist nämlich:

$$(13)\qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{h}{b} = \frac{f_1 y_2 + f_2 y_1}{f_1 x_2 - f_2 x_1} .$$

Die photogrammetrischen Apparate, welche in der Praxis zur Anwendung gelangen, werden so konstruiert, daß die linearen perspektivischen Konstanten, die Bilddistanzen, einander gleich werden, also $f_1 = f_2 = f$ zu setzen ist. Unter dieser Voraussetzung vereinfachen sich die abgeleiteten Formeln nicht unwesentlich; wir erhalten für die rechtwinkligen Koordinaten des Raumpunktes:

$$(14)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{x_1}{x_2 - x_1}\, b = -\dfrac{x_1}{y_2 + y_1}\, h \\ y = -\dfrac{f}{x_2 - x_1}\, b = -\dfrac{f}{y_2 + y_1}\, h \\ z = \dfrac{y_1}{x_2 - x_1}\, b = \dfrac{y_1}{y_1 + y_2}\, h \end{cases}$$

und ferner:

$$(15)\quad \begin{cases} x = \dfrac{by_2 - hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \cdot x_1 = -\dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2} \cdot x_1 \\ y = \dfrac{by_2 - hx_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \cdot f = -\dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2} \cdot f \\ z = -\dfrac{by_2 - hy_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1} \cdot y_1 = \dfrac{by_1 + hx_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2} \cdot y_1 . \end{cases}$$

Die Polarkoordinaten werden lauten und zwar die Horizontalwinkel:

$$(16)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{x_1}{f} \\ \operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{x_2}{f} \end{cases}$$

die Vertikalwinkel

$$(17)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{y_1}{\sqrt{f^2 + \alpha_1^2}} = \dfrac{y_1}{x_1}\sin\alpha_1 = \dfrac{y_1}{f}\cos\alpha_1 \\ \operatorname{tg}\beta_2 = \dfrac{y_2}{\sqrt{f^2 + x_2^2}} = \dfrac{y_2}{x_2}\sin\alpha_2 = \dfrac{y_2}{f}\cos\alpha_2 \end{cases}$$

und die Leitstrahlen

$$(18)\qquad \begin{cases} r_1 = \dfrac{\sqrt{f^2 + x_1^2 + f_1^2}}{x_2 - x_1}\,b = \dfrac{\sqrt{f^2 + x_1^2 + y_1^2}}{y_1 + y_2}\cdot h \\ \quad = -\dfrac{b y_2 - h x_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1}\sqrt{f^2 + x_1^2 + y_1^2} = \dfrac{b y_1 + h x_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2}\sqrt{f^2 + x_1^2 + y_1^2} \end{cases}$$

$$(19)\qquad \begin{cases} r_2 = -\dfrac{\sqrt{f^2 + x_2^2 + y_2^2}}{x_2 - x_1}\,b = -\dfrac{\sqrt{f^2 + x_2^2 + y_2^2}}{y_1 + y_2}\,h \\ \quad = \dfrac{b y_2 - h x_2}{x_1 y_2 + x_2 y_1}\sqrt{f^2 + x_2^2 + y_2^2} = -\dfrac{b y_1 + h x_1}{x_2 y_1 + x_1 y_2}\sqrt{f^2 + x_2^2 + y_2^2}. \end{cases}$$

Die Höhenrelation wird besonders einfach:

$$(20)\qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{h}{b} = \frac{y_2 + y_1}{x_2 - x_1}.$$

Bei photogrammetrischen Wolkenaufnahmen, wobei die Achsen der Kameras, die Bilddistanzen vertikal gerichtet sind, ferner $\omega_1 = \omega_2 = 90^0$ gewählt wird, nehmen die Gleichungen für die Raumkoordinaten einen einfachen Bau an.

Es wird auch $\varphi_1 = \varphi_2 = 90^0$ zu setzen sein, somit vorerst:

$$(21)\qquad \begin{cases} \sin\alpha_1 = \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = +\sin\Theta_1 \\ \cos\alpha_1 = \dfrac{-y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = -\cos\Theta_1 \\ \operatorname{tg}\alpha_1 = \dfrac{x_1}{-y_1} = -\operatorname{tg}\Theta_1 \\ \operatorname{tg}\beta_1 = \dfrac{f_1}{-y_1}\cos\alpha_1 = (1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{cotg}\Theta_1)\cos\alpha_1 \\ \qquad = +\dfrac{f_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} = -(1 - \operatorname{cotg}^2\Theta_1)\cos\Theta_1 = (1 - \operatorname{tg}^2\alpha_1)\cos\alpha_1 \end{cases}$$

$$
(22)\quad \begin{cases}
\sin \alpha_2 = \dfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = + \sin \Theta_2 \\[2ex]
\cos \alpha_2 = \dfrac{-y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = - \cos \Theta_2 \\[2ex]
\operatorname{tg} \alpha_2 = \dfrac{x_2}{-y_2} = - \operatorname{tg} \Theta_2 \\[2ex]
\operatorname{tg} \beta_2 = \dfrac{f}{-y_2} \cos \alpha_2 = (1 + \operatorname{tg} \alpha_2 \operatorname{ctg} \Theta_2) \cos \alpha_2 \\[2ex]
\qquad = + \dfrac{f_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = -(1 - \operatorname{cotg}^2 \Theta_2) \cos \Theta_2 = (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha_2) \cos \alpha_2 .
\end{cases}
$$

Die Gleichungen für die rechtwinkligen Koordinaten sind:

$$
(23)\quad \begin{cases}
x = \dfrac{x_1 y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} b = - \dfrac{x_1 y_2}{f_2 y_1 + f_1 y_2} h \\[2ex]
y = - \dfrac{y_1 y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} b = - \dfrac{y_1 y_2}{f_2 y_1 + f_1 y_2} h \\[2ex]
z = - \dfrac{y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1} b = - \dfrac{f_1 y_2}{f_2 y_1 + f_1 y_2} h
\end{cases}
$$

und

$$
(24)\quad \begin{cases}
x = \dfrac{b f_2 - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2} \cdot x_1 = - \dfrac{f_1 b + x_1 h}{f_1 x_2 + f_2 x_1} \cdot \dfrac{y_1 y_2}{x_1} \\[2ex]
y = - \dfrac{f_1 b - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2} \cdot y_1 = + \dfrac{f_1 b + x_1 h}{f_1 x_2 + f_2 x_1} \cdot y_2 \\[2ex]
z = - \dfrac{f_2 b - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2} \cdot f_1 = \dfrac{f_1 b + x_1 h}{f_1 x_2 + f_2 x_1} \cdot \dfrac{y_2}{y_1} f_1 .
\end{cases}
$$

Die Polarkoordinaten werden sein und zwar erhält man für die die Horizontalwinkel:

$$
(25)\quad \begin{cases}
\operatorname{tg} \alpha_1 = - \dfrac{x_1}{y_1} \\[2ex]
\operatorname{tg} \alpha_2 = - \dfrac{x_2}{y_2}
\end{cases}
$$

für die Vertikalwinkel

$$
(26)\quad \begin{cases}
\operatorname{tg} \beta_1 = \dfrac{f_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \\[2ex]
\operatorname{tg} \beta_2 = \dfrac{f_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}
\end{cases}
$$

und die Leitstrahlen:

$$
(27)\quad \begin{cases}
r_1 = - \dfrac{y_2 \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2}}{x_1 y_2 - x_2 y_1} b = + \dfrac{y_1 \sqrt{f_2^2 + x_2^2 + y_2^2}}{x_1 y_2 - x_2 y_1} h \\[2ex]
\quad = - \dfrac{f_2 b - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2} \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2} = + \dfrac{f_2 b - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2} \sqrt{f_1^2 + x_1^2 + y_1^2} \cdot \dfrac{y_2}{y_1}
\end{cases}
$$

$$(28)\quad \begin{cases} r_2 = \dfrac{y_1\sqrt{f_1^2+x_1^2+y_1^2}}{x_1 y_2 - x_2 y_1}\, b = -\dfrac{y_1\sqrt{f_1^2+x_1^2+y_1^2}}{f_2 y_1 + f_1 y_2}\, h \\ \quad = -\dfrac{f_2 b - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2}\sqrt{f_2^2+x_2^2+y_2^2} = +\dfrac{f_2 b - x_2 h}{f_2 x_1 + f_1 x_2}\sqrt{f_2^2+x_2^2+y_2^2}\cdot\dfrac{y_1}{y_2}. \end{cases}$$

Die Gleichung für die Höhenkontrolle ist:

$$(29)\quad \operatorname{tg}\psi = \frac{h}{b} = -\frac{f_2 y_1 + f_1 y_2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}.$$

IV.

Graphische oder konstruktive Lösung.

Bei der graphischen Lösung des photogrammetrischen Problemes liegen die Verhältnisse wie folgt:

Nebst den perspektivischen Konstanten des Apparates: Bildweite, Horizont- und Vertikallinie sind gegeben der Horizontalabstand und die Höhenkoten der Standpunkte, bezw. der perspektivischen Zentren, in welchen gemessen sind die Orientierungs- und Vertikalwinkel der Bilddistanzen, außerdem auf beiden Photogrammen die Bildkoordinaten von korrespondierenden Punkten; man hat zu bestimmen die Situation der betreffenden Punkte, d. h. ihre horizontale Projektion, und die Höhenkoten, d. i. ihren Vertikalabstand von den Horizontalebenen der Zentren oder einer als Vergleichungsebene angenommenen Ebene.

Gegeben: { Perspektivische Konstanten: f_1, Horizont und Vertikallinie.
Basis b, Höhen der Zentren H_1 und H_2.

Gemessen: { Orientierungswinkel: ω_1, ω_2
Vertikalwinkel: φ_1, φ_2
Bildkoordinaten: $x_1 y_2$ und $x_2 y_2$.

Die konstruktive Lösung dieser Aufgabe vom Standpunkte der darstellenden Geometrie wird auf rationellste Weise mit Hilfe der kotierten Projektion durchgeführt.

Zu der Verbindungsgeraden der Zentren C_1 und C_2 (Zentrengerade) werden unter den Horizontalwinkeln ω_1 und ω_2 zwei gerade Linien gezogen, in welche die Projektionen der Bilddistanzen fallen. Da die Neigungswinkel der Bilddistanz in beiden Zentren vorliegen, φ_1 und φ_2, so lassen sich die Intervalle i_1 und i_2 derselben leicht finden; man hat:

$$(1)\quad \begin{cases} i_1 = \operatorname{cotg}\varphi_1 \\ i_2 = \operatorname{cotg}\varphi_2. \end{cases}$$

Die Bildebenen stehen auf den Bilddistanzen senkrecht, somit werden die Böschungsmaßstäbe mit den Projektionen der Bilddistanzen

zusammenfallen; ferner besteht zwischen den Intervallen der Böschungsmaßstäbe I_1 und I_2 und den Bilddistanzen die Beziehung:

$$(2) \qquad \begin{Bmatrix} I_1 i_1 = 1 \\ I_2 i_2 = 1 \end{Bmatrix} \text{oder} \begin{Bmatrix} I_1 = \frac{1}{i_1} = \operatorname{tg} \varphi_1 \\ I_2 = \frac{1}{i_2} = \operatorname{tg} \varphi_2 \end{Bmatrix}$$

und die Graduierung erfolgt in entgegengesetzter Richtung mit jener der Bilddistanz.

Die Zentrengerade $C_1 C_2 = g$ kann gleichfalls graduiert werden, weil man die Koten der beiden Zentren kennt und aus ihnen das Intervall i bestimmbar ist.

Für die weitere Konstruktion ist es erforderlich, in beiden Zentren um die Spuren der betreffenden Vertikalebenen, die mit den Böschungsmaßstäben M_1 und M_2 zusammenfallen, die Umlegungen der Bilddistanzen f_1 und f_2, der Vertikallinien $V_1 V_1$ und $V_2 V_2$, sowie der Hauptpunkte der Perspektiven Ω_1 und Ω_2 vorzunehmen; man erhält $V_1 \Omega_1 V_1$ und $V_2 \Omega_2 V_2$, wobei $V_1 V_1$ und $V_2 V_2$ von C_1 und C_2 bezw. die Abstände f_1 und f_2 haben; f_1 und f_2 selbst sind unter den Vertikalwinkeln φ_1 und φ_2 zu den Böschungsmaßstäben M_1 und M_2 gezeichnet; auch lassen sich die Spuren $T_1 T_1$ und $T_2 T_2$ der geneigten Bildebenen auf die durch die Zentren gehenden Horizontalebenen bestimmen.

Die nun so gezeichneten Linien bilden sozusagen das Gerippe für die weitere Zeichnung.

Bestimmung der Situation. Die Situation des Punktes P, dessen Bildkoordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ ausgemessen wurden, wird wie folgt erhalten: Auf Tafel I wurde die Ordinate $-y_1$ von Ω_1 in negativer Richtung auf $V_1 V_1$ aufgetragen, durch den erhaltenen Punkt (p_1) eine Senkrechte zum Böschungsmaßstabe M_1 gezogen und vom Schnittpunkte p_1'' mit demselben die Abszisse $+x_1$ im positiven Sinne aufgetragen, wodurch der Punkt p_1' als horizontale Projektion des Bildpunktes p_1 erhalten wird; p_1' mit C_1 verbunden, gibt die horizontale Projektion des Visierstrahles S_1, also S_1', in welchem die Situation P' des Raumpunktes P liegen muß. Analog bestimmt man im Punkte C_2 die Horizontalprojektion des Visierstrahles S_2, also S_2'.

Im Schnittpunkte von S_1' und S_2' befindet sich die Situation P' des Raumpunktes P.

Gehören die Bildkoordinaten $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ zu korrespondierenden Bildern, so muß der Haucksche Satz bestehen, welcher eine vorzügliche Kontrolle bietet; sie kann in der vorliegenden kotierten Darstellung mit einigen Linien durchgeführt werden.

Die sogenannten Kernpunkte K_1 und K_2 ergeben sich als Schnittpunkte der graduierten Zentrengeraden g mit den Bildebenen, deren Böschungsmaßstäbe M_1 und M_2 vorliegen, wobei s als Schnittgerade dieser Bildebenen erscheint.

Stellen p_1' und p_2' die Horizontalprojektionen korrespondierender Bildpunkte vor, so müssen nach dem Hauckschen Satze die Verbindungsgeraden $p_1'K_1 = g_1$ und $p_2'K_2 = g_2$ durch einen und denselben Punkt a der Geraden s hindurchgehen. Ist dies nicht der Fall, so ist es ein Zeichen, daß auf der einen Perspektive ein unrichtiger Bildpunkt gewählt und in bezug auf seine Bildkoordinaten ausgemessen wurde.

Diese höchst wichtige Beziehung gestattet auch, falls auf einer Perspektive ein Bildpunkt p_1 angenommen wurde, auf der zweiten durch Konstruktion den zugehörigen Bildpunkt zu finden.

Die Hauck sche Beziehung ist für die Bild-Identifizierung in zweifelhaften Fällen von größter praktischer Bedeutung; man wird sie aber auch, wenn die Identität der Bildpunkte außer Frage steht, benützen, weil man eine beruhigende Kontrolle für seine Arbeit gewinnt.

Hat man auf einem Photogramme den Bildpunkt p_1 gewählt und vermag man auf dem zweiten Photogramme die Abszisse x_2 des zugehörigen Bildpunktes mit Sicherheit anzugeben, so läßt sich seine Bildordinate y_2 mit dem Hauckschen Satze bequem ermitteln. Man verbindet p_1' mit K_1 und erhält im Schnitte dieser Geraden g_1 mit s den Punkt a; nun legt man im Abstande x_2 vom Böschungsmaßstabe M_2 eine Parallele zu M_2 und sucht den Schnittpunkt mit $g_2 = aK_2$ und erhält p_2'; wird durch diesen eine Senkrechte zu M_2 gelegt, so erhält man im Schnitte mit V_2V_2 den Punkt (p_2) und durch die Strecke $\mathfrak{H}_2(p_2) = -y_2$ die gesuchte Ordinate des Bildpunktes p_2 auch dem Zeichen nach, worauf der Bildpunkt p_2 auf dem Photogramme festgestellt werden kann.

Bestimmung der Höhe. Die zwei Visierstrahlen S_1 und S_2 bestimmen eine Ebene, in welcher der Punkt P liegen muß; um die Kote des Punktes P zu erhalten, ist es daher nur nötig, den Böschungsmaßstab dieser Ebene zu bestimmen. Wir betreten diesen Weg nicht, sondern werden noch einfacher zum Ziele zu gelangen suchen.

In der Ebene der Visierstrahlen S_1S_2 liegt auch die Zentrengerade $C_1C_2 = g$, welche wir als *Höhenmaßstab* benützen, um auf ihr, da sie graduiert ist, die Kote des Punktes P zu ermitteln. Man wird eine Spurparallele der Ebene S_1S_2 suchen, dann durch P' eine solche legen und im Schnitte mit der Zentrengeraden g die Kote des Punktes P ablesen.

Die Koten der Punkte (p_1) und (p_2) kann man sofort erhalten; sie entsprechen den Koten der Bildpunkte p_1 und p_2 selbst. Beide Punkte liegen in den Bildebenen von C_1, bezw. C_2, es kann daher an den Böschungsmaßstäben M_1 und M_2 bei p_1'' und p_2'' die Kote von p_1 und p_2, deren Horizontalprojektion in p_1' und p_2' ist, angegeben und zu p_1' und p_2' hinzugeschrieben werden. Sucht man nun auf der Zentrengeraden g die Koten von p_1' und p_2' und verbindet sie mit diesen Punkten, so erhält man Spurparallele der Visierebene des Punktes P.

Hierbei ergibt sich sofort eine Kontrolle: die so erhaltenen zwei Geraden müssen, weil sie Spurparallele derselben Ebene sind, parallel sein; wenn dies nicht der Fall ist, so ist es ein Zeichen dafür, daß entweder die benützten Bildpunkte keine korrespondierenden waren, oder aber bei der Konstruktion ein Fehler unterlaufen ist.

Die Kote des Punktes P wird erhalten, wenn man durch P' eine Spurparallele zieht, den Schnittpunkt mit der Zentrengeraden g bestimmt und bei diesem die Kote aufsucht.

Wir sehen hieraus, daß die Zentrengerade als *Höhenskala* verwendet werden kann.

Zur Bestimmung der Kote des Punktes P gibt es auch noch andere Höhenskalen; jede durch das Zentrum gelegte Gerade kann zu einer Höhenskala gemacht werden; im gegebenen Falle handelt es sich darum, von den unendlich vielen, theoretisch möglichen Höhenmaßstäben einen praktischen auszuwählen, womöglich so, daß er für die Höhenbestimmung benutzt werden kann.

Die jeweilige Bilddistanz und der Visierstrahl, also f_1, S_1 und f_2, S_2, bestimmen als zwei sich im Zentrum C_1, bzw. C_2 schneidende gerade Linien eine Ebene; die Bilddistanzen f_1 und f_2 sind von Hause aus gegeben, ihre Lageverhältnisse bekannt, und sie können daher graduiert werden. Wir können nun, analog, wie vorher die Zentrengerade g, jetzt die graduierten Bilddistanzen als Höhenskalen verwerten, indem wir in den Ebenen $f_1 S_1$ und $f_2 S_2$ Spurparallele suchen. Die Koten von p_1' und p_2' können am Böschungsmaßstabe der Bildebenen M_1 und M_2 unmittelbar abgelesen werden; nun sucht man diese Kote auf der graduierten Bilddistanz, verbindet diese Punkte mit p_1' und p_2' und legt zu diesen Geraden durch die Situation P' Parallele bis zum Schnitte mit den graduierten Bilddistanzen, an welchen Stellen die Koten von P direkt abgelesen werden können. Die erhaltenen Koten müssen naturgemäß einander gleich sein.

Die Bestimmung der relativen Höhen h_1 und h_2 des Raumpunktes P über den Horizonten von C_1 und C_2 bestimmt sich nach dem folgenden Verfahren äußerst einfach.

Die Strecken $\overline{(p_1)p_1''} = \mathfrak{h}_1$ und $\overline{(p_2)p_2''} = \mathfrak{h}_2$ stellen die Höhen der Bildpunkte p_1 und p_2 über den Horizontalebenen von C_1 und C_2 dar; denkt man sich P auf die zwei Hauptvertikalebenen der beiden Zentren orthogonal projiziert und dann die Umlegungen in die Horizontalebene durchgeführt, so erhält man die Punkte P_1 und P_2; ihre Abstände von den Orientierungslinien $\overline{M_1 q} = h_1$ und $\overline{M_2 r} = h_2$ geben unmittelbar die gesuchten relativen Höhen, die abgegriffen und auf dem beigegebenen Maßstabe abgelesen werden können.

Dieses Verfahren der konstruktiven Bestimmung der Höhen läßt an Einfachheit wohl nichts zu wünschen übrig.

Bei vertikaler Lage der Bildebene vereinfachen sich alle Konstruktionen bedeutend. Da die Vertikalwinkel der Bilddistanz $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ sind, so werden die Abszissen x_1 und x_2 der Bildpunkte mit Berücksichtigung ihres Vorzeichens unmittelbar auf den Bildspuren $T_1 T_1$ und $T_2 T_2$ von den Hauptpunkten Ω_1 und Ω_2 aus aufgetragen und wird im Schnitte der Verbindungslinien $\overline{C_1 p_1'}$ und $\overline{C_2 p_2'}$ unmittelbar die Situation P' erhalten.

Die Höhe des Punktes P ergibt sich nach Ermittelung der Koten der Bildpunkte p_1 und p_2 dadurch, daß man auf der graduierten Zentrengeraden die Koten dieser Bildpunkte m und n aufsucht und diese Punkte mit p_1' und p_2' verbindet; es muß $\overline{p_1' m} \parallel \overline{p_2' n}$ sein und die durch P' zu diesen Geraden gezogene Parallele trifft die Höhenskala (Zentrengerade) bei p, wo die Kote von P abgelesen wird.

Die bei der geneigten Lage der Bildebene zuletzt angegebene Methode der Bestimmung der relativen Höhen wird hier besonders einfach. Konform mit der früheren Konstruktion wird y_1 von Ω_1 und y_2 von Ω_2 auf den Bildspuren $T_1 T_1$ und $T_2 T_2$ aufgetragen, die erhaltenen Punkte $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ werden mit C_1 und C_2 verbunden und durch die Situation P' auf die Orientierungslinien $C_1 O$ und $C_2 O$ Normale gefällt und diese mit den verlängerten Geraden $C_1 \mathfrak{p}_1$ und $C_2 \mathfrak{p}_2$ in M_1 und M_2 zum Schnitte gebracht; die Strecken $M_1 q$ und $M_2 r$ geben, am Horizontalmaßstabe abgenommen, unmittelbar die relativen Höhen h_1 und h_2. Die Differenz dieser Höhen muß konstant und gleich dem Höhenunterschiede der Horizonte der beiden Zentren sein.

Die äußerst durchsichtige Konstruktion für die Identität der Bildpunkte zufolge der Hauckschen Beziehung ist aus dem unteren Teile der Figur auf Tafel II, die im Aufrisse ausgeführt ist, in Verbindung mit der horizontalen Projektion bequem zu verfolgen.

V.

Fehleruntersuchungen.

Die rechtwinkligen Koordinaten eines aus zwei Standpunkten auf photogrammetrischem Wege festgelegten Raumpunktes erscheinen, wie aus den Gleichungen I—IV im Abschnitt II ersichtlich ist, als Funktionen der linearen Größen b, h, welche die gegenseitige Lage der perspektivischen Zentren festlegen, und der Winkel ω_1, ω_2, welche die Bildebene im Raume orientieren, ferner der Horizontal- und Vertikalwinkel α_1, α_2 und β_1, β_2, welche die Richtung der Visierstrahlen nach dem Raumpunkte kennzeichnen.

Man hat allgemein:

$$
(1)\left\{\begin{array}{l}
x = F_1'(b, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) = F_1''(h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\
y = F_2'(b, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2) = F_2''(h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\
z = F_3'(b, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1) = F_3''(h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\
\text{weiter} \\
x = F_1'''(b, h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = F_1''''(b, h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\
y = F_2'''(b, h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = F_2''''(b, h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \\
z = F_3'''(b, h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) = F_3''''(b, h, \omega_1, \omega_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2).
\end{array}\right.
$$

Werden die Winkel α und β durch die Bildweiten der photogrammetrischen Apparate f_1 und f_2, sowie durch die Plattenkoordinaten ausgedrückt, so werden die Koordinaten des Raumpunktes nach den Gleichungen I'—IV' im Abschnitte II als Funktionen der Größen b, h, $\omega_1, \omega_2, f_1, f_2$ und x_1, x_2, y_1, y_2 auftreten.

Es wird dann:

$$
(2)\left\{\begin{array}{l}
x = {}'F_1(b, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, x_1, x_2) = {}''F_1(h, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, x_1, x_2, y_1, y_2) \\
y = {}'F_2(b, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, x_1, x_2) = {}''F_2(h, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, x_1, x_2, y_1, y_2) \\
z = {}'F_3(b, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, x_1, x_2) = {}''F_3(h, \omega_1, \omega_2, f_1, f_2, x_1, x_2, y_1, y_2) \\
\text{ferner} \\
x = {}'''F_1(b,h,\omega_1,\omega_2,f_1,f_2,x_1,x_2,y_1,y_2) = {}''''F_1(b,h,\omega_1,\omega_2,f_1,f_2,x_1,x_2,y_1,y_2) \\
y = {}'''F_2(b,h,\omega_1,\omega_2,f_1,f_2,x_1,x_2,y_1,y_2) = {}''''F_2(b,h,\omega_1,\omega_2,f_1,f_2,x_1,x_2,y_1,y_2) \\
z = {}'''F_3(b,h,\omega_1,\omega_2,f_1,f_2,x_1,x_2,y_1,y_2) = {}''''F_3(b,h,\omega_1,\omega_2,f_1,f_2,x_1,x_2,y_1,y_2).
\end{array}\right.
$$

Sind die Argumente der vorstehenden Funktionen mit Fehlern behaftet, so können neben den *Partialfehlern*, welche die einzelnen Fehler bedingen, auch noch die *Totalfehler* berechnet werden, welche in erster Reihe interessieren werden.

Die *totalen Änderungen* in den Koordinaten werden, die allgemeinste Form der Funktion nach Gleichung (1) vorausgesetzt, sein:

$$
(3)\begin{cases}
\Delta x = \frac{\partial x}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial x}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial x}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial x}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 \\
\qquad + \frac{\partial x}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2 \\
\Delta y = \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial y}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial y}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial y}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 \\
\qquad + \frac{\partial y}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{\partial y}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2 \\
\Delta z = \frac{\partial z}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial z}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial z}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial z}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2 \\
\qquad + \frac{\partial z}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{\partial z}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2 .
\end{cases}
$$

Berücksichtigt man das unbestimmte Vorzeichen der *mittleren Fehler* der Argumente, so muß man zur Bestimmung des *mittleren Fehlers* der Funktion die Sätze der Methode der kleinsten Quadrate heranziehen, wodurch erhalten wird:

$$
(4)\begin{cases}
\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2\right)^2} \\
\Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2\right)^2} \\
\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial h}\Delta h\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta_1}\Delta\beta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta_2}\Delta\beta_2\right)^2}
\end{cases}
$$

Die *totalen Fehler* nehmen eine andere Form an, wenn den rechtwinkligen Koordinaten die Gleichungen (2) zugrunde liegen; es folgt dann:

$$
(5)\begin{cases}
\Delta x = \frac{\partial x}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial x}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial x}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial x}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial x}{\partial f_1}\Delta f_1 + \frac{\partial x}{\partial f_2}\Delta f_2 \\
\qquad + \frac{\partial x}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial x}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2}\Delta y_2 \\
\Delta y = \frac{\partial y}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial y}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial y}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial y}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial y}{\partial f_1}\Delta f_1 + \frac{\partial y}{\partial f_2}\Delta f_2 \\
\qquad + \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial y}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial y}{\partial y_2}\Delta y_2 \\
\Delta z = \frac{\partial z}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial z}{\partial h}\Delta h + \frac{\partial z}{\partial \omega_1}\Delta\omega_1 + \frac{\partial z}{\partial \omega_2}\Delta\omega_2 + \frac{\partial z}{\partial f_1}\Delta f_1 + \frac{\partial z}{\partial f_2}\Delta f_2 \\
\qquad + \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial z}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial z}{\partial y_2}\Delta y_2 .
\end{cases}
$$

und die *mittleren Fehler* der Raumkoordinaten bestimmen sich mit:

$$(6)\begin{cases} \Delta x = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial x}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial h}\Delta h\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \omega_1}\Delta \omega_1\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \omega_2}\Delta \omega_2\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial f_1}\Delta f_1\right)^2\\ &+\left(\frac{\partial x}{\partial f_2}\Delta f_2\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2\end{aligned}} \\ \Delta y = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial y}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial h}\Delta h\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega_1}\Delta \omega_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega_2}\Delta \omega_2\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial f_1}\Delta f_1\right)^2\\ &+\left(\frac{\partial y}{\partial f_2}\Delta f_2\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2\end{aligned}} \\ \Delta z = \sqrt{\begin{aligned}&\left(\frac{\partial z}{\partial b}\Delta b\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial h}\Delta h\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \omega_1}\Delta \omega_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \omega_2}\Delta \omega_2\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial f_1}\Delta f_1\right)^2\\ &+\left(\frac{\partial z}{\partial f_2}\Delta f_2\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2.\end{aligned}} \end{cases}$$

In den meisten Fällen werden die Größen b und h zur Festlegung der Zentren genau bekannt sein, ebenso auch die Bildweiten der photogrammetrischen Apparate, welche perspektivische Konstante mit großer Sorgfalt auf Grund der schärfsten Methoden ermittelt werden müssen, und auch die Orientierungswinkel sind mit Schärfe gemessen, so zwar, daß die Fehlereinflüsse dieser Größen gegenüber jenen, welche durch die Fehler in den Plattenkoordinaten bedingt werden, vernachlässigt und

$$\Delta b = \Delta h = \Delta \omega_1 = \Delta \omega_2 = \Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$$

gesetzt werden kann; die aufgestellten Gleichungen (3)—(6) nehmen dann die Form an:

$$(7)\begin{cases} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\Delta \alpha_1 + \frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\Delta \alpha_2 + \frac{\partial x}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1 + \frac{\partial x}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2 \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\Delta \alpha_1 + \frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\Delta \alpha_2 + \frac{\partial y}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1 + \frac{\partial y}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2 \\ \Delta z = \frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\Delta \alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\Delta \alpha_2 + \frac{\partial z}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1 + \frac{\partial z}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2 \\ \Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}\Delta \alpha_1\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}\Delta \alpha_2\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2\right)^2} \\ \Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_1}\Delta \alpha_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha_2}\Delta \alpha_2\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2\right)^2} \\ \Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\Delta \alpha_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_2}\Delta \alpha_2\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta_1}\Delta \beta_1\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \beta_2}\Delta \beta_2\right)^2}. \end{cases}$$

und weiter:

$$(8)\quad \begin{cases} \Delta x = \frac{\partial x}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial x}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial x}{\partial y_2}\Delta y_2 \\ \Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial y}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial y}{\partial y_2}\Delta y_2 \\ \Delta z = \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \frac{\partial z}{\partial y_1}\Delta y_1 + \frac{\partial z}{\partial y_2}\Delta y_2 \\ \Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2} \\ \Delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2} \\ \Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_1}\Delta y_1\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y_2}\Delta y_2\right)^2}. \end{cases}$$

Nachfolgend werden die Fehlerausdrücke für die Raumkoordinaten zusammengestellt, wobei die gesamte Berechnung nur für die erste Abszisse ausgeführt wurde, während weiter alle umfassenden Nebenrechnungen weggelassen werden und nur die Resultate angesetzt erscheinen.

Um die Ausdrücke für die Partial- und Totalfehler übersichtlicher zu gestalten, führen wir nachstehende Abkürzungen ein und zwar:

$$(9)\quad \begin{cases} \sin(\omega_1 + \alpha_1) = \sin(1) \\ \cos(\omega_1 + \alpha_1) = \cos(1) \\ \sin[(\omega_2 + \alpha_2) - (\omega_1 + \alpha_1)] = \sin(2-1) \end{cases}$$

ferner

$$(10)\quad \begin{cases} A = \sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 + \sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 \\ B = \cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 + \cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 \\ C = b\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - h\cos(1) \\ D = b\,\mathrm{tg}\,\beta_2 + h\cos(2) \\ E = \mathrm{tg}\,\beta_2 + \sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 \\ F = \mathrm{tg}\,\beta_2 + \cos(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 \\ G = \mathrm{tg}\,\beta_1 + \cos(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2. \end{cases}$$

Benützen wir die Formeln (I) des Abschnittes II, nämlich:

$$(11)\quad \begin{cases} x = \frac{\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)}{\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\,b = \frac{\cos(1)\sin(2)}{\sin(2-1)}\,b \\ y = \frac{\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)}{\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\,b = \frac{\sin(1)\sin(2)}{\sin(2-1)}\,b \\ z = \frac{\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\,b = \frac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin(2-1)}\,b, \end{cases}$$

so rechnen sich die partiellen Einflüsse der Abszisse mit:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\sin 2\,(\omega_2+\alpha_2)}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]} = \dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{\operatorname{cotg}(\omega_2+\alpha_2)}{\cos^2(\omega_1+\alpha_2)} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_2} = -\dfrac{b}{2}\,\dfrac{\sin 2\,(\omega_1+\alpha_1)}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]} = -\dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{\operatorname{tg}(\omega_1+\alpha_1)}{\sin^2(\omega_2+\alpha_2)} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \beta_1} = \dfrac{\partial x}{\partial \beta_2} = 0 \end{cases}$$

oder nach Einführung der vereinfachten Symbole:

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\sin 2\,(2)}{\sin^2(2-1)} = \dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{\operatorname{cotg}(2)}{\cos^2(1)} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} = -\dfrac{b}{2}\,\dfrac{\sin 2\,(1)}{\sin^2(2-1)} = -\dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{\operatorname{tg}(1)}{\sin^2(2)} \\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial \beta_1} = \dfrac{\partial x}{\partial \beta_2} = 0; \end{cases}$$

der *Totaleinfluß* in der Abszisse wird sein:

$$(\mathrm{I}_x)\quad \begin{cases} \Delta x = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{1}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\left[\sin 2(\omega_2+\alpha_2)\Delta\alpha_1 - \sin 2(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2\right] \\[2ex] \quad = \dfrac{x^2}{b}\left[\dfrac{\operatorname{cotg}(\omega_2+\alpha_2)}{\cos^2(\omega_1+\alpha_1)}\Delta\alpha_1 - \dfrac{\operatorname{tg}(\omega_1+\alpha_1)}{\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}\Delta\alpha_2\right] \\[2ex] \quad = \dfrac{x^2}{2b}\,\dfrac{\sin 2\,(\omega_2+\alpha_2)\Delta\alpha_1 - \sin 2(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2}{\cos^2(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)} \\[2ex] \text{oder} \\[1ex] \Delta x = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{\sin 2\,(2)\Delta\alpha_1 - \sin 2\,(1)\Delta\alpha_2}{\sin^2(2-1)} \\[2ex] \quad = \dfrac{x^2}{b}\left[\dfrac{\operatorname{cotg}(2)}{\cos^2(1)}\Delta\alpha_1 - \dfrac{\operatorname{tg}(1)}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2\right] \\[2ex] \quad = \dfrac{x^2}{2b}\,\dfrac{\sin 2\,(2)\Delta\alpha_1 - \sin 2\,(1)\Delta\alpha_2}{\cos^2(1)\sin^2(2)} \end{cases}$$

und der *relative Fehler* mit Verwendung der einfachen Symbole:

$$(\mathrm{I}_x)\quad \begin{cases} \dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{x}{b}\left[\dfrac{\operatorname{cotg}(2)}{\cos^2(1)}\Delta\alpha_1 - \dfrac{\operatorname{tg}(1)}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2\right] \\[2ex] \quad = \dfrac{x}{2b}\,\dfrac{\sin 2\,(2)\Delta\alpha_1 - \sin 2\,(1)\Delta\alpha_2}{\cos^2(1)\sin^2(2)}. \end{cases}$$

Für *die mittleren Fehler* der Abszisse wird erhalten und zwar vorerst für den *absoluten Fehler:*

$$(_{II}\mathrm{I}_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{1}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]} \\ \qquad \sqrt{[\sin 2(\omega_2+\alpha_2)\Delta\alpha_1]^2+[\sin 2(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2]^2} \\ \quad = \dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{1}{\cos^2(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)} \\ \qquad \sqrt{[\sin 2(\omega_2+\alpha_2)\Delta\alpha_1]^2+[\sin 2(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2]^2} \\ \quad = \dfrac{b}{2}\,\dfrac{1}{\sin^2(2-1)}\sqrt{[\sin 2(2)\Delta\alpha_1]^2+[\sin 2(1)\Delta\alpha_2]^2} \\ \quad = \dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{2}{\cos^2(1)\sin^2(2)}\sqrt{[\sin(2)\cos(2)\Delta\alpha_1]^2+[\sin(1)\cos(1)\Delta\alpha_2]^2} \end{cases}$$

und dann für den *relativen Fehler:*

$$(_{III}\mathrm{I}_x)\begin{cases} \dfrac{\Delta x}{x}=\dfrac{x}{b\cos^2(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}\sqrt{[\sin 2(\omega_2+\alpha_2)\Delta\alpha_1]^2+[\sin 2(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2]^2} \\ \quad =\dfrac{2x}{b\cos^2(1)\sin^2(2)}\sqrt{[\sin(2)\cos(2)\Delta\alpha_1]^2+[\sin(1)\cos(1)\Delta\alpha_2]^2}. \end{cases}$$

Wird in analoger Weise bei der Bestimmung der Koordinatenfehler von y und z vorgegangen, so ergeben sich als *absolute Fehler:*

$$(\mathrm{I}_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{b}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}[-\sin^2(\omega_2+\alpha_2)\Delta\alpha_1+\sin^2(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2] \\ \quad = \dfrac{y^2}{b}\left[-\dfrac{\Delta\alpha_1}{\sin^2(\omega_1+\alpha_1)}+\dfrac{\Delta\alpha_2}{\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}\right] \\ \quad = \dfrac{b}{\sin^2(2-1)}[-\sin^2(2)\Delta\alpha_1+\sin^2(1)\Delta\alpha_2] \\ \quad = \dfrac{y^2}{b}\left[-\dfrac{\Delta\alpha_1}{\sin^2(1)}+\dfrac{\Delta\alpha_2}{\sin^2(2)}\right] \end{cases}$$

oder

$$(\mathrm{I}_z)\begin{cases} \Delta z=\dfrac{b\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\Big[\sin(\omega_2+\alpha_2)\cos[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]\Delta\alpha_1 \\ \qquad -\sin(\omega_1+\alpha_1)\Delta\alpha_2+\dfrac{\sin(\omega_2+\alpha_2)\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}{\sin\beta_1}\Delta\beta_1\Big] \\ \quad = z\Big[\mathrm{cotg}[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]\Delta\alpha_1 \\ \qquad -\dfrac{\sin(\omega_1+\alpha_1)}{\sin(\omega_2+\alpha_2)\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\Delta\alpha_2+\dfrac{2}{\sin 2\beta_1}\Delta\beta_1\Big] \\ \quad = \dfrac{b\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2(2-1)}\sin(2)\cos(2-1)\Delta\alpha_1-\sin(1)\Delta\alpha_2+\dfrac{\sin(2)\sin(2-1)}{\sin\beta_1}\Delta\beta_1\Big] \\ \quad = z\left[\mathrm{cotg}(2-1)\Delta\alpha_1-\dfrac{\sin(1)}{\sin(2)\sin(2-1)}\Delta\alpha_2+\dfrac{2}{\sin 2\beta_1}\Delta\beta_1\right]. \end{cases}$$

Die *relativen Fehler* ergeben sich nach Division der vorstehenden Ausdrücke für absolute Fehler durch die zugehörigen Koordinaten.

Für *die mittleren absoluten Fehler* ergeben sich mit Heranziehung der vereinfachten Symbole:

$$(_{\prime\prime}\mathrm{I}_y)\quad \left\{\begin{aligned} \varDelta y &= \frac{b}{\sin^2(2-1)}\sqrt{[-\sin^2(2)\varDelta\alpha_1]^2+[\sin^2(1)\varDelta\alpha_2)^2} \\ &= \frac{y^2}{b}\sqrt{\left[\frac{\varDelta\alpha_1}{\sin^2(1)}\right]^2+\left[\frac{\varDelta\alpha_2}{\sin^2(2)}\varDelta\right]^2} \end{aligned}\right.$$

$$(_{\prime\prime}\mathrm{I}_z)\left\{\begin{aligned} \varDelta z &= \frac{b\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin^2(2-1)}\sqrt{[\sin(2)\cos(2-1)\varDelta\alpha_1]^2+[\sin(1)\varDelta\alpha_2]^2+\left[\frac{\sin(2)\sin(2-1)}{\sin\beta_1}\varDelta\beta_1\right]^2} \\ &= z\sqrt{[\mathrm{cotg}\,(2-1)\varDelta\alpha_1]^2+\left[\frac{\sin(1)\varDelta\alpha_2}{\sin(2)\sin(2-1)}\right]^2+\left[\frac{2\varDelta\beta_1}{\sin 2\beta_1}\right]^2}. \end{aligned}\right.$$

Bei Heranziehung der Gleichungen II, III und IV des II. Abschnittes erhält man für die absoluten Fehler der Raumkoordinaten und zwar bei Benutzung der Formel II:

$$(\mathrm{II}_x)\left\{\begin{aligned} \varDelta x &= \left\{\begin{aligned} &-h\frac{\sin(\omega_2+\alpha_2)[\mathrm{tg}\,\beta_2+\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]}{[\sin(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2+\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]^2}\varDelta\alpha_1 \\ &+h\frac{\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_1+\alpha_1)\cos(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{[\sin(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2+\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]^2}\varDelta\alpha_2 \\ &-h\frac{\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}{\cos^2\beta_1[\sin(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2+\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]^2}\varDelta\beta_1 \\ &-h\frac{\sin(\omega_1+\alpha_1)\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)}{\cos^2\beta_2[\sin(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2+\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]^2}\varDelta\beta_2 \end{aligned}\right\} \\ \varDelta x &= \left\{\begin{aligned} &-\frac{x^2}{h}\frac{\mathrm{tg}\,\beta_2+\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2(\omega_1+\alpha_1)\sin(\omega_2+\alpha_2)}\varDelta\alpha_1 \\ &+\frac{x^2}{n}\frac{\sin(\omega_1+\alpha_1)\cos(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}\varDelta\alpha_2 \\ &-\frac{x^2}{h}\frac{1}{\cos(\omega_1+\alpha_1)\cos^2\beta_1}\varDelta\beta_1-\frac{x^2}{h}\frac{\mathrm{tg}\,(\omega_1+\alpha_1)}{\sin(\omega_2+\alpha_2)\cos^2\beta_2}\varDelta\beta_2 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right.$$

oder

$$(\mathrm{II}_x)\left\{\begin{aligned} \varDelta x &= \frac{h}{A^2}\left\{\begin{aligned} &-E\sin(2)\varDelta\alpha_1+\cos(1)\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2\varDelta\alpha_2 \\ &-\frac{\cos(1)\sin^2(2)}{\cos^2\beta_1}\varDelta\beta_1-\frac{\sin(1)\cos(1)\sin(2)}{\cos^2\beta_2}\varDelta\beta_2 \end{aligned}\right\} \\ &= \frac{x^2}{h\cos(1)}\left\{\begin{aligned} &-E\varDelta\alpha_1+\frac{\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2(2)}\varDelta\alpha_2 \\ &-\frac{\varDelta\beta_1}{\cos^2\beta_1}-\frac{\sin(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\varDelta\beta_2 \end{aligned}\right\} \end{aligned}\right.$$

als absoluten Abszissenfehler; jener in der Ordinate ist:

$$(\mathrm{II}_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{h}{[\sin(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 + \sin(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1]^2} \left\{\begin{aligned} &-\cos(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\Delta\alpha_1 \\ &-\cos(\omega_2+\alpha_2)\sin^2(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2 \\ &+\frac{\sin(\omega_1+\alpha_1)\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{\sin(\omega_2+\alpha_2)\sin^2(\omega_1+\alpha_1)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \\ \Delta y = \dfrac{x^2}{h}\left\{\begin{aligned} &-\frac{\cos(\omega_1+\alpha_1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin^2(\omega_1+\alpha_1)}\Delta\alpha_1 - \frac{\cos(\omega_2+\alpha_2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2(\omega_2+\alpha_2)}\Delta\alpha_2 \\ &+\frac{1}{\sin(\omega_1+\alpha_1)\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1 - \frac{1}{\sin(\omega_2+\alpha_2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

oder

$$(\mathrm{II}_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{h}{A^2}\left\{\begin{aligned} &-\cos(1)\sin^2(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\Delta\alpha_1 - \cos(2)\sin^2(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2 \\ &+\frac{\sin(1)\sin^2(2)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{\sin(2)\sin^2(1)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{h}\left\{\begin{aligned} &-\frac{\cos(1)}{\sin^2(1)}\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\Delta\alpha_1 - \frac{\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2 \\ &+\frac{1}{\sin(1)\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1 + \frac{1}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

und für die z-Koordinaten folgt:

$$(\mathrm{II}_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{h}{A^2}\left\{\begin{aligned} &-\cos(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_1 + \sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2 \\ &+\frac{\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1 - \frac{\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \\ \Delta z = \dfrac{z^2}{h\sin(2)}\left\{\begin{aligned} &-\frac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\mathrm{tg}\,\beta_1}\Delta\alpha_1 + \frac{\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}\Delta\alpha_2 \\ &+\frac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2\beta_1}\Delta\beta_1 - \frac{\sin(1)}{\mathrm{tg}\,\beta_1\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Die *mittleren Raumkoordinatenfehler* nehmen bei Benutzung der vereinfachten Symbole die Form an:

$$({}_\mu\mathrm{II}_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{h}{A^2}\sqrt{\begin{aligned} &[E\sin(2)\Delta\alpha_1]^2 + [\sin(1)\cos(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2]^2 \\ &+\left[\frac{\cos(1)\sin^2(2)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2 + \left[\frac{\sin(1)\cos(1)\sin(2)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2 \end{aligned}} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{h\cos(1)}\sqrt{\begin{aligned} &\left[\frac{E}{\cos(1)\sin(2)}\Delta\alpha_1\right]^2 + \left[\frac{\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2\right]^2 \\ &\left[\frac{\Delta\beta_1}{\cos^2\beta_1}\right]^2 + \left[\frac{\sin(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2 \end{aligned}} \end{cases}$$

$$(„II_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{h}{A^2}\sqrt{\begin{gathered}[\cos(1)\sin^2(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\Delta\alpha_1]^2+[\cos(2)\sin^2(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2\Delta\alpha_2]^2\\ \left[\dfrac{\sin(1)\sin^2(2)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2+\left[\dfrac{\sin(2)\sin^2(1)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{gathered}} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{h}\sqrt{\begin{gathered}\left[\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin^2(1)}\Delta\alpha_1\right]^2+\left[\dfrac{\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2\right]^2\\ \left[\dfrac{1}{\sin(1)\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2+\left[\dfrac{2}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{gathered}} \end{cases}$$

$$(„II_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{h}{A^2}\sqrt{\begin{gathered}[\cos(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\Delta\alpha_1]^2+[\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\Delta\alpha_2]^2\\ +\left[\dfrac{\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2+\left[\dfrac{\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{gathered}} \\ \Delta z = \dfrac{z^2}{h\sin(2)}\sqrt{\begin{gathered}\left[\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\mathrm{tg}\,\beta_1}\Delta\alpha_1\right]^2+\left[\dfrac{\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}\Delta\alpha_2\right]^2\\ +\left[\dfrac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2+\left[\dfrac{\sin(1)}{\mathrm{tg}\,\beta_1\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2.\end{gathered}} \end{cases}$$

Die Formeln (III) für die Raumkoordinaten liefern die Fehlergleichungen:

$$(III_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{B^2}\left\{\begin{aligned}&-\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 D\Delta\alpha_1+\cos(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 C\Delta\alpha_2\\ &-\dfrac{\cos(1)\cos(2)}{\cos^2\beta_1}D\Delta\beta_1+\dfrac{\cos(1)\cos(2)}{\cos^2\beta_2}D\Delta\beta_2\end{aligned}\right\} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{D^2}\left\{\begin{aligned}&-\dfrac{\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2(1)}D\Delta\alpha_1+\dfrac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos^2(1)}C\Delta\alpha_2\\ &-\dfrac{\cos(2)}{\cos(1)\cos^2\beta_1}D\Delta\beta_1+\dfrac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos(1)}C\Delta\beta_2\end{aligned}\right\} \end{cases}$$

$$(III_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{B^2}\left\{\begin{aligned}&-DF\Delta\alpha_1-\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2 C\Delta\alpha_2\\ &+\dfrac{\sin(1)\cos(2)}{\cos^2\beta_1}D\Delta\beta_1-\dfrac{\sin(1)\cos(2)}{\cos^2\beta_2}C\Delta\beta_2\end{aligned}\right\} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{D^2}\left\{\begin{aligned}&-\dfrac{1}{\sin^2(1)}DF\Delta\alpha_1-\dfrac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin(1)}C\Delta\alpha_2\\ &+\dfrac{\cos(2)}{\sin(1)\cos^2\beta_1}D\Delta\beta_1-\dfrac{\cos(2)}{\sin(1)\cos^2\beta_2}C\Delta\beta_2\end{aligned}\right\} \end{cases}$$

$$(III_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{1}{B^2}\left\{\begin{aligned}&\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2 D\Delta\alpha_1+\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2 C\Delta\alpha_2\\ &\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos^2\beta_1}D\Delta\beta_1+\dfrac{\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_2}C\Delta\beta_2\end{aligned}\right\} \\ \Delta z = \dfrac{z^2}{D^2}\left\{\begin{aligned}&\dfrac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\mathrm{tg}\,\beta_1}D\Delta\alpha_1+\dfrac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\mathrm{tg}\,\beta_1}C\Delta\alpha_2\\ &\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2\beta_1}D\Delta\beta_1+\dfrac{\cos(2)}{\cos^2\beta_2\,\mathrm{tg}\,\beta_1}C\Delta\beta_2.\end{aligned}\right\} \end{cases}$$

Die *mittleren Fehler* der Raumkoordinaten lauten:

$$(„\mathrm{III}_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{B^2}\sqrt{\begin{array}{l}[D\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_1]^2+[C\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2]^2\\ \left[D\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1\right]^2+\left[C\dfrac{\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\right]^2\end{array}} \\[2ex] \Delta x = \dfrac{x^2}{D^2}\sqrt{\begin{array}{l}\left[D\dfrac{\sin(1)\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2(1)}\,\Delta\alpha_1\right]^2+\left[C\dfrac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos(1)}\,\Delta\alpha_2\right]^2\\ \left[D\dfrac{\cos(2)}{\cos(1)\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1\right]^2+\left[C\dfrac{\cos(2)}{\cos(1)\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\right]^2\end{array}}\end{cases}$$

$$(„\mathrm{III}_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{B^2}\sqrt{\begin{array}{l}[DF\Delta\alpha_1]^2+[C\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2]^2\\ \left[D\dfrac{\sin(1)\cos(2)}{\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1\right]^2+\left[C\dfrac{\sin(1)\cos(2)}{\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\right]^2\end{array}} \\[2ex] \Delta y = \dfrac{y^2}{D^2}\sqrt{\begin{array}{l}\left[\dfrac{DF}{\sin^2(1)}\,\Delta\alpha_1\right]^2+\left[C\dfrac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin(1)}\,\Delta\alpha_2\right]^2\\ \left[D\dfrac{\cos(2)}{\sin(1)\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1\right]^2+\left[C\dfrac{\cos(2)}{\sin(1)\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\right]^2\end{array}}\end{cases}$$

$$(„\mathrm{III}_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{1}{B^2}\sqrt{\begin{array}{l}[D\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_1]^2+[C\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\mathrm{tg}\,\beta_2\,\Delta\alpha_2]^2\\ +\left[D\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1\right]^2+\left[C\dfrac{\cos(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\right]^2\end{array}} \\[2ex] \Delta z = \dfrac{z^2}{D^2}\sqrt{\begin{array}{l}\left[D\dfrac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\mathrm{tg}\,\beta_1}\,\Delta\alpha_1\right]^2+\left[C\dfrac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\mathrm{tg}\,\beta_1}\,\Delta\alpha_2\right]^2\\ \left[D\dfrac{\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_2}{\sin^2\beta_1}\,\Delta\beta_1\right]^2+\left[C\dfrac{\cos(2)}{\cos^2\beta_2\,\mathrm{tg}\,\beta_1}\,\Delta\beta_2\right]^2\end{array}}.\end{cases}$$

Die Gleichungen (IV) des II. Abschnittes geben für die *absoluten Fehler* der Raumkoordinaten:

$$(\mathrm{IV}_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{B^2}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\sin(2)}{\sin^2(1)}\,[D\sin^2(1)\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1-CB]\,\Delta\alpha_1-\dfrac{CG}{\mathrm{tg}\,\beta_1}\,\Delta\alpha_2\\ -D\dfrac{\cos(1)\sin(2)}{\mathrm{tg}(2)\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1+C\dfrac{\cos(1)\sin(2)}{\mathrm{tg}(1)\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\end{array}\right\} \\[2ex] \Delta x = \dfrac{x^2}{C^2}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{D\sin^2(1)\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1-CB}{\cos^2(1)\sin(2)}\,\Delta\alpha_1-CG\dfrac{\mathrm{tg}(1)}{\sin^2(1)}\,\Delta\alpha_2\\ -D\dfrac{\sin(1)}{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}\,\Delta\beta_1+C\dfrac{\sin(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\end{array}\right\}\end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{B_2}\left\{\begin{array}{l}D\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\Delta\alpha_1+CG\,\Delta\alpha_2\\ +D\dfrac{\sin(2)\cos(1)}{\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_1-C\dfrac{\cos(1)\sin(2)}{\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\end{array}\right. \\[2ex] \Delta y = \dfrac{y^2}{C^2}\left\{\begin{array}{l}D\dfrac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin(2)}\,\Delta\alpha_1+CG\dfrac{1}{\sin^2(2)}\,\Delta\alpha_2\\ +D\dfrac{\cos(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_1}\,\Delta\beta_1-C\dfrac{\cos(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\,\Delta\beta_2\end{array}\right.\end{cases}$$

$$
(\mathrm{IV}_z)\begin{cases}
\Delta z = \frac{1}{B^2}\left\{\begin{array}{l} -\frac{\sin(9)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin^2(1)}[D\sin^2(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - CB\cos(1)]\Delta\alpha_1 - CG\frac{\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin(1)}\Delta\alpha_2 \\ -\frac{\sin(2)}{\sin(1)\cos^2\beta_1}[BC + D\cos(1)]\Delta\beta_1 + C\frac{\mathrm{cotg}(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_2 \end{array}\right. \\
\Delta z = \frac{z^2}{C^2}\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}[D\sin^2(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - BC\cos(1)]\Delta\alpha_1 - CG\frac{\sin(1)}{\sin^2(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}\Delta\alpha_2 \\ -\frac{\sin(1)}{\sin(2)\sin^2\beta_1}[BC + D\cos(1)]\Delta\beta_1 + C\frac{\sin(1)\cos(1)}{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2 \end{array}\right.
\end{cases}
$$

Die *mittleren Fehler* der Raumkoordinaten berechnen sich mit:

$$
({}_{\prime\prime}\mathrm{IV}_x)\begin{cases}
\Delta x = \frac{1}{B}\sqrt{\begin{array}{l}[\sin(2)\cos(1)(D\sin^2(1)\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - BC)\Delta\alpha_1]^2 + [CG\,\Delta\alpha_2]^2 \\ + \left[D\frac{\cos(1)\sin(2)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2 + \left[C\frac{\cos(1)\sin(2)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{array}} \\
\Delta x = \frac{x^2}{C^2}\frac{1}{\sin(1)}\sqrt{\begin{array}{l}\left[\frac{D\sin^2(1)\cos(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - BC}{\cos(1)}\Delta\alpha_1\right]^2 + \left[CG\frac{\mathrm{tg}(1)}{\sin(2)}\Delta\alpha_2\right]^2 \\ + \left[D\frac{\sin(1)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2 + \left[C\frac{\sin(1)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{array}}
\end{cases}
$$

$$
({}_{\prime\prime}\mathrm{IV}_y)\begin{cases}
\Delta y = \frac{1}{B^2}\sqrt{\begin{array}{l}D\sin(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\Delta\alpha_1]^2 + [CG\,\Delta\alpha_2]^2 \\ + \left[D\frac{\sin(2)\cos(1)}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right]^2 + \left[C\frac{\cos(1)\sin(2)}{\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{array}} \\
\Delta y = \frac{y^2}{C^2}\sqrt{\begin{array}{l}\left[D\frac{\sin(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin(2)}\Delta\alpha_1\right]^2 + \left[CG\frac{1}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2\right]^2 \\ + \left[D\frac{\cos(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_1\right]^2 + C\frac{\cos(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\Big]^2\end{array}}
\end{cases}
$$

und

$$
({}_{\prime\prime}\mathrm{IV}_z)\begin{cases}
\Delta z = \frac{1}{B^2}\frac{1}{\sin(1)}\sqrt{\begin{array}{l}\left[\frac{\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\sin(1)}(D\sin^2(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - BC\cos(1)\Delta\alpha_1\right]^2 \\ + [CG\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1\,\Delta\alpha_2]^2 + \left[\frac{\sin(2)}{\cos^2\beta_1}BC + D\cos(1)\Delta\alpha_1\right]^2 \\ + \left[C\frac{\cos(1)\sin(2)\,\mathrm{tg}\,\beta_1}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_2\right]\end{array}} \\
\Delta z = \frac{z^2}{C^2}\frac{1}{\mathrm{tg}\,\beta_1}\sqrt{\begin{array}{l}\left[\frac{D\sin^2(1)\,\mathrm{tg}\,\beta_1 - BC\cos(1)}{\sin(2)}\Delta\alpha_1\right]^2 + \left[CG\frac{\sin(1)}{\sin^2(2)}\Delta\alpha_2\right]^2 \\ + \left[\frac{\sin(1)\,\mathrm{cotg}\,\beta_1}{\sin(2)}(BC + D\cos(1)\Delta\beta_1\right]^2 \\ + \left[C\frac{\sin(1)\cos(1)}{\sin(2)\cos^2\beta_2}\Delta\beta_2\right]^2\end{array}}
\end{cases}
$$

Rechnet man die Fehlerausdrücke für die Raumkoordinaten, welche durch die Gleichungen I′, II′ III′ und IV′ des II. Abschnittes gegeben sind, und in welchen die Bildweite und die Bildkoordinaten auftreten, so empfiehlt sich die Einführung nachstehender Symbole:

$$(14)\begin{cases} f_1 \cos\omega_1 - x_1 \sin\omega_1 = M \\ f_1 \sin\omega_2 + x_2 \cos\omega_2 = N \\ f_1 \sin\omega_1 + x_1 \cos\omega_1 = P \\ f_2 \cos\omega_2 - x_2 \sin\omega_2 = Q \\ (f_1 f_2 + x_1 x_2)\sin(\omega_2-\omega_1) + (x_2 f_1 - x_1 f_2)\cos(\omega_2-\omega_1) = R \\ y_2(f_1 \sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1) + y_1(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2) = y_2 N + y_2 P = S \\ y_2(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1) + y_1(f_1\cos\omega_2 - x_2\sin\omega_2) = y_2 M + y_1 Q = T \\ \dfrac{(f_1\cos\omega_1 - x_1\sin\omega_1)(f_2\sin\omega_2 + x_2\cos\omega_2)}{f_1\sin\omega_1 + x_1\cos\omega_1} = \dfrac{MN}{P} = U \\ by_1 - hM = V \\ by_2 + hQ = W. \end{cases}$$

Die Gleichungen I′ geben für die absoluten Fehler:

$$(\mathrm{I}'_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{b}{R^2}(QNf_1\Delta x_1 - PMf_2\,\Delta x_2) \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{1}{MN}\left(\dfrac{Q}{M}f_1\,\Delta x_1 - \dfrac{P}{N}f_2\,\Delta x_2\right) \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}'_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{b}{R^2}(-N^2 f_1\,\Delta x_1 + P^2 f_2\,\Delta x_2) \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{b}\left(-\dfrac{1}{P^2}f_2\,\Delta x_1 + \dfrac{1}{N^2}f_2\,\Delta x_2\right) \end{cases}$$

$$(\mathrm{I}'_z)\begin{cases} \Delta z - \dfrac{b}{R^2}\{N[f_2\cos(\omega_2-\omega_1) - x_2\sin(\omega_2-\omega_1)]y_1\,\Delta x_1 - Py_1 f_2\,\Delta x_2 + NR\,\Delta y_1\} \\ \Delta z = \dfrac{z}{R}\left\{[f_2\cos(\omega_2-\omega_1) - x_2\sin(\omega_2-\omega_1)]\,\Delta x_1 - \dfrac{P}{N}f_2\,\Delta x_2 + \dfrac{R}{y_1}\,\Delta y_1\right\}. \end{cases}$$

Die mittleren Fehler rechnen sich mit:

$$(\mathrm{I}^{(2)}_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{b}{R^2}\sqrt{(NQf_1\,\Delta x_1)^2 + (PMf_2\,\Delta x_2)^2} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{b}\,\dfrac{1}{MN}\sqrt{\left(\dfrac{Q}{M}f_1\,\Delta x_1\right)^2 + \left(\dfrac{P}{N}f_2\,\Delta x_2\right)^2} \end{cases}$$

ferner

$$(\mathrm{I}^{(2)}_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{b}{R^2}\sqrt{(N^2 f_1\,\Delta x_1)^2 + (P^2 f_2\,\Delta x_2)^2} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{b}\sqrt{\left(\dfrac{1}{P^2}f_1\,\Delta x_1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{N^2}f_2\,\Delta x_2\right)} \end{cases}$$

und endlich

$$(\mathrm{I}^{(2)}_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{b}{R^2}\sqrt{\{[f_2\cos(\omega_2-\omega_1) - x_2\sin(\omega_2-\omega_1)]\,\Delta x_1\}^2 + \left(\dfrac{P}{N}f_2\,\Delta x_2\right)^2 + \left(R\dfrac{1}{y_1}\,\Delta y_1\right)^2} \\ \Delta z = \dfrac{z}{R}\sqrt{\{[f_2\cos(\omega_2-\omega_1) - x_2\sin(\omega_2-\omega_1)]\,\Delta x_1\}^2 + \left(\dfrac{P}{N}f_2\,\Delta x_2\right)^2 + \left(R\dfrac{1}{y_1}\,\Delta y_1\right)^2} \end{cases}$$

Die Gleichungen II' geben als absolute Fehler in den Raumkoordinaten:

$$(\mathrm{II}'_x)\begin{cases}\Delta x = \dfrac{h}{S^2}\begin{Bmatrix}-N(y_2 f_1 + y_1 \sin\omega_1 N)\,\Delta x_1 + MPy_2\cos\omega_2\,\Delta x_2\\ -MN^2\,\Delta y_1 - MNP\,\Delta y_2\end{Bmatrix}\\ \Delta x = \dfrac{x^2}{h}\,\dfrac{1}{M^2N^2}\begin{Bmatrix}-N(y_2 f_1 + y_1 \sin\omega_1 N)\,\Delta x_1 + MPy\cos\omega_2\,\Delta x_2\\ -MN^2\,\Delta y_1 - MNP\,\Delta y_2\end{Bmatrix}\end{cases}$$

weiter

$$(\mathrm{II}'_y)\begin{cases}\Delta y = \dfrac{h}{S^2}\begin{Bmatrix}-N^2y_1\cos\omega_1\,\Delta x_1 - P^2y_2\cos\omega_2\,\Delta x_2\\ +N^2P\,\Delta y_1 + NP^2\,\Delta y_2\end{Bmatrix}\\ \Delta y = \dfrac{y^2}{h}\,\dfrac{1}{N^2P^2}\begin{Bmatrix}-N^2y_1\cos\omega_1\,\Delta x_1 - P_2y_2\cos\omega_2\,\Delta x_2\\ +N^2P\,\Delta y_1 + NP^2\,\Delta y_2\end{Bmatrix}\end{cases}$$

und

$$(\mathrm{II}'_z)\begin{cases}\Delta z = \dfrac{h}{S^2}\begin{Bmatrix}-Ny_1y_2\cos\omega_1\,\Delta x_1 + Py_1y_2\cos\omega_2\,\Delta x_2\\ +NPy_2\,\Delta y_1 - NPy_1\,\Delta y_2\end{Bmatrix}\\ \Delta z = \dfrac{z^2}{h}\,\dfrac{1}{N^2y_1}\begin{Bmatrix}-Ny_2\cos\omega_1\,\Delta x_1 + Py_2\cos\omega_2\,\Delta x_2\\ +NP\dfrac{y_2}{y_1}\,\Delta y_1 - NP\,\Delta y_2\end{Bmatrix}\end{cases}$$

Rechnet man die mittleren Fehler, so wird erhalten:

$$(\mathrm{II}''_x)\begin{cases}\Delta x = \dfrac{h}{S^2}\sqrt{\begin{matrix}[N(y_1f_1+Ny_1\sin\omega_1)\,\Delta x_1]^2 + [MPy_2\cos\omega_1\,\Delta x_2]^2\\ +[MN^2\,\Delta y_1]^2 + [MNP\,\Delta y_2]^2\end{matrix}}\\ \Delta x = \dfrac{x^2}{h}\,\dfrac{1}{M^2N^2}\sqrt{\begin{matrix}[N(y_2f_1+Ny_1\sin\omega_1)\,\Delta x_1]^2 + [MPy_2\cos\omega_2\,\Delta x_1]^2\\ +[MN^2\,\Delta y_1]^2 + [MNP\,\Delta y_2]^2\end{matrix}}\end{cases}$$

$$(\mathrm{II}''_y)\begin{cases}\Delta y = \dfrac{h}{S^2}\sqrt{\begin{matrix}[N^2y_1\cos\omega_1\,\Delta x_1]^2 + [P^2y_2\cos\omega_2\,\Delta x_2]^2\\ +[N^2P\,\Delta y_1]^2 + [NP^2\,\Delta y_2]^2\end{matrix}}\\ \Delta y = \dfrac{y^2}{h}\,\dfrac{1}{N^2P^2}\sqrt{\begin{matrix}[N^2y_1\cos\omega_1\,\Delta x_1]^2 + [P^2y_1y_2\cos\omega_2\,\Delta x_2]^2\\ +[NP\,\Delta y_1]^2 + [NP^2\,\Delta y_2]^2\end{matrix}}\end{cases}$$

$$(\mathrm{II}''_z)\begin{cases}\Delta z = \dfrac{h}{S^2}\sqrt{\begin{matrix}[Ny_1y_2\cos\omega_1\,\Delta x_1]^2 + [Py_1y_2\cos\omega_1\,\Delta x_2]^2\\ +[NPy_2\,\Delta y_1]^2 + [NPy_1\,\Delta y_2]^2\end{matrix}}\\ \Delta z = \dfrac{z^2}{h}\,\dfrac{1}{N^2}\sqrt{\begin{matrix}[N_2y_2\cos\omega_1\,\Delta x_1]^2 + [Py_2\cos\omega_2\,\Delta x_2]^2\\ +\left[NP\dfrac{y_2}{y_1}\,\Delta y_1\right]^2 + [NP\,\Delta y_2]^2\end{matrix}}\end{cases}$$

Mit Heranziehung der Gleichungen III' ergeben sich die Fehlerausdrücke:

$$(\mathrm{III}'_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{T^2}\left\{\begin{matrix} + W Q y_1 \sin\omega_1 \, \Delta x_1 + M V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2 \\ - M Q W \, \Delta y_1 + M Q V \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{M^2 W^2}\left\{\begin{matrix} W Q y_1 \sin\omega_1 \, \Delta x_1 + M V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2 \\ - M Q W \, \Delta y_1 + M Q V \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}'_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{T^2}\left\{\begin{matrix} - W(y_2 f_1 + Q y_1 \cos\omega_1)\, \Delta x_1 - P V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2 \\ + P Q W \, \Delta y_1 - P Q V \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{P^2 W^2}\left\{\begin{matrix} - W(y_2 f_1 + Q y_1 \cos\omega_1)\, \Delta x_1 - P V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2 \\ + P Q W \, \Delta y_1 - P Q V \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}'_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{1}{T^2}\left\{\begin{matrix} + W y_1 y_2 \sin\omega_1 \, \Delta x_1 + V y_1 y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2 \\ + M W y_2 \, \Delta y_1 + Q V y_1 \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \\ \Delta z = \dfrac{z^2}{y_1 W^2}\left\{\begin{matrix} W y_2 \sin\omega_1 \, \Delta x_1 + V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2 \\ + M W \dfrac{y_2}{y_1} \Delta y_1 + Q V \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

Die Ausdrücke für die *mittleren Fehler* lauten dann:

$$(\mathrm{III}''_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{T^2}\sqrt{\begin{matrix} [Q W y_1 \sin\omega_1 \, \Delta x_1]^2 + [M V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2]^2 \\ + [M Q W \, \Delta y_1]^2 + [M Q V \, \Delta y_2]^2 \end{matrix}} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{M^2 W^2}\sqrt{\begin{matrix} [W Q y_1 \sin\omega_1 \, \Delta x_1]^2 + [M V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2]^2 \\ + [M Q W \, \Delta y_2]^2 + [M Q V \, \Delta y_2]^2 \end{matrix}} \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}''_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{T^2}\sqrt{\begin{matrix} [W(y_2 f_1 + Q y_1 \cos\omega_1)\, \Delta x_1]^2 + [P V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2]^2 \\ + [P Q W \, \Delta y_1]^2 + [P Q V \, \Delta y_2]^2 \end{matrix}} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{P^2 W^2}\sqrt{\begin{matrix} [W(y_2 f_1 + Q y_1 \cos\omega_1)\, \Delta x_1]^2 + [P V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2]^2 \\ + [P Q W \, \Delta y_1]^2 + [P Q V \, \Delta y_2]^2 \end{matrix}} \end{cases}$$

$$(\mathrm{III}''_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{1}{T^2}\sqrt{\begin{matrix} [W y_1 y_2 \sin\omega_1 \, \Delta x_1]^2 + [V y_1 y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2]^2 \\ + [M W y_2 \, \Delta y_1]^2 + [Q V y_1 \, \Delta y_2]^2 \end{matrix}} \\ \Delta z = \dfrac{1}{y_1 W^2}\sqrt{\begin{matrix} [W y_2 \sin\omega_1 \, \Delta x_1]^2 + [V y_2 \sin\omega_2 \, \Delta x_2]^2 \\ + \left[M W \dfrac{y^2}{y_1} \Delta y_1\right]^2 + [Q V \, \Delta y_2]^2 \end{matrix}} \end{cases}$$

Die Formeln IV′ liefern für die *absoluten Fehler:*

$$(\mathrm{IV}'_x)\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{T^2}\left\{\begin{matrix} \dfrac{N}{P^2}(T V f_1 - M P W y_1 \sin\omega_1)\Delta x_1 - \dfrac{M V}{P}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\, \Delta x_2 \\ - M W U \, \Delta y_1 + M V U \, \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{V^2}\left\{\begin{matrix} \dfrac{1}{M^2 P}(T V f_1 - M P W y_1 \sin\omega_1)\Delta x_1 - \dfrac{V P}{N^2 M}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x_2 \\ - \dfrac{P W}{N}\Delta y_1 + \dfrac{V P}{N}\Delta y_2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}'_y)\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{T^2}\left\{\begin{matrix} + N W y_1 \sin\omega_1 \Delta x_1 + V(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x_2 \\ + M N W \Delta y_1 - M N V \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{V^2}\left\{\begin{matrix} + \dfrac{W}{N} y_1 \sin\omega_1 \Delta x_1 + \dfrac{V}{N^2}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x_2 \\ + \dfrac{MW}{N}\Delta y_1 - \dfrac{MV}{N}\Delta y_2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}'_z)\begin{cases} \Delta z = \dfrac{1}{T^2}\left\{\begin{matrix} + \dfrac{N}{P^2}(VT\cos\omega_1 - P W y_1 \sin\omega_1) y_1 \Delta x_1 - \dfrac{V}{P}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2) y_1 \Delta x_2 \\ - \dfrac{N}{P}(VT + MW)\Delta y_1 + \dfrac{NMW}{P} y_1 \Delta y_2 \end{matrix}\right\} \\ \Delta z = \dfrac{z^2}{V^2}\left\{\begin{matrix} + \dfrac{1}{N}(VT\cos\omega_1 - P W y_1 \sin\omega_1)\dfrac{1}{y_1}\Delta x_1 - \dfrac{VP}{N^2}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\dfrac{1}{y_1}\Delta x_2 \\ - \dfrac{P}{N}(VT + MW)\dfrac{1}{y_1^2}\Delta y_1 + \dfrac{MVP}{N}\cdot\dfrac{1}{y_1}\Delta y_2 \end{matrix}\right\} \end{cases}$$

Die *mittleren Fehler* werden lauten:

$$\mathrm{IV}^{0}_x\begin{cases} \Delta x = \dfrac{1}{T^2}\sqrt{\begin{matrix}\left[\dfrac{N}{P^2} T V f_1 - M P W y_1 \sin\omega_1)\Delta x_1\right]^2 + \left[\dfrac{MV}{P}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x_2\right]^2 \\ + [MWU\Delta y_1]^2 + [MVU\Delta y_2]^2\end{matrix}} \\ \Delta x = \dfrac{x^2}{V^2}\sqrt{\begin{matrix}\left[\dfrac{1}{M^2 P}(VTf_1 - MPWy_1 \sin\omega_1)\Delta x_1\right]^2 + \left[\dfrac{VP}{N^2 M}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x_2\right]^2 \\ + \left[\dfrac{PW}{N}\Delta y_1\right]^2 + \left[\dfrac{VP}{N}\Delta y_2\right]^2\end{matrix}} \end{cases}$$

$$\mathrm{IV}^{0}_y\begin{cases} \Delta y = \dfrac{1}{T^2}\sqrt{\begin{matrix}[N W y_1 \sin\omega_1 \Delta x_1]^2 + [V(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x_2]^2 \\ + [MNW\Delta y_1]^2 + [MNV\Delta y_2]^2\end{matrix}} \\ \Delta y = \dfrac{y^2}{V^2}\sqrt{\begin{matrix}\left[\dfrac{W}{N}(\sin\omega_1)\Delta x_1\right]^2 + \left[\dfrac{V}{N^2}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\Delta x\right]^2 \\ + \left[\dfrac{MW}{N}\Delta y_1\right]^2 + \left[\dfrac{MV}{N}\Delta y_2\right]^2\end{matrix}} \end{cases}$$

$$\mathrm{IV}^{0}_z\begin{cases} \Delta z = \dfrac{1}{T^2}\sqrt{\begin{matrix}\left[\dfrac{N}{P^2}(VT\cos\omega_1 - PWy_1\sin\omega_1) y_1 \Delta x_1\right]^2 + \left[\dfrac{V}{P}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2) y_1 \Delta x_2\right]^2 \\ + \left[\dfrac{N}{P}(VT + MW)\Delta y_1\right]^2 + \left[\dfrac{NMW}{P} y_1 \Delta y_2\right]^2\end{matrix}} \\ \Delta z = \dfrac{z^2}{V^2}\sqrt{\begin{matrix}\left[\dfrac{1}{N}(VT\cos\omega_1 - PWy_1\sin\omega_1)\dfrac{1}{y_1}\Delta x_1\right]^2 + \left[\dfrac{VP}{N^2}(y_1 f_2 + M y_2 \cos\omega_2)\dfrac{1}{y_1}\Delta x_2\right]^2 \\ + \left[\dfrac{P}{N}(VT + MW)\dfrac{1}{y_1^2}\Delta y_1\right]^2 + \left[\dfrac{MVP}{N}\dfrac{1}{y_1}\Delta y_1\right]^2\end{matrix}} \end{cases}$$

Anmerkung. Zur Sicherheit der umfassenden und mühsamen Rechnungen bei der Fehlerberechnung ist es geboten, eine einfache und

durchgreifende Kontrolle zu besitzen, welche im folgenden Rechnungsgange liegt.

Um möglichst rasch und sicher die partiellen Differentialquotienten zu erhalten, bedient man sich der aus den Gleichungen (I) des II. Abschnittes stammenden Relationen, die wie nachstehend geschrieben werden können:

$$(15) \qquad \begin{cases} y = -x \operatorname{tg}(1) \\ z = \dfrac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos(1)} x \end{cases},$$

woraus sich rechnen:

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_1} = -\operatorname{tg}(1) \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} - \dfrac{x}{\cos^2(1)} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_2} = -\operatorname{tg}(1) \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \beta_1} = -\operatorname{tg}(1) \dfrac{\partial x}{\partial \beta_1} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \beta_2} = -\operatorname{tg}(1) \dfrac{\partial x}{\partial \beta_2} \end{cases}$$

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_1} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\cos(1)} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} - \dfrac{\operatorname{tg}\beta_1 \sin(1)}{\cos^2(1)} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos(1)} \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_2} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \beta_1} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos(1)} \dfrac{\partial x}{\partial \beta_1} + \dfrac{x}{\cos(1)\cos^2\beta_1} \\ \dfrac{\partial z}{\partial \beta_2} = \dfrac{\operatorname{tg}\beta_1}{\cos(1)} \dfrac{\partial x}{\partial \beta_2}. \end{cases}$$

Aus der Gleichung

$$y = (b - x) \operatorname{tg} 2$$

folgt

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha_1} = -\operatorname{tg}(2) \frac{\partial x}{\partial \alpha_1}.$$

Zur möglichst raschen Kontrolle werden aus der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{z^2} = \operatorname{cotg}^2 \beta_1$$

folgende Differentialgleichungen erhalten:

$$(18) \qquad \begin{cases} x \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_1} + y \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_1} - z \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_1} \operatorname{cotg}^2 \beta_1 = 0 \\ x \dfrac{\partial x}{\partial \alpha_2} + y \dfrac{\partial y}{\partial \alpha_2} - z \dfrac{\partial z}{\partial \alpha_2} \operatorname{cotg}^2 \beta_1 = 0 \\ x \dfrac{\partial x}{\partial \beta_2} + y \dfrac{\partial y}{\partial \beta_2} - z \dfrac{\partial z}{\partial \beta_2} \operatorname{cotg}^2 \beta_1 = 0 \end{cases}$$

oder auch

$$(19)\quad\begin{cases}\cos(1)\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_1}-\sin(1)\dfrac{\partial y}{\partial\alpha_1}-\operatorname{cotg}\beta_1\dfrac{\partial z}{\partial\alpha_1}=0\\ \cos(1)\dfrac{\partial x}{\partial\alpha_2}-\sin(1)\dfrac{\partial y}{\partial\alpha_2}-\operatorname{cotg}\beta_1\dfrac{\partial z}{\partial\alpha_2}=0\\ \cos(1)\dfrac{\partial x}{\partial\beta_2}-\sin(1)\dfrac{\partial y}{\partial\beta_2}-\operatorname{cotg}\beta_1\dfrac{\partial z}{\partial\beta_2}=0.\end{cases}$$

Werden in die vorstehenden zwei Gleichungssysteme die berechneten partiellen Differentialquotienten eingeführt, so ergibt sich die erwünschte Kontrolle.

Stellen wir uns die Frage nach der Genauigkeit, welche die Horizontaldistanzen D_1 und D_2, sowie die relativen Höhen über den Horizonten der einzelnen photogrammetrischen Stationen (Zentren) haben, unter der Voraussetzung, daß b, h, ω_1 und ω_2, sowie f_1 und f_2 als fehlerfrei anzusehen sind, so hat man auf Grund der Gleichungen:

$$(20)\quad\begin{cases}D_1=\dfrac{\sin(\omega_2+\alpha_2)}{\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\,b\\ D_2=-\dfrac{\sin(\omega_1+\alpha_1)}{\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}\,b\end{cases}$$

und

$$(21)\quad\begin{cases}h_1=D_1\operatorname{tg}\beta_1\\ h_2=D_2\operatorname{tg}\beta_3\end{cases}$$

für die *totalen Fehler*:

$$(22)\quad\begin{cases}\Delta D_1=\dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_1}\Delta\alpha_1+\dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_2}\Delta\alpha_2\\ \Delta D_2=\dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_1}\Delta\alpha_1+\dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_2}\Delta\alpha_2\\ \Delta h_1=\dfrac{\partial h_1}{\partial D_1}\Delta D_1+\dfrac{\partial h_1}{\partial\beta_1}\Delta\beta_1\\ \Delta h_2=\dfrac{\partial h_2}{\partial D_2}\Delta D_2+\dfrac{\partial h_2}{\partial\beta_2}\Delta\beta_2\end{cases}$$

und für die *mittleren Fehler*:

$$(23)\quad\begin{cases}\Delta D_1=\sqrt{\left(\dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2+\left(\dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2}\\ \Delta D_2=\sqrt{\left(\dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2+\left(\dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2}\\ \text{und}\\ \Delta h_1=\sqrt{\left(\dfrac{\partial h_1}{\partial D_1}\Delta D_1\right)^2+\left(\dfrac{\partial h_1}{\partial\beta_1}\Delta\beta_1\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2+\left(\dfrac{\partial D_1}{\partial\alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2+\left(\dfrac{\partial h_1}{\partial\beta_1}\Delta\beta_1\right)^2}\\ \Delta h_2=\sqrt{\left(\dfrac{\partial h_2}{\partial D_2}\Delta D_2\right)^2+\left(\dfrac{\partial h_2}{\partial\beta_2}\Delta\beta_2\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_1}\Delta\alpha_1\right)^2+\left(\dfrac{\partial D_2}{\partial\alpha_2}\Delta\alpha_2\right)^2+\left(\dfrac{\partial h_2}{\partial\beta_2}\Delta\beta_2\right)^2}.\end{cases}$$

Ermittelt man für D_1 die partiellen Differentialquotienten:

$$\begin{cases} \frac{\partial D_1}{\partial \alpha_1} = b \frac{\sin(\omega_2 + \alpha_2)\cos[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]} = D_1 \operatorname{cotg}[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)], \\ \frac{\partial D_1}{\partial \alpha_2} = -b \frac{\sin(\omega_1+\alpha_1)}{\sin^2[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]} = -D_2 \frac{1}{\sin[(\omega_2+\alpha_2)-(\omega_1+\alpha_1)]}, \end{cases}$$

so wird nach Einführung der vereinfachten Bezeichnung erhalten:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \Delta D_1 = [\sin(2)\cos(2-1)\Delta\alpha_1 - \sin(1)\Delta\alpha_2]\frac{b}{\sin^2(2-1)} \\ \qquad = \left[\cos(2-1)\Delta\alpha_1 - \frac{\sin(1)}{\sin(2)}\Delta\alpha_2\right]\frac{D_1}{\sin(2-1)}, \\ \text{als absoluter und} \\ \frac{\Delta D_1}{D_1} = \left[\cos(2-1)\Delta\alpha_1 - \frac{\sin(1)}{\sin(2)}\Delta\alpha_2\right]\frac{1}{\sin(2-1)} \end{cases}$$

als relativer Fehler; die mittleren Fehler werden sein:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \Delta D_1 = \sqrt{[\sin(2)\cos^2(2-1)\Delta\alpha_1] + [\sin(1)\Delta\alpha_2]^2}\,\frac{b}{\sin^2(2-1)} \\ \qquad = \sqrt{[\cos^2(2-1)\Delta\alpha_1]^2 + \left[\frac{\sin(1)}{\sin(2)}\Delta\alpha_2\right]^2}\,\frac{D_1}{\sin(2-1)} \\ \text{und} \\ \frac{\Delta D_1}{D_1} = \sqrt{[\cos^2(2-1)\Delta\alpha_1]^2 + \left[\frac{\sin(1)}{\sin(2)}\Delta\alpha_2\right]^2}\,\frac{1}{\sin(2-1)}. \end{cases}$$

Analoge Gleichungen können für die Fehler in D_2 gewonnen werden.

Was die Fehler in den relativen Höhen betrifft, so hat man vorerst für die partiellen Differentialquotienten von h_1:

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial D_1} = \operatorname{tg}\beta_1 = \frac{h_1}{D_1} \\ \frac{\partial h_1}{\partial \beta_1} = \frac{D_1}{\cos^2\beta_1} = \frac{2}{\sin^2\beta_1} D_1 \end{cases}$$

und nach Einführung in die Gleichungen

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \Delta h_1 = \operatorname{tg}\beta_1 \Delta D_1 + \frac{D_1}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1 \\ \qquad = \left(\frac{\Delta D_1}{D_1} + \frac{\Delta\beta_1}{\frac{\sin^2\beta_1}{2}}\right) h_1 \end{cases}$$

und für den gebräuchlichen Höhenfehler, der der Einheit der Distanz entspricht:

$$\text{(IV)} \quad \frac{\Delta h_1}{D_1} = \left(\frac{\Delta D_1}{D_1} + \frac{\Delta\beta_1}{\frac{\sin^2\beta_1}{2}}\right)\operatorname{tg}\beta_1$$

und ferner die mittleren Fehler:

$$\text{(V)} \quad \begin{cases} \Delta h_1 = \sqrt{(\operatorname{tg}\beta_1 D_1)^2 + \left(\frac{D_1}{\cos^2\beta_1}\Delta\beta_1\right)^2} \\ \quad = h_1\sqrt{\left(\frac{\Delta D_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta_1}{\frac{\sin^2\beta_1}{2}}\right)^2} \end{cases}$$

und

$$\text{(VI)} \quad \frac{\Delta h_1}{D_1} = \operatorname{tg}\beta_1\sqrt{\left(\frac{\Delta D_1}{D_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\beta_1}{\frac{\sin^2\beta_1}{2}}\right)^2}.$$

Für die Fehler in der relativen Höhe h_2 werden ähnliche Ausdrücke erhalten.

Es sei bemerkt, daß für die Fehler in den Distanzen D und relativen Höhen h analog wie bei den Raumkoordinaten verschiedene Ausdrücke abgeleitet werden könnten; doch begnügen wir uns, auf die vielseitige Möglichkeit der Ableitung solcher Ausdrücke hingewiesen zu haben.

Über die Wurzeln einiger Zylinderfunktionen und gewisser aus ihnen gebildeter Gleichungen.

Von A. Kalähne in Heidelberg.

1. Form der Gleichungen. Definition der Zylinderfunktionen.

In einer vor kurzem veröffentlichten Arbeit über elektrische Schwingungen in ringförmigen Metallröhren[1]) habe ich die Wurzelwerte gewisser aus Zylinderfunktionen gebildeter transzendenter Gleichungen numerisch berechnet. Diese Gleichungen ergaben sich aus den Grenzbedingungen des Problems und dienten zur Bestimmung der Eigenschwingungsperioden, welche dem ringförmigen System eigentümlich sind. Da dieselben Gleichungen noch bei vielen anderen physikalischen Problemen auftreten, und die Kenntnis ihrer Wurzeln auch mathematisches Interesse beansprucht, so teile ich die Resultate in erweiterter Form hier mit.

Es handelte sich im allgemeinen Falle um die Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{I_n(x)}{K_n(x)} = \frac{I_n(kx)}{K_n(kx)} \qquad (k > 1)$$

1) A. Kalähne, Ann. d. Phys. 18. p. 92. 1905. 19. p. 80. 1906.

oder

(1a) $$\frac{I_n(r_1\tau)}{K_n(r_1\tau)} = \frac{I_n(r_2\tau)}{K_n(r_2\tau)} \qquad (r_2 > r_1)$$

und die aus den Derivierten ganz ebenso gebildeten

(2) $$\frac{I_n'(x)}{K_n'(x)} = \frac{I_n'(kx)}{K_n'(kx)} \qquad (k > 1)$$

oder

(2a) $$\frac{I_n'(r_1\tau)}{K_n'(r_1\tau)} = \frac{I_n'(r_2\tau)}{K_n'(r_2\tau)} \qquad (r_2 > r_1)$$

Die Gleichungen (1a) und (2a) ergeben sich aus (1) und (2), wenn man $r_1\tau$ statt x und $\frac{r_2}{r_1}$ statt k setzt.

An ihre Stelle treten in dem Spezialfall, daß $k = \infty$ wird, die einfacheren Gleichungen

(3) $$I_n(\xi) = 0 \quad \text{oder} \quad I_n(r_2\tau) = 0$$

(4) $$I_n'(\xi) = 0 \quad \text{oder} \quad I_n'(r_2\tau) = 0$$

und wenn andererseits $k = 1$ wird, die noch einfacheren

(5) $$\sin\eta = 0 \quad \text{oder} \quad \sin(r_2 - r_1)\tau = 0$$

(6) $$\cos\eta = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(r_2 - r_1)\tau = 0$$

Hierin bedeuten $I_n(x)$ und $K_n(x)$ irgend zwei unabhängige partikuläre Integrale der Besselschen Differentialgleichung

(7) $$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dz}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)z = 0.$$

Zwei solche unabhängige partikuläre Integrale dieser Gleichung sind die Besselsche und die Neumannsche Zylinderfunktion (oder in anderer Bezeichnung die Besselschen Funktionen erster und zweiter Art) von der $n$ten Ordnung, die für alle beliebigen Werte von n und x definiert sind durch die Gleichungen[1]):

(8) $$I_n(x) = \frac{x^n}{2^n}\left\{\frac{1}{\Gamma(n+1)} - \frac{x^2}{2^2.\,1!\,\Gamma(n+2)} + \frac{x^4}{2^4.\,2!\,\Gamma(n+3)} - \frac{x^6}{2^6\,3!\,\Gamma(n+4)} + \cdots\right\}$$
$$= \frac{x^n}{2^n}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s\frac{x^{2s}}{2^{2s}\,s!\,\Gamma(n+s+1)} \qquad (s = 0, 1, 2, \ldots)$$

(9) $$K_n(x) = \frac{1}{\sin n\pi}\left\{\cos n\pi\, I_n(x) - I_{-n}(x)\right\}.$$

1) Vgl. hierfür und für das folgende z. B. N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen. Leipzig 1904 S. 5 ff. Graf und Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen. Bern 1898 und 1900. Heft I S. 25, S. 34 ff. Gray und Mathews, A Treatise on Bessel Functions and their Applications to Physics. London 1895. p. 7 ff.

Γ bedeutet die Gaußsche Gammafunktion

$$\Gamma(x) = \lim_{m=\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1) m^x}{x(x+1)\ldots(x+m-1)},$$

die für ein positives ganzzahliges Argument übergeht in

$$\Gamma(x) = (x-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ (x-1).$$

Für einen nichtganzzahligen Wert von n ist auch $I_{-n}(x)$ ein unabhängiges partikuläres Integral, könnte also an Stelle von $K_n(x)$ treten; für ganzzahlige Parameter $n = \nu$ muß jedoch die Neumannsche Funktion $K_n(x)$ genommen werden, die in diesem Falle aus (9) durch einen Grenzübergang abgeleitet wird. Man erhält für ganzzahlige $n = \nu$

$$(10) \quad \begin{aligned} I_\nu(x) &= \frac{x^\nu}{2^\nu}\left\{\frac{1}{\nu!} - \frac{x^2}{2^2 . 1!(\nu+1)!} + \frac{x^4}{2^4 . 2!(\nu+2)!} - \frac{x^6}{2^6 . 3!(\nu+3)!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{x^\nu}{2^\nu}\sum_{s=0}^{s=\infty}(-1)^s \frac{x^{2s}}{2^{2s} s!(\nu+s)!} \qquad \begin{pmatrix} s = 0, 1, 2, \ldots \\ \nu \text{ eine ganze Zahl} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} K_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\log\frac{x}{2}\cdot I_\nu(x) - \frac{x^\nu}{2^\nu \pi}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s} s!(\nu+s)!}[\varDelta(s+1) + \varDelta(\nu+s+1)] \\ - \frac{2^\nu}{x^\nu \pi}\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\frac{(\nu-s-1)!\, x^{2s}}{s!\, 2^{2s}}. \end{aligned}$$

wo $\varDelta$ in der Bezeichnung von Schläfli die von Gauß eingeführte, mit der Gammafunktion zusammenhängende Funktion ist

$$\varDelta(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx} = -C - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{1}{\lambda+x} - \frac{1}{\lambda+1}\right) \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$$

C ist die Konstante des Integrallogarithmus (Eulersche oder Mascheronische Konstante) und hat den Wert 0,577216.

Mit Einsetzung des Wertes der Funktion $\varDelta$ kann man $K_\nu(x)$ schreiben

$$(11a) \quad \begin{aligned} K_\nu(x) = \frac{2}{\pi}\log x I_\nu(x) - \frac{2}{\pi} I_\nu(x)\,[\log 2 - C] \\ + \frac{x^\nu}{\pi 2^\nu}\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(-1)^s x^{2s}}{2^{2s} s!(\nu+s)!}\left[\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{1}{\lambda+s+1} - \frac{1}{\lambda+1}\right) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\frac{1}{\lambda+\nu+s+1} - \frac{1}{\lambda+1}\right)\right] \\ - \frac{2^\nu}{\pi x^\nu}\sum_{s=0}^{s=\nu-1}\frac{(\nu-s-1)!\, x^{2s}}{2^{2s} s!}. \end{aligned}$$

Statt dieser durch (11) oder (11a) definierten Neumannschen Funktion $K_\nu(x)$ wird oft eine andere $Y_\nu(x)$ benutzt, die ebenfalls den Namen der Neumannschen Zylinderfunktion führt, und die mit $K_\nu(x)$ und $I_\nu(x)$ zusammenhängt durch die Gleichung

$$K_\nu(x) = \frac{2}{\pi} Y_\nu(x) - \frac{2}{\pi} I_\nu(x) [\log 2 - C]. \tag{12}$$

Der Faktor $\log 2 - C$ hat den Wert 0,11593. Wie man sieht, ist $\frac{2}{\pi} Y_\nu(x)$ durch die rechte Seite von (11a) gegeben, wenn man daselbst das Glied $\frac{2}{\pi} I_\nu(x) [\log 2 - C]$ wegläßt.[1]

Statt der Reihen und Gleichungen (8) und (9) bez. (10) und (11) kann man zur Definition von $I_n(x)$ und $K_n(x)$ auch gewisse Reihen nach fallenden Potenzen des Argumentes x benutzen, die besonders für große Argumente wertvoll sind, nämlich:

$$\text{(13)} \begin{cases} I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \cdot \varphi_n(x) + \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \cdot \psi_n(x) \right\} \\ K_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ \sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \cdot \varphi_n(x) - \cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \cdot \psi_n(x) \right\} \end{cases}$$

wobei die Funktionen $\varphi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ definiert sind durch die im allgemeinen halbkonvergenten Reihen

$$\text{(14)} \begin{cases} \varphi_n(x) = 1 + \sum_{s=1}^{s \leq \frac{m}{2}} \frac{(-1)^s}{(2s)!} \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)(7^2 - 4n^2) \dots ((4s-3)^2 - 4n^2)((4s-1)^2 - \dots}{(8x)^{2s}} \\ \psi_n(x) = \sum_{s=1}^{s \leq \frac{m+1}{2}} \frac{(-1)^{s-1}}{(2s-1)!} \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2) \dots ((4s-5)^2 - 4n^2)((4s-3)^2 - \dots}{(8x)^{2s-1}} \end{cases}$$

oder ausgeschrieben

$$\text{(14a)} \begin{cases} \varphi_n(x) = 1 - \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)}{2!(8x)^2} + \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)(7^2 - 4n^2)}{4!(8x)^4} - \dots \\ \psi_n(x) = \frac{1^2 - 4n^2}{1!8x} - \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)}{3!(8x)^3} \\ \qquad + \frac{(1^2 - 4n^2)(3^2 - 4n^2)(5^2 - 4n^2)(7^2 - 4n^2)(9^2 - 4n^2)}{5!(8x)^5} - \dots \end{cases}$$

Bricht man diese halbkonvergenten Reihen so ab, daß die Ordnungszahl s des letzten benutzten Gliedes $\leqq \frac{m}{2}$ bez. $\leqq \frac{m+1}{2}$ ist, wobei m

1) Vgl. die Darstellung bei Gray und Mathews l. c. S. 14. Die Formel für $Y_n(x)$ ist daselbst jedoch durch einen Druckfehler entstellt. In dem Ausdruck (31) für $k_{n,s}$ muß das letzte Glied $+\sum_1^n \frac{1}{2s}$ heißen statt $-\sum_1^n \frac{1}{2s}$.

eine ganze Zahl darstellt, so ist der Fehler kleiner als das letzte in Rechnung gezogene Glied.[1])

Mit unendlich wachsendem x bei endlich bleibendem n nähern sich die Summen in (14) dem Werte Null, daher wird

$$\lim_{x=\infty} \varphi_n(x) = 1, \quad \lim_{x=\infty} \psi_n(x) = 0,$$

und die Gleichungen (13) geben

$$(15) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x=\infty} I_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \dfrac{2n+1}{4}\pi\right) \\ \lim\limits_{x=\infty} K_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \dfrac{2n+1}{4}\pi\right). \end{cases}$$

Wie sich die Funktionen verhalten, wenn x und n zugleich unendlich werden, ist hieraus aber nicht zu ersehen, da dann die Reihen (14) versagen. Für $x = 0$ folgt aus den Gleichungen (10) und (11)

$$(16) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x=0} I_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{für } n > 0 \end{cases} \\ \lim\limits_{x=0} K_n(x) = \infty, \end{cases}$$

und zwar wird $\lim\limits_{x=0} K(x)$ für $n = 0$ logarithmisch, für $n > 0$ algebraisch unendlich wie x^{-n}.

Als Poissonsche Zylinderfunktionen bezeichnet man die Funktionen $I_n(x)$ und $K_n(x)$, wenn n die gebrochenen Werte $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \cdots \nu + \frac{1}{2}$ besitzt, wobei ν eine beliebige ganze Zahl $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ darstellt. Sie ergeben sich leicht aus den Gleichungen (13); die Reihen für $\varphi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ brechen in diesen speziellen Fällen jeweils bei einer bestimmten Stelle ab und haben nur eine *endliche* Zahl von Gliedern, so lange n selbst endlich ist. Man erhält:

$$(17) \qquad \begin{cases} I_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \sin x \\ K_{\frac{1}{2}}(x) = -\sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \cos x = -I_{-\frac{1}{2}}(x) \\ I_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \left(-\cos x + \dfrac{\sin x}{x}\right) \\ K_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \left(-\sin x - \dfrac{\cos x}{x}\right) = +I_{-\frac{3}{2}}(x) \\ I_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \left(-\left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right) \sin x - \dfrac{3}{x} \cos x\right) \\ K_{\frac{5}{2}}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}} \left(\left(1 - \dfrac{3}{x^2}\right) \cos x - \dfrac{3}{x} \sin x\right) = -I_{-\frac{5}{2}}(x) \quad \text{usw.} \end{cases}$$

---

1) Vgl. N. Nielsen, l. c. S. 153 und 156. E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen. Leipzig 1868. § 17 S. 57 ff.

2. Lage der Wurzeln im allgemeinen. Physikalische Bedeutung derselben.

Von den in Betracht kommenden transzendenten Gleichungen (1) bis (4) habe ich zunächst die aus den Derivierten gebildeten nicht berücksichtigt und nur für die Gleichungen (1) und (3) die Rechnung durchgeführt. Auch sind etwaige imaginäre oder komplexe Wurzeln außer Acht gelassen und nur reelle Werte benutzt. Jede der beiden Gleichungen (1) und (3) hat unendlich viele diskrete reelle Wurzeln ganz ebenso wie die aus den entsprechenden trigonometrischen Funktionen $\sin x$ und $\cos x$ analog gebildeten Gleichungen

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} kx \quad \text{bez.} \quad \sin x = 0.$$

Wir unterscheiden sie durch Hinzufügung des Parameters n und der Ordnungszahl w, die nach einander die Werte 0, 1, 2, 3 ... annimmt, schreiben also $x_n^{(w)}$ als $w$te Wurzel der Gleichung (1), die aus den Zylinderfunktionen $n$ter Ordnung gebildet ist. Dies Verhalten der Gleichungen (1) und (3) in bezug auf ihre Wurzeln übersieht man am leichtesten, wenn man den Verlauf der Funktionen $I_n(r\tau)$ bez. der allgemeineren

$$R = I_n(r\tau) + AK_n(r\tau) \tag{18}$$

im reellen Gebiete graphisch darstellt, was sich, wenigstens für die Werte $n = 0$ und $n = 1$, ziemlich weit durchführen läßt, da für diese Parameter ausführliche Tafeln der beiden Zylinderfunktionen existieren. Das schon zitierte Buch von Gray und Mathews enthält eine solche Darstellung von $I_0(x)$ und $I_1(x)$ bis zum Argument $x = 20$ hinauf. Die Gestalt der Kurven ist ähnlich derjenigen der Kurve einer gedämpften sinusförmigen Schwingung, nur sind die aufeinanderfolgenden Nullstellen nicht wie bei dieser um den Betrag π von einander entfernt, sondern diese Differenz ist bei $I_0(x)$ kleiner, bei $I_1(x)$ und allen anderen mit höheren Parametern größer als π, nähert sich aber mit wachsendem Argument asymptotisch dem Werte π, wie aus den Formeln (15) hervorgeht, welche für sehr große Argumente gelten. Ganz analog verhalten sich die Neumannsche Zylinderfunktion $K_n(x)$ bez. $Y_n(x)$ und die durch (18) dargestellte Summe beider; die Lage der Nullstellen dieser Summe R hängt natürlich von dem willkürlichen konstanten Koeffizienten A ab.

Die durch (18) definierte Funktion R stellt, noch mit einer willkürlichen Amplitudenkonstante multipliziert, das allgemeine Integral der Besselschen Differentialgleichung (7) dar. Aus ihr geht die transzendente Gleichung (1a) bez. (1) in folgender Weise hervor. Die Funktion R ist innerhalb eines Kreisringes mit den Radien r_1 und r_2

die endliche, stetige, eindeutige Lösung einer bestimmten Differentialgleichung. Wenn nun die Grenzbedingungen verlangen, daß R an beiden Grenzen verschwinden soll, so hat man zunächst zu setzen

$$A = -\frac{I_n(r_1\tau)}{K_n(r_1\tau)}, \tag{19}$$

also

$$R = I_n(r\tau) - \frac{I_n(r_1\tau)}{K_n(r_1\tau)} K_n(r\tau), \tag{18a}$$

damit R an der unteren Grenze $r = r_1$ verschwindet; damit es auch an der oberen $r = r_2$ verschwindet, muß die Gleichung (1a) erfüllt sein, aus der τ als Funktion von r_1 und r_2, sowie von n, das als Parameter in der Gleichung enthalten ist, berechnet werden muß. Setzt man darin x statt $r_1\tau$ und k für $\frac{r_2}{r_1}$, so geht die Gleichung (1a) in die Form (1) über. Das Verhältnis der Ringradien k ist ein Maß für die Krümmung des Ringes; es ist gleich 1 für unendlich kleine Krümmung, d. h. wenn der Ring in einen geraden Streifen von der Breite $r_2 - r_1$ übergeht; es ist gleich ∞ für unendlich große Krümmung, d. h. wenn der Ring in einen Vollkreis übergeht, indem sich r_1 bei endlichem r_2 auf den Wert Null reduziert, oder wenn er in den Außenraum eines Vollkreises übergeht, indem r_2 bei endlichem r_1 unbegrenzt wächst. Zufolge der Definition

$$k = \frac{r_2}{r_1} \tag{20}$$

besteht zwischen den Wurzeln $x_n^{(w)}$ der Gleichung (1) und den Wurzeln τ der Gleichung (1a) die Beziehung

$$(k-1)x_n^{(w)} = (r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}, \tag{21}$$

indem wir auch die τ mit den Indizes n und w versehen. Diese Größen $\tau_n^{(w)}$ sind die physikalisch wichtigen, sie hängen eng mit den Perioden der Eigenschwingungen des Ringsystems zusammen und dienen daher zur Berechnung dieser, wenn die Dimensionen des Systems gegeben sind. Physikalisch kommen nur die Wurzeln in Betracht, deren Ordnungszahl $w > 0$ ist; die nullte Wurzel ist allen Werten von k und n gemeinsam und hat den Wert Null.

3. Numerische Berechnung. Reihen von Mac Mahon.

Zur numerischen Berechnung der Wurzeln $x_n^{(w)}$ lassen sich die Reihen verwenden, welche Mac Mahon[1]) für dieselben angegeben hat.

1) J. Mac Mahon, Annals of Mathematics 9. p. 28. 1894/95. Die Formeln findet man bei Gray und Mathews l. c. p. 241 ff., sie enthalten in diesem Ab-

Die Ableitung derselben stützt sich auf die Darstellung der Zylinderfunktionen durch die halbkonvergenten Reihen $\varphi_n(x)$ und $\psi_n(x)$ vermittels der Gleichungen (13). Setzt man nämlich

$$\varphi_n(x) = P\cos\Theta, \quad \psi_n(x) = P\sin\Theta, \tag{22}$$

wo P und Θ zwei durch diese Gleichungen definierte Größen sind, so gehen die Gleichungen (13) über in

$$\begin{cases} I_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, P\cos\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi - \Theta\right) \\ K_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, P\sin\left(x - \frac{2n+1}{4}\pi - \Theta\right) \end{cases}. \tag{23}$$

Sollen diese Werte verschwinden, so muß sein für $I_n(x) = 0$

$$x - \frac{2n+1}{4}\pi - \Theta = \frac{\pi}{2}(2w - 1) \qquad (w = 1, 2, 3\ldots)$$

oder

$$x = \beta + \Theta, \quad \text{wobei} \quad \beta = \frac{\pi}{4}(2n + 4w - 1) \tag{24}$$

ist; für $K_n(x) = 0$

$$x - \frac{2n+1}{4}\pi - \Theta = \frac{\pi}{2}(2w - 2) \qquad (w = 1, 2, 3\ldots)$$

oder

$$x = \beta' + \Theta, \quad \text{wobei} \quad \beta' = \frac{\pi}{4}(2n + 4w - 3) = \beta - \frac{\pi}{2} \tag{25}$$

ist. Indem nun mit Hilfe von (22) Θ nach fallenden Potenzen von x entwickelt wird, erhält man für $I_n(x)$

$$x = \beta + \frac{p}{x} + \frac{q}{x^3} + \frac{r}{x^5} + \cdots$$

wo die $p, q, r \ldots$ gewisse Funktionen von n sind. Hieraus ergibt sich nach einem Theorem von Lagrange:

$$x_n^{(w)} = \beta + \frac{p}{\beta} + \frac{q - p^2}{\beta^3} + \frac{r - 4pq + 2p^3}{\beta^5} + \cdots. \tag{26}$$

Setzt man die Werte von $p, q, r \ldots$ ein, so erhält man schließlich als $w$te Wurzel von $I_n(x) = 0$

$$\begin{aligned} x_n^{(w)} = \beta &- \frac{m-1}{8\beta} - \frac{4(m-1)(7m-31)}{3(8\beta)^3} - \frac{32(m-1)(83m^2 - 982m + 3779)}{15(8\beta)^5} \\ &- \frac{64(m-1)(6949m^3 - 153\,855m^2 + 1\,585\,743m - 6\,277\,237)}{105(8\beta)^7} - \cdots, \end{aligned} \tag{27}$$

---

druck einige Druckfehler. Auf p. 242 muß es unter (VI) $(8\varrho)^5$ im Nenner von r heißen statt $(8\varrho^5)$ Ferner muß es auf p. 241 unter (I) bei den Wurzeln von $I_n(x) = 0$ im letzten Gliede von $x_n^{(s)}$ heißen $1\,585\,743m$ statt $185\,743m$, wie eine Vergleichung mit der Originalabhandlung lehrt.

wobei gemäß (24) gesetzt ist

$$4n^2 = m, \quad \frac{\pi}{4}(2n - 1 + 4w) = \beta.$$

Dieselbe Formel (27) gilt für die Wurzeln von $K_n(x) = 0$, wenn man darin statt β den Wert

$$\frac{\pi}{4}(2n - 3 + 4w) = \beta' = \beta - \frac{\pi}{2}$$

einsetzt.

Für die Wurzeln der allgemeineren Gleichung (1) ergibt sich ebenfalls die Gleichung (26), wobei aber β, p, q, r ... die Werte haben

$$(28) \quad \begin{cases} \beta = \frac{w\pi}{k-1}, \quad p = \frac{m-1}{8k}, \quad q = \frac{4(m-1)(m-25)(k^3-1)}{3(8k)^3(k-1)}, \\ r = \frac{32(m-1)(m^2-114m+1073)(k^5-1)}{5(8k)^5(k-1)}, \quad m = 4n^2. \end{cases}$$

Ähnliche Entwicklungen findet Mac Mahon für die aus den Derivierten $I_n'(x)$ und $K_n'(x)$ gebildeten Gleichungen.

Mit Hilfe der Gleichungen (26) und (28) habe ich die 6 ersten Wurzeln $x_n^{(w)}$ der Gleichung (1) für die Parameter $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$ und die willkürlich herausgegriffenen Werte $k = 1{,}2$, $k = 1{,}5$, $k = 2$ berechnet und sie in Tabelle 2 zusammengestellt. Die angegebenen Krümmungswerte k entsprechen 3 Ringen, deren innerer Durchmesser z. B. 20 cm beträgt, während die äußeren in derselben Reihenfolge 24, 30, 40 cm sind. Der Berechnung sind die 4 in (26) hingeschriebenen Glieder zugrunde gelegt, und die Werte $x_n^{(w)}$, soweit es möglich ist, auf 4 Dezimalen genau mitgeteilt. Allgemein läßt sich die Genauigkeit der mit diesen Reihen berechneten Werte nicht abschätzen, da Untersuchungen über die Konvergenz und die Restglieder derselben noch ausstehen, wie ich einer Notiz in Nielsens[1]) Handbuch entnehme. Bei der numerischen Berechnung zeigt sich, daß die Glieder dieser Reihen um so schneller abnehmen, je größer die Ordnungszahl der Wurzel w, und je kleiner k und n sind. Eine Ausnahme bildet der Parameterwert $n = \frac{1}{2}$ insofern, als für ihn die Reihe sich auf das erste Glied β mit dem Wert $w\pi/(k-1)$ reduziert, da die folgenden wegen des Faktors $m - 1$ sämtlich verschwinden. Dies Resultat erhält man auch direkt, wenn man in Gleichung (1) die Werte der Poissonschen Zylinderfunktionen für $n = \frac{1}{2}$ einsetzt, wodurch dieselbe in

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} kx$$

übergeht. Von $n = \frac{1}{2}$ aufwärts wird die Konvergenz mit wachsendem Parameter immer schlechter. Als Beispiel führe ich in Tabelle 1 die

1) N. Nielsen, l. c. p. 173.

Werte der 4 Glieder von Reihe (26) für $w = 1$ und die Parameter $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ an, die zu dem Krümmungswert $k = 2$ gehören; sie sind mit a, b, c, d bezeichnet.

Tabelle 1.

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$
a	3,14 159	3,14 159	3,14 159
b	− 0,01 989	+ 0,05 968	+ 0,29 842
c	+ 0,00 171	− 0,00 576	− 0,03 827
d	− 0,00 062	+ 0,00 157	+ 0,00 456

Die Glieder nehmen also verhältnismäßig langsam ab; bei kleineren Werte von k geschieht dies schneller, bei größeren langsamer und schließlich werden im Gegenteil die folgenden Glieder größer als die vorhergehenden. Dies ist z. B. schon für $k = 3$ bei $n = 0$ der Fall, wo das Glied d größer wird als c. Hier werden also die Reihen unbrauchbar, d. h. gerade für das interessante Gebiet stark gekrümmter Ringe, bei denen k große Werte hat. Wir werden jedoch auf anderem Wege Aufschluß über die Größe der Wurzeln auch für diese Fälle erhalten. Je mehr sich k der Einheit nähert, desto größer wird β, und desto schneller konvergiert die Reihe; z. B. kann man sogar bei $n = \frac{5}{2}$, dem höchsten Parameterwert der Tabelle, schon für $k = 1{,}2$ das vierte Glied d ganz vernachlässigen, wenn man eine Genauigkeit von 4 Dezimalen erreichen will; umsomehr natürlich bei kleineren Parameterwerten. Hier kann man die Genauigkeit also gut angeben; bei denjenigen Wurzelwerten aber, wo das vierte Glied d noch einen Beitrag zur vierten oder gar dritten Dezimale liefert, kann man den möglichen Fehler des Resultates gleich der Größe dieses noch in Rechnung gezogenen Gliedes setzen, wenn man annimmt, daß die Summe aller folgenden Glieder höchstens den Betrag dieses Gliedes erreicht. Diese Annahme habe ich gemacht und die Bezeichnungen in der Tabelle danach eingerichtet; wo die Unsicherheit wegen des vierten Gliedes 1—2 Einheiten der vierten Dezimale beträgt, ist dies durch kleinen Druck der betreffenden Ziffer angedeutet; ist die Unsicherheit größer als 2 Einheiten, so sind die Ziffern außerdem unterstrichen; in allen anderen Fällen beträgt sie weniger als 0,5 Einheiten der vierten Dezimale. Zur besseren Beurteilung der Unsicherheit ist das vierte Glied d in Einheiten der vierten Dezimale daneben geschrieben, soweit es in Betracht kommt.

In dieser Tabelle sind die Wurzeln $x_n^{(w)}$ für die Grenzwerte $k = 1$ und $k = \infty$ nicht mit aufgeführt, um das wiederholte Hinschreiben der Werte ∞ und 0, welche diese Wurzeln besitzen, zu vermeiden. Daß

$x_n^{(w)} = \infty$ wird für $k = 1$, folgt aus der Reihe (26) ohne weiteres, da in diesem Falle $\beta = \frac{w\pi}{k-1}$ unendlich wird, weswegen alle Glieder mit β im Nenner wegfallen und nur das erste, β selbst, übrig bleibt. Der andere Grenzfall $k = \infty$ erfordert aber eine besondere Betrachtung, bei der wir zweckmäßig von den Wurzeln τ der Gleichung (1a) ausgehen.

4. Die Grenzfälle $k = 1$ und $k = \infty$.

1. Für den Grenzfall $k = 1$ erledigt sich die Betrachtung, wie wir sahen, sehr einfach, da die Gleichung (26) den Wert der Wurzeln angibt, $x_n^{(w)} = \infty$. Interessanter sind aber die Wurzeln $\tau_n^{(w)}$, die nach (21) mit $x_n^{(w)}$ zusammenhängen. Man erhält nämlich für jedes n

$$\lim_{k=1} (k-1)\, x_n^{(w)} = (r_2 - r_1)\, \tau_n^{(w)} = w\pi, \tag{29}$$

indem die Glieder von (26), welche β im Nenner haben, verschwinden. Dies Resultat ist natürlich im Einklang mit den Forderungen des physikalischen Problems, die für diesen Grenzfall wegen $r_1 = r_2 = \infty$ Übergang der Zylinderfunktionen in die trigonometrischen Funktionen sin und cos fordern, wobei die Gleichungen (1) übergehen in

$$\operatorname{tg} r_1 \tau = \operatorname{tg} r_2 \tau \quad \text{bez.} \quad \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} kx, \tag{30}$$

also in Gleichungen, deren Wurzeln durch (29) bestimmt werden.

Die Größen $\tau_n^{(w)}$ bleiben, da wir die Ringbreite $r_2 - r_1$ endlich vorausgesetzt haben, ebenfalls endlich; die Wurzeln $x_n^{(w)}$ werden jedoch wegen $k - 1 = 0$ sämtlich unendlich. Auch wenn $r_2 - r_1$ gegen Null konvergiert, d. h. wenn die Ring- oder Streifenbreite unendlich klein wird, gelten dieselben Überlegungen. In diesem Falle ist es aber nicht nötig, daß r_1 und r_2 unendlich groß werden, es ist nur nötig, daß die Breite $r_2 - r_1$ klein ist gegen die Radien r_1 und r_2 oder, was auf dasselbe hinauskommt, gegen den mittleren Ringdurchmesser $r_1 + r_2$. Die Größen $\tau_n^{(w)}$ werden dann unendlich groß.

2. Den andern Grenzfall $k = \infty$ behandeln wir am besten im Anschluß an das physikalische Problem. Der Quotient $k = \frac{r_2}{r_1}$ wird unendlich, wenn entweder a) $r_1 = 0$, $r_2 > 0$ oder b) $r_1 < \infty$, $r_2 = \infty$ ist. Im ersten Falle geht der Ring in einen Vollkreis mit dem Radius r_2 über, im zweiten in den Außenraum eines Kreises mit dem Radius r_1. Der erste Fall ist der physikalisch interessantere.

a) Reduziert sich r_1 auf Null, während r_2 endlich bleibt, so geht Gleichung (1a) wegen $I_n(0) = 0$ (bez. $= 1$ für $n = 0$) und $K_n(0) = -\infty$ über in

$$\frac{I_n(r_2\tau)}{K_n(r_2\tau)} = 0.$$

Dabei ist es gleichgültig, ob τ gleich Null oder endlich oder unendlich ist, wenn nur $\lim_{r_1=0} r_1 \tau = 0$ bleibt. Da nun $K_n(r_2 \tau)$ nur für das Argument Null unendlich groß wird, sonst für keinen endlichen Wert, außer wenn n selber unendlich ist, so wird die Bedingungsgleichung in diesem Fall

$$I_n(r_2 \tau) = 0,$$

sodaß wir tatsächlich die zu Anfang angegebene Umwandlung der Gleichung (1) hier bestätigt finden. Die Wurzeln $\tau_n^{(\nu)}$ bleiben endlich, die Wurzeln $x_n^{(\nu)}$ werden wegen $k - 1 = \infty$ sämtlich gleich Null.

Nur wenn man annimmt, daß auch Werte $\tau_n^{(\nu)}$ existieren, die unendlich sind derart, daß $\lim_{r_1=0} r_1 \tau > 0$ ist, also irgend welche endlichen Werte annimmt, gilt diese Umwandlung nicht mehr, da dann nicht die linke Seite von (1) bez. (1a) verschwindet. In diesem Falle erhält man wegen $r_2 \tau = \infty$

$$\frac{\cos\left(r_2 \tau - \frac{2n+1}{4}\pi\right)}{\sin\left(r_2 \tau - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} = \frac{I_n(r_1 \tau)}{K_n(r_1 \tau)}, \tag{31}$$

wobei die rechte Seite einen vorläufig noch unbekannten endlichen Wert hat. Diese Gleichung besagt aber, da ihre linke Seite mit unendlich wachsendem Argument keinem bestimmten Grenzwert zustrebt, nichts weiter, als daß τ ganz willkürlich bleibt, wenn es nur unendlich groß ist, und daß von dem speziell ausgewählten unendlichen Werte von τ nur die Art des Überganges des r_1 zu Null abhängt, da $r_1 \tau$ denjenigen endlichen Wert annehmen muß, der in die Gleichung eingesetzt die rechte Seite gleich der linken macht. Physikalisch ist der Fall bedeutungslos, da es nicht auf die Art des Unendlichwerdens von τ ankommt, sondern die Tatsache des Unendlichwerdens allein schon genügt.

b) Ist r_1 endlich oder Null, r_2 unendlich groß, so wird unter der Annahme $\tau = 0$ das Produkt $r_1 \tau = 0$ und die Gleichung (1a) liefert wieder die einfachere $I_n(r_2 \tau) = 0$. Das Produkt $\lim_{r_2=\infty} r_2 \tau$ kann also irgend eine Wurzel dieser Gleichung sein; $\tau_n^{(\nu)}$ ist natürlich wegen $r_2 = \infty$ immer Null, desgleichen $x_n^{(\nu)}$.

Es könnte aber auch jeder beliebige endliche Wert von τ mit demselben Recht benutzt werden, da ja der Wert von r_2 ganz unbestimmt ist, wenn man es stetig unbegrenzt wachsend denkt. Man erhält dann wieder dieselbe Gleichung (31), die wir schon unter a) gehabt haben, nur sind diesmal r_1 und τ endlich, r_2 unendlich. Physikalisch bedeutet diese Unbestimmtheit des Wertes von τ, daß der unbegrenzte Außenraum eines Kreises keine bestimmte Eigenschwingungen hat, oder daß

die möglichen Eigenschwingungsperioden unendlich nahe beieinander liegen, eine kontinuierliche Folge bildend. Hier wie unter a) haben wir also einen singulären Fall, der keine bestimmten Wurzeln liefert; die normale Grenzform der Gleichung (1) für $k = \infty$ ist aber $I_n(r_2\tau) = 0$, die ganz bestimmte Wurzeln liefert, welche stetig in die Wurzeln der allgemeinen Gleichung übergehen. Die Form dieser Wurzeln $r_2\tau$ ergibt sich aus dem Produkt $(r_2 - r_1)\tau$ der allgemeinen Gleichung, wenn man darin r_1 gegen r_2 vernachlässigt. Wegen $k = \infty$ werden hierbei alle $x_n^{(w)}$ Null, während die Produkte $r_2\tau$ endlich sind; die Wurzeln $\tau_n^{(w)}$ selbst sind nur dann gleich Null, wenn r_2 unendlich ist.

Die Wurzeln der Gleichung $I_n(r_2\tau) = 0$ oder $I_n(\xi) = 0$ lassen sich mit Hilfe der Mac Mahonschen Formel (27) berechnen. Hierbei erhält man zunächst die Produkte $r_2\tau$, aus denen man rückwärts die Wurzeln $x_n^{(w)}$ ableiten muß, die hier sämtlich gleich Null sind. Es ist nun für die Anwendungen überhaupt zweckmäßiger statt der $x_n^{(w)}$ von vornherein die Produkte $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$, die man aus jenen mit Gleichung (21) erhält, als Wurzeln der Gleichung (1a) zu betrachten. Rechnet man so die Werte der Tabelle 2 um und fügt für $k = \infty$ die mit der Reihe (27) für $I_n(\xi) = 0$ berechneten Werte hinzu, so erhält man Tabelle 3. In dieser sind die Werte, welche für den Grenzfall $k = 1$ gelten, weggelassen, da sie alle ganzzahlige Vielfache $w\pi$ von π sind. Die Einrichtung und die Bezeichnung der Fehlergrenzen sind dieselben wie bei Tabelle 2. Zu der Berechnung der Wurzeln von $I_n(\xi) = 0$ ist zu bemerken, daß ich sie nur für die Parameterwerte $n = \frac{3}{2}$, 1, $\frac{5}{2}$ ausgeführt habe; für $n = \frac{1}{2}$ ist überhaupt keine Rechnung nötig, da die Wurzeln ganzzahlige Vielfache von π sind, und für $n = 0$ und $n = 1$ liegen sehr genaue Berechnungen von Meißel[1]) vor. Für $n = \frac{3}{2}$ habe ich früher die Werte von Lord Rayleigh[2]) benutzt, der die Wurzeln der Gleichung $\operatorname{tg} x = x$, in welche die Gleichung (3) für $n = \frac{3}{2}$ übergeht, unabhängig berechnet hat. Bei der hier durchgeführten Neuberechnung hat sich gezeigt, daß zwei von den Rayleighschen Zahlen nicht richtig sind, wodurch auch die entsprechenden Zahlen meiner früheren Tabelle[3]) fehlerhaft geworden sind.

1) E. Meißel, Abhandl. d. Berl. Akad. d. Wissensch. 1888 (für $n = 0$); Programm der Oberrealschule in Kiel 1890 (für $n = 1$); beide Tabellen bei Gray und Mathews l. c. S. 244 und 280.

2) Lord Rayleigh (I. W. Strutt), Theorie des Schalles, übersetzt von Neesen I. S. 369. 1879. Die vierte Wurzel muß heißen $4{,}4774\pi$ statt $4{,}4747\pi$ und die fünfte $5{,}4815\pi$ statt $5{,}4818\pi$. Im ersten Falle handelt es sich um Verstellung zweier Zahlen, im zweiten wahrscheinlich um Übersehen einer Null im Logarithmus. Der Fehler ist auch in die zweite (englische) Ausgabe (London 1894) übergegangen.

3) A. Kalähne, Ann. d. Phys. 19. S. 89. 1906. Die beiden infolge des

Tabelle 2.

Wurzeln $x_n^{(w)}$ der Gleichung $\frac{I_n(x)}{K_n(x)} = \frac{I_n(kx)}{K_n(kx)}$.

k	$w=1$	$w=2$	$w=3$	$w=4$	$w=5$	$w=6$	
1,2	15,7014	31,4126	47,1217	62,8302	78,5385	94,2467	$n=0$
1,5	6,2702 (− 0,3)	12,5598	18,8451	25,1294	31,4133	37,6969	
2,0	3,1228 (− 6,2)	6,2734 (−0,2)	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
1,2	15,7080	31,4159	47,1239	62,8319	78,5398	94,2478	$n=\frac{1}{2}$
1,5	6,2832	12,5664	18,8496	25,1327	31,4159	37,6991	
2,0	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	
1,2	15,7277	31,4259	47,1305	62,8368	78,5438	94,2511	$n=1$
1,5	6,3218 (+ 0,9)	12,5861	18,8628	25,1427	31,4239	37,7057	
2,0	3,1971 (+15,7)	6,3124 (+0,5)	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
1,2	15,7607	31,4424	47,1416	62,8451	78,5504	94,2566	$n=\frac{3}{2}$
1,5	6,3858 (+ 2,2)	12,6190	18,8848	25,1592	31,4371	37,7168	
2,0	3,2866 (+33,6)	6,3607 (+1,0)	9,4772 (+0,1)	12,6059	15,7397	18,8760	
1,2	15,8066	31,4656	47,1570	62,8567	78,5597	94,2644	$n=2$
1,5	6,4742 (+ 3,9)	12,6648 (+0,1)	18,9156	25,1823	31,4556	37,7322	
2,0	3,4063 (+45,6)	6,4277 (+1,4)	9,5228 (+0,2)	12,6404	15,7673	18,8991	
1,2	15,8655 (+ 0,2)	31,4953	47,1769	62,8716	78,5716	94,2743	$n=\frac{5}{2}$
1,5	6,5860 (+ 6,8)	12,7235 (+0,2)	18,9551	25,2121	31,4795	37,7521	
2,0	3,5514 (+49,6)	6,5130 (+1,6)	9,5813 (+0,2)	12,6846	15,8029	18,9288	

Die in Klammern beigefügten kleinen Zahlen geben den Wert des vierten noch zur Berechnung benutzten Gliedes der Reihe (26) in Einheiten der vierten Dezimale an.

Für $k = 1$ sind alle Wurzeln $x_n^{(w)} = \infty$, für $k = \infty$ sind alle Wurzeln $x_n^{(w)} = 0$.

Aus der Tabelle entnimmt man über den Verlauf der Funktion $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ folgendes:

1. Für Parameter $n < \frac{1}{2}$ ist die $w$te Wurzel kleiner als $w\pi$, für $n > \frac{1}{2}$ ist sie größer als $w\pi$, für $n = \frac{1}{2}$ ist sie gleich $w\pi$; dieser Parameterwert $n = \frac{1}{2}$ stellt sich also als ein singulärer dar, besonders auch deshalb weil bei ihm keine Abhängigkeit von k vorhanden ist.

Fehlers in den Rayleighschen Zahlen fehlerhaften Werte stehen in der Rubrik $n = \frac{3}{2}$ für $k = \infty$ unter $w = 4$ und $w = 5$ der Tabelle 6. Es muß heißen 14,0662 statt 14,0577 und 17,2208 statt 17,2216. Wie ich nachträglich gefunden habe, hat bereits E. Lommel (Abh. d. bayr. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Kl. **15**. S. 651. 1886. Tabelle IVa) die ersten 16 Wurzeln dieser Gleichung auf 6 Dezimalen berechnet.



Tabelle 3.

Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ der Gleichung $\frac{I_n(r_1\tau)}{K_n(r_1\tau)} = \frac{I_n(r_2\tau)}{K_n(r_2\tau)}$; $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)} = (k-1)x_n^{(w)}$ (vgl. Tabelle 2).

k	$w=1$	$w=2$	$w=3$	$w=4$	$w=5$	$w=6$	
1,2	3,1408	6,2825	9,4243	12,5660	15,7077	18,8493	$n=0$
1,5	3,1351 (— 0,2)	6,2799	9,4226	12,5647	15,7066	18,8485	
2,0	3,1228 (— 6,2)	6,2734 (—0,2)	9,4182	12,5614	15,7040	18,8462	
∞	2,4048	5,5201	8,6537	11,7915	14,9309	18,0711	
1,2	3,1416	6,2832	9,4248	12,5664	15,7080	18,8496	$n=\frac{1}{2}$
1,5	"	"	"	"	"	"	
2,0	"	"	"	"	"	"	
∞	"	"	"	"	"	"	
1,2	3,1455	6,2852	9,4261	12,5674	15,7088	18,8502	$n=1$
1,5	3,1609 (+ 0,4)	6,2931	9,4314	12,5718	15,7119	18,8529	
2,0	3,1971 (+15,7)	6,3124 (+0,5)	9,4445	12,5812	15,7199	18,8595	
∞	3,8317	7,0156	10,1735	13,3237	16,4706	19,6159	
1,2	3,1521	6,2885	9,4283	12,5690	15,7101	18,8513	$n=\frac{3}{2}$
1,5	3,1929 (+ 1,1)	6,3095	9,4424	12,5796	15,7186	18,8584	
2,0	3,2866 (+33,6)	6,3607 (+1,0)	9,4772 (+0,1)	12,6059	15,7397	18,8760	
∞	4,4934 (— 0,3)	7,7253	10,9041	14,0662	17,2208	20,3713	
1,2	3,1613	6,2931	9,4314	12,5718	15,7119	18,8529	$n=2$
1,5	3,2371 (+ 2,0)	6,3324	9,4578	12,5912	15,7278	18,8661	
2,0	3,4063 (+45,6)	6,4277 (+1,4)	9,5228 (+0,2)	12,6404	15,7673	18,8991	
∞	5,1357 (— 2,3)	8,4172 (—0,1)	11,6198	14,7960	17,9598	21,1170	
1,2	3,1731	6,2991	9,4354	12,5743	15,7143	18,8549	$n=\frac{5}{2}$
1,5	3,2930 (+ 3,4)	6,3617 (+0,1)	9,4775	12,6060	15,7397	18,8760	
2,0	3,5514 (+49,6)	6,5130 (+1,6)	9,5813 (+0,2)	12,6846	15,8029	18,9288	
∞	5,7636 (— 8,3)	9,0950 (—0,5)	12,3229	15,5146	18,6890	21,8539	

Die in Klammern beigefügten kleinen Zahlen geben schätzungsweise die Unsicherheit der betr. Werte in Einheiten der vierten Dezimale an. Für $k = 1$ sind alle Wurzeln $(k-1)x_n^{(w)} = w\pi$.

2. Für Parameter $n < \frac{1}{2}$ nehmen die Werte bei konstantem w mit wachsendem k ab, für $n > \frac{1}{2}$ nehmen sie zu. Das Intervall, welches $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ durchläuft, wenn k von 1 bis ∞ wächst, nimmt mit wachsendem w langsam zu, mit wachsendem n steigt es schnell.

3. Bei konstantem k ist die Differenz zweier aufeinander folgenden Wurzeln kleiner oder größer als π, nähert sich aber mit wachsendem w der Grenze π. Ob diese Differenz kleiner oder größer als π ist, hängt von dem Werte des k ab und davon, ob n größer oder kleiner als $\frac{1}{2}$ ist.

5. Spezielle Methode zur Berechnung der Wurzeln in gewissen Fällen.

Gewährt nun auch die Tabelle 3 mit ihren 5 Werten k ($k = 1$ eingeschlossen) und den zugehörigen Wurzeln einen Überblick über den Verlauf von $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ als Funktion der Ringkrümmung k im allgemeinen, so genügen diese Werte doch noch nicht, um Einzelheiten des Verlaufes festzustellen. Dazu braucht man sowohl für Werte von k nahe bei 1 wie auch für einige große k die zugehörigen Wurzeln. Jene könnte man wie die andern Werte der Tabelle 2 mit Reihe (26) berechnen, für diese aber braucht man andre Methoden. Eine solche sehr einfache, auch für kleine k brauchbare ist die folgende, die immer anwendbar ist, wenn die Wurzeln der Gleichungen $I_n(\xi) = 0$ oder $K_n(\xi) = 0$ bekannt sind, oder wenn Tafeln für diese Funktionen existieren, aus denen man die Lage der Nullstellen mit hinreichender Genauigkeit entnehmen kann.

Betrachtet man wieder den Grenzfall des Ringes, bei dem sich der innere Kreis r_1 auf Null reduziert hat, d. h. den Vollkreis, so geht für diesen die Funktion R (vgl. 18a) in $I_n(r\tau) = I_n(\xi)$ über. Diese Funktion hat in dem Kreisgebiet eine Anzahl konzentrischer Kreise als Nulllinien, deren Radien im Verhältnis der aufeinanderfolgenden Wurzeln von $I_n(\xi) = 0$ stehen. Zwei beliebige von ihnen kann man als Grenzlinien eines Ringes benutzen, an denen dann die Funktion R verschwindet. Im Innern dieses Ringes hat R ebenfalls gewisse Nulllinien, wenn die Grenzlinien nicht zwei benachbarten Wurzeln von $I_n(\xi)$ angehören. Die Anzahl dieser inneren Nulllinien ist $\beta - \alpha - 1$, wenn α und β die Ordnungszahlen der Wurzeln der Grenzkreise sind, wobei $\beta > \alpha$ angenommen ist. Das Verhältnis der Ringradien ist nach dem oben Gesagten offenbar

$$k = \frac{\xi_n^{(\beta)}}{\xi_n^{(\alpha)}}. \tag{32}$$

Nun entspricht aber die kleinere Wurzel $\xi_n^{(\alpha)}$ dem inneren Radius, d. h. dem Werte $x_n^{(w)}$ der Gleichung (1) oder $r_1\tau$, die größere $\xi_n^{(\beta)}$ dem äußeren Radius, d. h. dem Werte $kx_n^{(w)}$ oder $r_2\tau$. Daraus folgt sofort

$$(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)} = (k-1)x_n^{(w)} = \xi_n^{(\beta)} - \xi_n^{(\alpha)}. \tag{33}$$

Hierbei ist

$$w = \beta - \alpha;$$

denn $w - 1$ ist im allgemeinen Falle die Anzahl der inneren Nulllinien des Ringgebietes, die andrerseits in dem vorliegenden speziellen Falle gleich $\beta - \alpha - 1$ ist.

Man kann also aus den Wurzeln der Gleichung $I_n(\xi) = 0$ beliebig viele Wurzeln der Gleichung (1) bez. (1a) ableiten, jedoch nur für bestimmte irrationale Werte von k. Auch erhält man zu jedem k nur eine einzige Wurzel von bestimmter Ordnungszahl w. Je größer diese ist, je weiter also die Wurzeln $\xi_n^{(\alpha)}$ und $\xi_n^{(\beta)}$ auseinanderliegen, desto größer wird im allgemeinen auch k; man erhält bei großem w also leicht auch für große k die Wurzeln. Bei kleinem w, z. B. $w = 1$, wo es besonders interessant und wichtig ist Werte für große k zu besitzen, ist durch die Lage der kleinsten Wurzel von $I_n(\xi) = 0$ eine Grenze für k gezogen, über die man nicht hinauskommt. Diese Grenze liegt um so höher, je näher die erste Wurzel $\xi_n^{(\alpha)}$ bei Null liegt; daher sind die Verhältnisse am günstigsten bei $n = 0$, während die Methode mit steigendem n immer weniger brauchbar wird. Nun ist man aber nicht auf die Funktion $I_n(\xi)$ allein angewiesen, sondern kann auch die Neumannsche Zylinderfunktion oder lineare Verbindungen beider benutzen. Diese Funktionen werden zwar alle im Mittelpunkt des Kreises $r_1 = 0$ unendlich, haben dort also keine physikalische Bedeutung; da aber dieser Punkt aus der Betrachtung ganz herausfällt, und nur die Werte innerhalb des Ringgebietes benutzt werden, so gelten dieselben Überlegungen auch für diese Funktionen. Einige so berechnete Wurzeln habe ich in den Tabellen 7 bis 9 zusammengestellt. Man kann aber diese Rechnung leider nur für $n = 0$ und $n = 1$ ausführen, für welche Parameterwerte Tafeln bez. Wurzelberechnungen vorliegen; für $I_0(\xi)$ und $I_1(\xi)$ die Hansensche[1]) bez. die neuere Meißelsche[2]), für die Neumannsche Funktion $Y_0(\xi)$ und $Y_1(\xi)$ die Tafel von Smith.[3]) Die Lommelschen Tafeln der Poissonschen Funktionen für $n = \frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ bis $\frac{69}{2}$ schreiten nur nach ganzzahligen Argumenten fort, sind also nicht genau genug. Die Funktion $Y_n(\xi)$ ist hier natürlich ebenso am Platz wie $K_n(\xi)$, nur liegen ihre Wurzeln an anderen Stellen, wodurch man auch zu andern Werten k gelangt. In der allgemeinen Gleichung (1) ist es, wie man leicht erkennt, überhaupt gleichgültig, welche speziellen partikulären Integrale man benutzt. Die Tabellen 4 bis 6 geben einige Wurzeln der Funktionen $I_0(\xi)$, $I_1(\xi)$, $Y_0(\xi)$, $Y_1(\xi)$ und einiger einfacher linearer Verbindungen derselben. Letztere, sowie die Wurzeln von $Y_0(\xi)$ und $Y_1(\xi)$ sind durch graphische

1) Abgedruckt bei E. Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen. S. 127.

2) E. Meißel, Abhandl. d. Berl. Akad. der Wissensch. 1888. Abgedruckt bei Gray und Mathews l. c. S. 247.

3) B. A. Smith, The Messenger of Mathematics, **26.** 1897. S. 98—101.

Interpolation erhalten, also weniger genau. Dem entspricht auch die geringere Genauigkeit in den Werten k und $x_n^{(w)}$, die hieraus berechnet werden können und zum Teil in den Tabellen 7 bis 9 aufgeführt sind.

Tabelle 4.

α	Wurzeln ξ der Gleichung $I_0(\xi) = 0$ $\xi_0^{(\alpha)}$	$I_1(\xi) = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$
1	2,40 483	3,83 171
2	5,52 007	7,01 559
3	8,65 373	10,17 347
4	11,79 153	13,32 369
5	14,93 092	16,47 063
6	18,07 106	19,61 586

Tabelle 5.

α	Wurzeln ξ der Gleichung			
	$Y_0 = 0$ $\xi_0^{(\alpha)}$	$I_0 + Y_0 = 0$ $\xi_0^{(\alpha)}$	$I_0 + \frac{1}{2} Y_0 = 0$ $\xi_0^{(\alpha)}$	$I_0 + \frac{1}{3} Y_0 = 0$ $\xi_0^{(\alpha)}$
1	$0{,}826_0$	$0{,}356_5$	$0{,}135_0$	$0{,}049_7$
2	$3{,}88_5$	$3{,}34_4$	$3{,}03_5$	$2{,}86_5$
3	$7{,}01_3$			
4	$10{,}14_9$			

Tabelle 6.

α	Wurzeln ξ der Gleichung						
	$Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$	$I_1 + Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$	$I_1 + \frac{1}{2} Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$	$I_1 + \frac{1}{3} Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$	$I_1 + \frac{1}{4} Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$	$I_1 + \frac{1}{10} Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$	$I_1 + \frac{1}{20} Y_1 = 0$ $\xi_1^{(\alpha)}$
1	$2{,}11_8$	$1{,}52_2$	$1{,}15_5$	$0{,}941_3$	$0{,}805_5$	$0{,}484_0$	$0{,}332_0$
2	$5{,}35_5$	$4{,}80_2$	$4{,}48_2$	$4{,}30_8$	$4{,}20_4$	$3{,}99_0$	$3{,}91_2$
3	$8{,}52_1$						

Tabelle 7.

w	$k = \frac{\xi_n^{(1+w)}}{\xi_n^{(1)}}$	$\xi_n^{(1+w)} - \xi_n^{(1)}$	$k = \frac{\xi_n^{(2+w)}}{\xi_n^{(2)}}$	$\xi_n^{(2+w)} - \xi_n^{(2)}$	$k = \frac{\xi_n^{(3+w)}}{\xi_n^{(3)}}$	$\xi_n^{(3+w)} - \xi_n^{(3)}$	
1	2,2954	3,1152	1,5677	3,1337	1,3625	3,1378	$I_0(\xi) = 0$, $n=0$
2	3,5985	6,2489	2,1361	6,2715	1,7253	6,2772	
3	4,9033	9,3867	2,7048	9,4108	2,0882	9,4173	
4	6,2087	12,5361	3,2737	12,5510			
1	4,703	3,059	1,805	3,128	1,447	3,136	$Y_0(\xi) = 0$, $n=0$
2	8,490	6,187	2,612	6,264			
3	12,287	9,323					
1	1,8309	3,1839	1,4501	3,1579	1,3096	3,1502	$I_1(\xi) = 0$, $n=1$
2	2,6551	6,3418	1,8992	6,3081	1,6190	6,2972	
3	3,4772	9,4920	2,3478	9,4550	1,9281	9,4424	
4	4,2986	12,6389	2,7960	12,6003			
1	2,528	3,237	1,591	3,166			$Y_1(\xi) = 0$, $n=1$
2	4,023	6,403					

Die Differenzen $\xi_n^{(1+w)} - \xi_n^{(1)}$ bez. $\xi_n^{(2+w)} - \xi_n^{(2)}$ bez. $\xi_n^{(3+w)} - \xi_n^{(3)}$ in der 2., 4. und 6. Kolumne der Tabelle 7 sind nach dem früher Gesagten die Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)} = (k-1)x_n^{(w)}$ der Gleichung (1) bez. (1a) für die jeweils danebenstehenden Krümmungswerte k. Außer ihnen lassen sich speziell aus den Wurzelwerten von $I_0(\xi) = 0$ und $I_1(\xi) = 0$ noch viele andere berechnen. Die meisten Werte haben wir hier natürlich für die Wurzeln niederster Ordnung $w = 0$ erhalten, da die Anzahl der uns bekannten Wurzeln ξ der Funktionen $Y_0(\xi)$ und $Y_1(\xi)$ nur beschränkt ist, der Fall $\beta - \alpha = 1$ aber am meisten Kombinationen zuläßt. Wir wollen für diesen Fall $w = 1$ das Verhalten der Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ von Gleichung (1a), die ja Funktionen von n und k darstellen, in bezug auf diese Abhängigkeit näher untersuchen. Dazu genügen die in den Tabellen 3 und 7 vorhandenen Werte noch nicht vollkommen. Um besonders auch für große k noch einige Wurzeln zu erhalten, benutzen wir für die Parameter $n = 0$ und $n = 1$ die Tabellen 5 und 6, aus denen sich die gesuchten Werte nach der in Tabelle 7 befolgten Methode ergeben. Sie sind in den Tabellen 8 und 9 zusammengestellt. Die schon in Tabelle 7 enthaltenen Werte, die aus den Wurzeln von $Y_0(\xi)$ und $Y_1(\xi)$ folgen, sind weggelassen.

Tabelle 8.

	$k = \frac{\xi_0^{(2)}}{\xi_0^{(1)}}$	$\xi_0^{(2)} - \xi_0^{(1)}$
$I_0(\xi) + Y_0(\xi) = 0$	9,38	2,988
$I_0(\xi) + \frac{1}{2} Y_0(\xi) = 0$	22,48	2,900
$I_0(\xi) + \frac{1}{3} Y_0(\xi) = 0$	57,6	2,815

Tabelle 9.

	$k = \frac{\xi_1^{(2)}}{\xi_1^{(1)}}$	$\xi_1^{(2)} - \xi_1^{(1)}$
$I_1(\xi) + Y_1(\xi) = 0$	3,155	3,280
$I_1(\xi) + \frac{1}{2} Y_1(\xi) = 0$	3,881	3,327
$I_1(\xi) + \frac{1}{3} Y_1(\xi) = 0$	4,577	3,367
$I_1(\xi) + \frac{1}{4} Y_1(\xi) = 0$	5,219	3,399
$I_1(\xi) + \frac{1}{10} Y_1(\xi) = 0$	8,244	3,506
$I_1(\xi) + \frac{1}{20} Y_1(\xi) = 0$	11,78	3,580

6. Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ für den Parameter $n = \frac{3}{2}$; Zusammenstellung der Werte für die Parameter $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$.

Damit die Abhängigkeit der Wurzeln vom Parameter n klarer hervortritt, berechnen wir außer für $n = 0$, $n = \frac{1}{2}$, $n = 1$, für welche Werte wir jetzt eine genügende Anzahl Wurzeln besitzen, auch noch für den Wert $n = \frac{3}{2}$ einige Wurzeln. Die Bedingungsgleichung (1a) nimmt in diesem Falle eine Gestalt an, in der nur trigonometrische Funktionen vorkommen, und die sich nach einem Verfahren, auf das mich Herr Professor Sommerfeld aufmerksam gemacht hat, leicht auflösen läßt. Gleichung (1a) geht nämlich durch Einführung der Werte für $I_{\frac{3}{2}}$ und $K_{\frac{3}{2}}$ aus (17) über in

$$\text{(34)} \qquad \operatorname{tg}(r_2\tau - r_1\tau) = \frac{r_2\tau - r_1\tau}{1 + r_2\tau \cdot r_1\tau}.$$

Setzt man

$$\text{(35)} \qquad r_2\tau = \operatorname{tg}\alpha \quad \text{und} \quad r_1\tau = \operatorname{tg}\beta,$$

so wird dieselbe

$$\operatorname{tg}(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$$

oder, indem man zu den Winkeln übergeht,

$$(36) \qquad \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \alpha - \beta + w\pi. \qquad (w = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

Man braucht also nur die Kurven

$$(37) \qquad \begin{cases} A(\tau) = \operatorname{tg}\alpha - (\alpha + w\pi) \\ B(\tau) = \operatorname{tg}\beta - \beta \end{cases}$$

zu zeichnen, was mit Hilfe genauer Tafeln für die Tangensfunktion leicht geschehen kann, und ihre Schnittpunkte mit einander zu bestimmen. $A(\tau)$ hat in dieser Darstellung unendlich viele Zweige, $B(\tau)$ nur einen; man könnte auch das Umgekehrte annehmen oder beiden Funktionen durch Hinzufügen ganzzahliger Vielfacher von π unendlich viele Zweige geben, ohne an dem Resultat etwas Wesentliches zu ändern. Die additiv hinzugefügten ganzzahligen Vielfachen von π bestimmen die Ordnungszahl der Wurzel. In der von uns gewählten Form (36) bez. (37) hat w dieselbe Bedeutung wie das bisher schon als Ordnungszahl benutzte w, so daß die Verwendung desselben Buchstabens gerechtfertigt erscheint. Nimmt man in der angedeuteten Konstruktion der Kurven $A(\tau)$ und $B(\tau)$ die Werte von $r_1\tau$ als Abszissen, so erhält man zunächst statt der gesuchten Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(w)}$ die Produkte $r_1\tau_n^{(w)}$, aus denen man aber leicht jene ableiten kann. Denn es ist

$$(38) \qquad k - 1 = \frac{r_2 - r_1}{r_1}, \quad \text{also} \quad (r_2 - r_1)\tau_n^{(w)} = (k-1) r_1 \tau_n^{(w)}.$$

Nach dieser Methode habe ich einige Wurzeln erster Ordnung ($w = 1$) der Gleichung (34) bestimmt, indem ich die Differenz $A(\tau) - B(\tau)$ in der Nähe der annähernd bekannten Wurzeln berechnet und aus den so gefundenen Werten die genauen Wurzelwerte graphisch interpoliert habe. Es genügt den Näherungswert $r_1\tau$ so genau zu kennen, daß der zugehörige Winkel β bis auf 10 Winkelminuten bestimmt ist. Innerhalb dieses Intervalls kann man lineare Abhängigkeit zwischen den Änderungen des Tangens und des Argumentes annehmen.

Die so berechneten Wurzeln sind in Tabelle 12 zusammengestellt. In ganz derselben Weise findet man die bisher für $n = 0$ und $n = 1$ berechneten Werte zur besseren Übersicht in den Tabellen 10 und 11 vereinigt. Die Zahlen in den Kolumnen mit den Überschriften $\frac{1}{q}$ und

q haben wie die k die Bedeutung, daß sie die Ringkrümmung angeben. Es ist

$$q = \frac{k+1}{k-1} = \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}; \tag{39}$$

q stellt also das Verhältnis des mittleren Ringdurchmessers $r_2 + r_1$ zur Ringbreite $r_2 - r_1$ dar.

Tabelle 10.

Wurzeln 1. Ordnung von $\frac{I_0(x)}{K_0(x)} = \frac{I_0(kx)}{K_0(kx)}$

$\frac{1}{q}$	q	k	$(r_2 - r_1)\tau_0^{(1)} = (k-1)x_0^{(1)}$
0	∞	1	3,1416
0,0909...	11	1,2	3,1403
0,1535	6,516	1,3626	3,1378
0,1827	5,474	1,447	3,136
0,2	5	1,5	3,1351
0,2211	4,523	1,5677	3,1337
0,2870	3,484	1,805	3,128
0,3333...	3	2	3,1228
0,3931	2,544	2,2954	3,1153
0,6493	1,540	4,703	3,059
0,8073	1,239	9,38	2,988
0,915	1,093	22,48	2,900
0,966	1,035	57,6	2,815
1	1	∞	2,4048

Die Genauigkeit der Zahlen in den Tabellen 10 bis 12 ist nur bei denjenigen Werten direkt angebbar, die aus der Tabelle 3 entnommen oder aus den sehr genau bekannten Wurzeln der Gleichungen $I_0(\xi) = 0$ und $I_1(\xi) = 0$ berechnet sind. Bei den graphisch interpolierten ist der mögliche Fehler geschätzt und beträgt im Mittel etwa ein bis zwei Tausendstel bei $n = 0$ und $n = 1$, bei $n = \frac{3}{2}$ ist er jedoch im allgemeinen kleiner. Um seine Größe annähernd zu kennzeichnen, sind hier dieselben Bezeichnungen benutzt wie bei den Tabellen 2 und 3 (kleine eventuell unterstrichene Ziffern). Ich bemerke jedoch ausdrücklich, daß diese Fehlerabschätzung nicht so streng ist wie in den Zahlen der Tabellen 2 und 3; die Tabellen 10 bis 12 sollen wesentlich zur vorläufigen Orientierung dienen. Für die meisten physikalischen Zwecke reicht

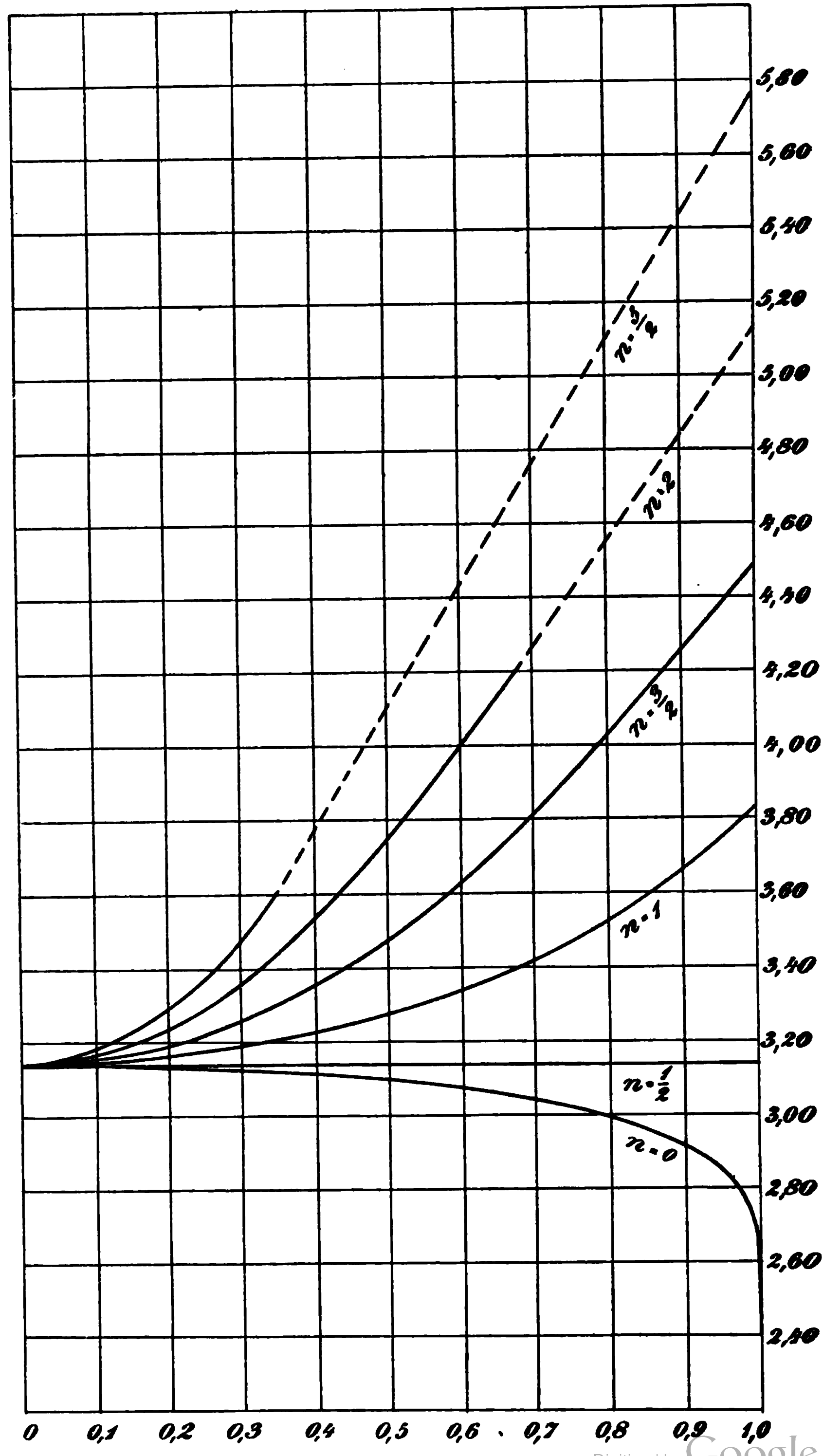
Tabelle 11.

Wurzeln 1. Ordnung von $\frac{I_1(x)}{K_1(x)} = \frac{I_1(kx)}{K_1(kx)}$

$\frac{1}{q}$	q	k	$(r_2 - r_1)\tau_1^{(1)} = (k-1)x_1^{(1)}$
0	∞	1	3,1416
0,0909...	11	1,2	3,1455
0,1340	7,460	1,3096	3,1502
0,1837	5,443	1,4501	3,1579
0,2	5	1,5	3,1609
0,2281	4,384	1,591	3,166
0,2935	3,407	1,8309	3,1839
0,3333...	3	2	3,197
0,4331	2,309	2,528	3,237
0,5186	1,928	3,155	3,280
0,5902	1,694	3,881	3,327
0,6414	1,559	4,577	3,367
0,6784	1,474	5,219	3,399
0,7836	1,276	8,244	3,506
0,8435	1,185	11,78	3,580
1	1	∞	3,8317

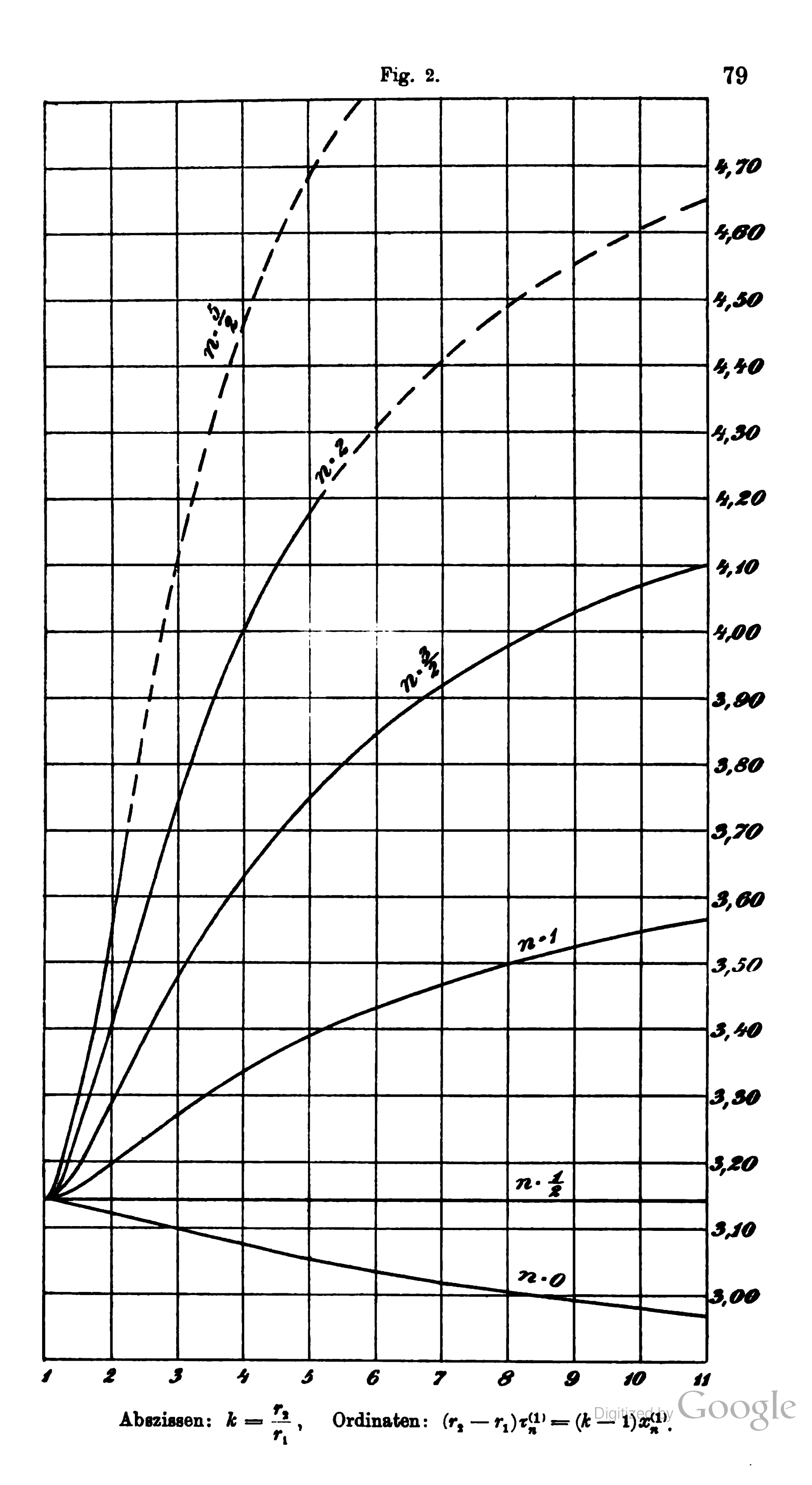
die bei ihnen innegehaltene Genauigkeit vollständig aus, jedoch genügt sie vielfach nicht, um bindende mathematische Schlüsse daraus zu ziehen. Mehrere Sätze über das Verhalten der Wurzeln als Funktionen von k und n lassen sich nur als Vermutungen aus den Zahlen der Tabellen entnehmen. Da aber eingehende mathematische Untersuchungen auf diesem Gebiete noch ganz fehlen, so können unsre gewissermaßen empirisch gefundenen Sätze vorläufig die Stelle streng begründeter einnehmen und als Wegweiser für weitere Untersuchungen dienen. Der folgende Abschnitt (7.) enthält die Folgerungen, die sich aus dem vorhandenen Zahlenmaterial in Verbindung mit der graphischen Darstellung ziehen lassen. Die Wurzeln erster Ordnnng $(r_2-r_1)\tau_n^{(1)}=(k-1)x_n^{(1)}$ sind in den Figuren 1 und 2 dargestellt für die Parameter $n = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, in Figur 1 als Funktionen von $\frac{1}{q} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$, in Figur 2 als Funktionen von $k = \frac{r_2}{r_1}$. Die gestrichelten Teile der Kurven für $n = 2$ und $n = \frac{5}{2}$ in Figur 1 bedeuten, daß in diesem Gebiet der Verlauf der Kurven wegen mangelnder Daten nicht genügend sichergestellt ist.

Fig. 1.



Abszissen: $\frac{1}{q} = \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1}$, Ordinaten: $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)} = (k - 1)x_n^{(1)}$.

Fig. 2.



Abszissen: $k = \frac{r_2}{r_1}$, Ordinaten: $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)} = (k - 1)x_n^{(1)}$.

Tabelle 12.

Wurzeln 1. Ordnung von $\frac{I_{\frac{3}{2}}(x)}{K_{\frac{3}{2}}(x)} = \frac{I_{\frac{3}{2}}(kx)}{K_{\frac{3}{2}}(kx)}$

$\frac{1}{q}$	q	k	$(r_2 - r_1)x^{(1)}_{\frac{3}{2}} = (k-1)x^{(1)}_{\frac{3}{2}}$
0	∞	1	3,1416
0,0909...	11	1,2	3,1521
0,1304	7,666...	1,3	—
0,1666...	6	1,4	—
0,2	5	1,5	3,1929
0,25	4	1,666...	3,2221
0,2857	3,5	1,8	—
0,3333...	3	2	3,286
0,4	2,5	2,333...	3,3556
0,5	2	3	3,4744
0,6	1,666...	4	3,6287
0,8	1,25	9	4,0288
1	1	∞	4,4934

Dasselbe gilt übrigens für alle Kurven in unmittelbarer Nähe des Wertes $\frac{1}{q} = 1$, der dem Werte $k = \infty$ entspricht. Zur Erhöhung der Genauigkeit habe ich außerdem für $n = 2$ noch eine Wurzel bestimmt, indem ich nach der bekannten Fundamentalformel der Zylinderfunktionen $I_{n+1}(x) = \frac{2}{x} I_n(x) - I_{n-1}(x)$ die Funktionswerte von I_2 und Y_2 für die Argumente 5, 1; 5, 2; 5, 3 5, 4 und 1 berechnet habe. Die Funktion $I_2 + \frac{1}{22,45} Y_2$, die man aus diesen Werten bilden kann, besitzt die beiden ersten Nullstellen 1 und 5,210, aus denen man nach der Methode des § 5 die Wurzel 4,210, zum Werte $k = 5{,}210$ $\left(\text{bez. } \frac{1}{q} = 0{,}6779\right)$ gehörend, findet.

Aus den Figuren habe ich rückwärts die Wurzelwerte für einige ganzzahlige k entnommen und sie mit den bis $k = 2$ hinauf berechneten Werten in Tabelle 13 zusammengestellt. Selbstverständlich ist die Genauigkeit dadurch weiter verringert worden, man kann sie auf 1 bis 2 Tausendtel schätzen bei kleineren n, bei größeren n kann der Fehler diese Grenze auch übersteigen.

Tabelle 13.

Wurzeln 1. Ordnung $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)} = (k-1)x_n^{(1)}$ der Gleichung

$$\frac{I_n(r_1\tau)}{K_n(r_1\tau)} = \frac{I_n(r_2\tau)}{K_n(r_2\tau)}$$

$\frac{1}{q}$	k	$n=0$	$n=\frac{1}{2}$	$n=1$	$n=\frac{3}{2}$	$n=2$	$n=\frac{5}{2}$
0	1	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416	3,1416
0,0909...	1,2	3,1403	„	3,1455	3,1521	3,1613	3,1731
0,2	1,5	3,1351	„	3,1609	3,1929	3,2371	3,2930
0,3333...	2	3,1228	„	3,1971	3,2866	3,4063	3,5514
0,5	3	3,100	„	3,270	3,4744	3,740	4,105
0,6	4	3,076	„	3,331	3,6287	4,005	4,45
0,6666...	5	3,054	„	3,388	3,749	4,180	4,68
0,7143	6	3,035	„	3,430	3,842	4,307	4,88
0,75	7	3,019	„	3,467	3,918	4,408	4,94
0,7777...	8	3,006	„	3,499	3,978	4,488	5,04
0,8	9	2,992	„	3,525	4,029	4,550	5,11
0,8181...	10	2,981	„	3,548	4,069	4,605	5,17
0,8333...	11	2,970	„	3,567	4,100	4,650	5,22
⋮	.	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
0,9	19	2,92	„	3,66	4,25	4,84	5,48
⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
0,95	39	2,84	„	3,74	4,37	4,99	5,60
⋮		⋮		⋮	⋮	⋮	⋮
1	∞	2,4048	„	3,8317	4,4934	5,1357	5,7636

7. Das Verhalten der Wurzeln als Funktionen von n und k bez. q.

Ob man die Wurzeln $(k-1)x_n^{(w)}$ als Funktionen von k oder von $\frac{1}{q}$ betrachten will, ist natürlich ganz gleich. Im allgemeinen wird k direkt gegeben sein, so daß die Wahl dieser Größe als unabhängiger Variabeln das Ursprünglichere ist. Die andre Darstellung bietet jedoch den Vorteil, daß man den Funktionsverlauf für alle möglichen Krümmungswerte in einer endlichen Zeichnung darstellen kann, da $\frac{1}{q}$ sich zwischen den Grenzen 0 und 1 bewegt, wenn k alle Werte zwischen 1 und ∞ annimmt. Ebensogut aber könnte man den

reziproken Wert q als unabhängige Variable nehmen, es kommen dann gewisse Eigenschaften besser zutage, die in den beiden anderen Darstellungen nicht so ausgeprägt sind; doch muß man dabei wieder auf vollständige Darstellung im Endlichen verzichten, da q von 1 bis ∞ wächst, wenn k von ∞ bis 1 herabsinkt.

Außer den drei Sätzen, die wir schon in § 4 aus der Tabelle 3 direkt abgeleitet haben, und die wir hier zum Teil von neuem bestätigen können, erhalten wir folgende:

1. Die Kurven, welche $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)}$ als Funktion von k darstellen, haben nach Figur 2 jede einen Wendepunkt, der für die Parameter 0 bis $\frac{5}{2}$ in der Nähe von $k = 2$ liegt. Es ist nicht sicher zu erkennen, doch scheint es, daß die Lage des Wendepunktes von n abhängt, in der Weise, daß er mit wachsendem Parameter n zu immer kleineren Werten k rückt. An diesem Wendepunkt ändert sich die Wurzel $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)}$ am raschesten bei Änderungen von k. Bemerkenswert ist es, daß in derselben Gegend von k, in der wir hier die Wendepunkte finden, und die zwischen 2 und 3 gelegen ist, auch die Mac Mahonsche Reihe (26), nach der wir die Tabellen 2 und 3 berechnet haben, eine Besonderheit aufweist. Wir fanden nämlich (vgl. § 3), daß hier eine Grenze für die Brauchbarkeit der Reihe liegt, indem sie nur für Werte unterhalb dieses Grenzwertes von k zu benutzen ist. Vielleicht ist zwischen dem Vorhandensein des Wendepunktes und diesem Verhalten der Mac Mahonschen Reihe ein innerer Zusammenhang vorhanden, der aus dem verschiedenen Verhalten der Zylinderfunktionen für große und kleine Argumente folgt. In physikalischer Beziehung entsprechen die Gebiete vor und hinter dem Wendepunkt *schmalen Ringen* (kleines k) und *breiten Ringen* (großes k), zu deren Unterscheidung also das Verhalten der Wurzeln von Gleichung (1a) ein charakteristisches Kennzeichen liefert. Übrigens braucht diese Einteilung keine absolute zu sein, sondern kann von dem Parameter n abhängen, indem ein Ring von gegebener Krümmung k für Funktionen mit kleinem n als schmaler, für solche mit großem n als breiter gelten kann. Eine genauere Untersuchung muß zeigen was zutrifft. Es ist möglich, daß auch die Kurven der Figur 1 einen Wendepunkt besitzen, der aber bei kleinem Parameter n so nahe der oberen Grenze von $\frac{1}{q}$ (starker Ringkrümmung entsprechend) liegt, daß er in der Zeichnung nicht festzustellen ist. Bei $n = \frac{5}{2}$ könnte er aber vielleicht schon in der Gegend von $\frac{1}{q} = 0{,}7$ liegen, wenigstens gibt eine näherungsweise Berechnung der Wurzel für $k = 5{,}80$ also $\frac{1}{q} = 0{,}706$ mit Hilfe der

Lommelschen Tabellen[1]) der Poissonschen Funktionen einen Wert 4,80, der *über* der gestrichelten Geraden liegt, welche in Figur 1 die beiden bekannten Punkte der Kurve bei $\frac{1}{q} = 0{,}333$ oder $k = 2$ und $\frac{1}{q} = 1{,}0$ oder $k = \infty$ verbindet. Die Kurve würde danach bei $\frac{1}{q} = 0{,}7$ nach unten konkav sein, während sie bei kleineren Werten $\frac{1}{q}$ nach unten konvex ist. Doch sind die Lommelschen Tafeln zur exakten Berechnung der Wurzeln leider nicht genau genug, da sie nur nach ganzzahligen Argumenten fortschreiten, und deshalb kann das eben erwähnte Resultat nicht als sicher gelten.

2. Wenn auch aus den bisher bekannten Werten nur die Kurven für gewisse Parameter abgeleitet werden können, so ist dennoch aus der Stetigkeit der Zylinderfunktionen in bezug auf den als variabel gedachten Parameter n der Schluß zu ziehen, daß auch die Wurzeln sich bei stetiger Änderung von n stetig ändern. Man erhält also für beliebige reelle positive Parameter Kurven, die sich zwischen die gezeichneten Kurven für die ausgewählten Werte n einordnen. Diese Kurven bilden in ihrer Gesamtheit ein Büschel, das die ganze Fläche zwischen den Ordinaten an den Stellen $\frac{1}{q} = 0$ und $\frac{1}{q} = 1$ (bez. $k = 1$ und $k = \infty$) und der Kurve für $n = 0$ bedeckt, und dessen Spitze an der Stelle mit der Abszisse $\frac{1}{q} = 0$ (bez. $k = 0$) und der Ordinate $\pi = 3{,}1416$ liegt. Ähnliche Büschel ergeben sich für die Wurzeln höherer Ordnung ($w = 2, 3 \ldots$).

3. Die Abhängigkeit von n ist derart, daß mit wachsendem n die Wurzeln selbst immer größer werden, wie wir schon früher bemerkt haben. Um die Geschwindigkeit der Zunahme zu bestimmen, müßten wir die Differentialquotienten $\frac{d\tau}{dn}$ kennen. Wir können statt dessen nur die Differenzenquotienten bilden und aus diesen vermutungsweise Schlüsse auf den Wert der Differentialquotienten ziehen. Bilden wir mit Hilfe von Tabelle 13 die Differenzen der Wurzeln für einige Werte von k, so erhalten wir folgende Tabelle 14. Die Ringbreite $r_2 - r_1$ ist darin der bequemeren Schreibweise wegen als Einheit genommen; in Wirklichkeit stellen die Zahlen also die Differenzen der Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n$ und $(r_2 - r_1)\tau_{n'}$ dar. Da die Werte des n von Kolumne zu Kolumne in Tabelle 13 um $\frac{1}{2}$ fortschreiten, so erhält man aus den Zahlen von Tabelle 14 die Differenzenquotienten durch Multiplikation mit der Zahl 2.

1) E. Lommel, Abhandl. d. bayr. Akad. d. Wissensch., math.-phys. Kl. 15 S. 644. 1886.

Tabelle 14.

Differenzen der Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)}$ bei Änderung von n.

$\frac{1}{q}$	k	$\tau_{\frac{1}{2}} - \tau_0$	$\tau_1 - \tau_{\frac{1}{2}}$	$\tau_{\frac{3}{2}} - \tau_1$	$\tau_2 - \tau_{\frac{3}{2}}$	$\tau_{\frac{5}{2}} - \tau_2$
0	1	0	0	0	0	0
0,0909..	1,2	0,0013	0,0039	0,0066	0,0092	0,0118
0,2	1,5	0,0065	0,0193	0,0320	0,0442	0,0559
0,3333..	2	0,0188	0,0554	0,0895	0,1197	0,1451
0,6666..	5	0,088	0,246	0,361	0,431	0,50
0,8181..	10	0,161	0,406	0,521	0,536	0,56
0,9	19	0,22	0,52	0,59	0,59	0,59
0,95	39	0,30	0,60	0,63	0,62	0,61
1	∞	0,7368	0,6901	0,6617	0,6428	0,6279

Die Differenzenquotienten zeigen nach dieser Tabelle folgendes Verhalten. Für den Grenzfall $k = \infty$, d. h. wenn es sich um die Wurzeln der Gleichung $I_n(\xi) = 0$ handelt, nehmen die Quotienten mit steigendem n ab, von 1,4736 zwischen $n = 0$ und $\frac{1}{2}$ bis 1,2558 zwischen $n = 2$ und $\frac{5}{2}$. Es ist wahrscheinlich, daß diese Abnahme bis $n = \infty$ dauernd weitergeht, aber immer langsamer wird, und daß der Quotient für $n = \infty$ einem Grenzwert zustrebt. Welches dieser Grenzwert ist, läßt sich nicht bestimmen, vielleicht ist er gleich 1, jedenfalls scheint er in der Nähe der Einheit zu liegen. Auf diese Vermutung führt die Berechnung der Differenzenquotienten bei den Poissonschen Funktionen nach den Lommelschen Tafeln, die bis $n = \frac{69}{2}$ hinaufreichen und für den vorliegenden Zweck bis $\frac{29}{2}$ brauchbar sind, indem noch bei diesen Werten von n die Tabellen bis zu Argumenten berechnet sind, bei denen ein Vorzeichenwechsel der Funktionen stattfindet. Die so gut wie möglich graphisch interpolierten Wurzeln und daraus abgeleiteten Differenzenquotienten sind in Tabelle 15 zusammengestellt.

Die Differenzenquotienten sind hier von 1,15 auf 1,10 gesunken, während n um 5 (von $\frac{17}{2}$ auf $\frac{27}{2}$) gestiegen ist; bei kleinen Werten von n entspricht dagegen schon einer Zunahme von n um 2 Einheiten eine Abnahme des Differenzenquotienten um 0,2178 (von 1,4736 auf 1,2558).[1]) Die Abnahme des Differenzenquotienten geht also mit

1) Zu demselben Resultat gelangt man übrigens auch bei den Besselschen Funktionen mit ganzzahligen n, für die ähnliche Tafeln bis zu $n = 18$ hinauf für uns brauchbar existieren. (Vgl. Gray und Mathews, l. c. p. 266 ff.)

Tabelle 15.

Wurzeln 1. Ordnung der Gleichung $I_n(r_2\tau) = 0$ und deren Differenzen.

n	Wurzeln $r_2\tau_n^{(1)}$	Differenzen $r_2\tau_{n+1}^{(1)} - r_2\tau_n^{(1)}$
$\frac{15}{2}$	11,60	
		1,15
$\frac{17}{2}$	12,75	
		1,15
$\frac{19}{2}$	13,90	
$\frac{25}{2}$	17,27	
		1,11
$\frac{27}{2}$	18,38	
		1,10
$\frac{29}{2}$	19,48	

wachsendem n so schnell zurück, daß der Quotient vermutlich für $n = \infty$ nicht mehr weit unter den Wert 1,1 heruntersinkt, den er bei $n = \frac{27}{2}$ besitzt. Diesen Wert wird dann auch der Differentialquotient annehmen, der andrerseits für kleine n vermutlich sehr größe Werte haben wird.

Während nun für $k = \infty$ der Differenzenquotient mit wachsendem n dauernd abnimmt, ist bei kleinem k, soweit unsere Zahlen reichen, im Gegenteil eine Zunahme des Quotienten zu konstatieren. Es muß also bei einem gewissen k eine Umkehrung des Verhaltens stattfinden. Doch ist es offenbar nicht nötig, daß bei diesem k sämtliche Differenzenquotienten konstant sind; als der allgemeinere Fall ist vielmehr anzunehmen, daß bei jedem k der Quotient mit wachsendem n zunächst zu einem Maximalwert ansteigt und dann wieder bis zu einem gewissen Grenzwert abfällt, der für $n = \infty$ erreicht wird. Die Höhe und Lage des Maximums wird eine Funktion von k sein, bei kleinem k wird es erst bei sehr hohen Werten von n erreicht (für $k = 1$ erst bei $n = \infty$), bei größerem k rückt es zu immer kleineren Werten von n, und für $k = \infty$ liegt es bei $n = 0$. Die Zahlen der Tabelle 14 für $k = 19$ und $k = 39$ scheinen zu zeigen, daß in diesen Fällen das Maximum schon unterhalb $n = \frac{5}{2}$ liegt, doch muß man mit ihnen vorsichtig sein, da sie nur eine sehr geringe Genauigkeit (etwa eine Einheit der zweiten Dezimale) beanspruchen können. Ist das vermutete Maximum des Differenzen- und Differentialquotienten wirklich vorhanden, so ist es auch wahrscheinlich, daß die Kurven der Figur 1, welche die Wurzeln $(r_2 - r_1)\tau_n^{(1)}$ als Funktionen von $\frac{1}{q}$ darstellen, einen Wendepunkt besitzen und nicht einfach mit wachsendem n eine immer gestrecktere,

der geraden Linie sich nähernde, Gestalt bekommen. Auch hier gelten wieder für die Wurzeln höherer Ordnung ganz ähnliche Gesetze.

Über die Größe der Wurzeln selbst gibt diese Betrachtung natürlich keine Auskunft, man muß dieselben in jedem Falle besonders berechnen. Für die Wurzeln der Gleichungen $I_n(x) = 0$ kann dies nach der von uns benutzten Mac Mahonschen Formel (27) geschehen oder, wenn Tafeln vorhanden sind, einfacher durch eine Interpolationsrechnung, falls nicht sogar graphische Interpolation ausreicht. Ebenso kann man die physikalisch allerdings weniger wichtigen Wurzeln der Neumannschen Funktionen K_n bez. Y_n behandeln. Eine Abschätzung der Lage der Nullstellen dieser Funktionen hat Schafheitlin[1]) ausgeführt, doch sind die Grenzen, die er angibt, viel zu weit, als daß man die Wurzeln auch nur mit einigermaßen hinreichender Genauigkeit danach bestimmen könnte. Für den interessanten Fall, daß n unendlich wird, versagen überhaupt die Sätze von Schafheitlin, weil dann das Intervall, in dem die Wurzel liegen muß, sich als unendlich groß ergibt. Man erhält als Resultat nur, daß die Wurzeln selbst unendlich groß werden. Für die Neumannsche Zylinderfunktion ergibt sich übrigens aus der Definitionsgleichung (11) bez. (9), daß dieselbe für $n = \infty$ dauernd, d. h. bei allen möglichen Werten des Argumentes, unendlich bleibt und daher überhaupt keine reelle Nullstelle mehr besitzt. Denn es wird in (11) die letzte Summe mit unendlich werdendem ν sicher unendlich, da $\nu!$ stärker unendlich wird als $\lim_{x=\infty} x^\nu$; dasselbe gilt für die allgemeine Gammafunktion, die in I_{-n} vorkommt, falls n keine ganze Zahl ist. Die Funktion I_{-n} wird also bei unendlichem n ebenfalls dauernd unendlich und mit ihr zufolge Gleichung (9) auch $K_n(x)$.

Heidelberg, 1. März 1906.

Physikalisches Institut der Universität.

1) Vgl. Nielsen, l. c. S. 173 ff.

Konstruktion des Krümmungsradius bei Kurven mit der Gleichung $y = cx^n$ (polytropischen Kurven).

Von F. Dingeldey in Darmstadt.

Für die Länge ϱ des Krümmungsradius und die Koordinaten ξ, η des Krümmungsmittelpunktes der Kurve $y = f(x)$ gelten bekanntlich unter Voraussetzung rechtwinkliger Koordinaten die Formeln:

$$(1) \qquad \varrho = \left|\frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}\right|, \quad \xi = x - y' \cdot \frac{1+y'^2}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1+y'^2}{y''}.$$

Diese Ausdrücke gestatten einfache Konstruktionen, falls $f(x) = cx^n$ ist, und zwar ist es hierbei gleichgültig, ob n eine positive oder negative, ganze oder gebrochene (auch irrationale) Zahl darstellt. Der Faktor c ist eine willkürliche Konstante. Bilden wir zunächst die Ausdrücke (1) für den vorliegenden Fall $y = cx^n$.

Bezeichnet α den (konkaven) Winkel, den die im Kurvenpunkte P gezogene Tangente mit der positiven Richtung der x-Achse bildet, so ist $1 + y'^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$. Bei Einführung der zu P gehörigen Subtangente σ und der absoluten Länge t der Tangente, gemessen vom Punkte P bis zum Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse, wird $\cos^2\alpha = \sigma^2 : t^2$, daher $1 + y'^2 = t^2 : \sigma^2$. Nun ist aber $\sigma = y : y'$, im Falle $y = cx^n$ wird somit

$$(2) \qquad \sigma = \frac{cx^n}{ncx^{n-1}} = \frac{x}{n};$$

da ferner $y'' = n(n-1)cx^{n-2}$, so hat man

$$(3) \qquad \frac{1+y'^2}{y''} = \frac{t^2 \cdot n^2}{x^2 \cdot n(n-1)cx^{n-2}} = \frac{t^2 n}{(n-1)y} = \pm \frac{nt}{(n-1)\sin\alpha},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen zu stehen hat, je nachdem P oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegt. Durch Einsetzen dieses Ausdruckes in (1) folgt:

$$(4) \qquad \varrho = \left|\frac{nt}{(n-1)\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\right| = \left|\frac{2nt}{(n-1)\sin 2\alpha}\right|,$$

oder auch, da $\cos\alpha = \sigma : t$,

$$(5) \qquad \varrho = \left|\frac{nt^2}{(n-1)\cdot\sigma\sin\alpha}\right|.$$

Ferner ergibt sich

$$(6) \qquad \xi = x \mp y' \cdot \frac{nt}{(n-1)\sin\alpha} = x \mp \frac{nt}{(n-1)\cos\alpha} = x \mp \frac{n}{n-1} q,$$

wo q die absolute Länge des Stückes TN der x-Achse bezeichnet, das zwischen den Schnittpunkten dieser Achse mit der Tangente und der Normale von P gelegen ist (vgl. die Figur). Bei $\mp \frac{n}{n-1} q$ ist das negative oder positive Zeichen zu setzen, je nachdem die dem Punkte P zugehörigen Werte y und y' gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. je nachdem beim Durchlaufen der Kurve im Sinne der positiv wachsenden x die *absoluten* Werte der Ordinaten y zunehmen oder abnehmen.

Man findet unter Beachtung der bei (3) gegebenen Vorzeichenregel

$$(7) \qquad \eta = y \pm \frac{nt}{(n-1)\sin\alpha}.$$

Die Ausdrücke (4), (5), (6) und (7) gestatten nun einfache Konstruktionen des zum Punkte P gehörigen Krümmungsradius. Bevor wir auf diese näher eingehen, sei bemerkt, daß bei allen Konstruktionen, die im Folgenden abgeleitet werden, die *Normale* des Kurvenpunktes P benutzt wird, und zwar erhält man diese mit Hilfe der Subtangente $\sigma = y : y' = x : n$, die auf die Abszissenachse vom Fußpunkte der zu P gehörigen Ordinate aus nach links oder rechts abzutragen ist, je nachdem $x : n$ positiv oder negativ ist. Die Verbindungslinie des Endpunktes T der Subtangente mit P liefert die Tangente des Punktes P der Kurve, und mit der Tangente ist nun auch die *Normale* gegeben; auf ihr muß noch der Krümmungsmittelpunkt gefunden werden. Wir weisen darauf hin, daß die Konstruktion von $\sigma = \frac{x}{n}$ die Bestimmung des n-ten Teils der Abszisse x erfordert und wir bemerken ferner, daß bei den nachstehend angegebenen Konstruktionen des Krümmungsmittelpunktes der $\frac{n}{n-1}$te Teil gewisser Strecken bestimmt werden muß. Die Genauigkeit der wirklichen Ausführung dieser Konstruktionen mit Zirkel und Lineal hängt natürlich von der Zahl n ab; in vielen Fällen (z. B. bei beliebigem irrationalen n) kann es sich nur um eine näherungsweise Konstruktion handeln.

Aus der Gleichung (6) läßt sich wohl die *einfachste* Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes ableiten. Man bringt die Normale des Kurvenpunktes P zum Schnitt mit einer zur Ordinatenachse parallel gezogenen Geraden, deren sämtliche Punkte die Abszisse $\xi = x \mp \frac{n}{n-1} q$ haben. Durch Tangente und Normale von P ist die Strecke $q = TN$

(vgl. die Figur) bekannt. Bei der Multiplikation dieser Strecke mit $\frac{n}{n-1}$ kann der Umstand benutzt werden, daß sich die Längen OM und OT verhalten wie n zu $n-1$, falls T zwischen O und M gelegen ist. Man erkennt leicht, wie zu verfahren ist, wenn T nicht zwischen O und M liegt.

Mit Hilfe von (5) läßt sich der Krümmungsmittelpunkt folgendermaßen finden:

Nachdem man Subtangente, Tangente und Normale des Punktes P gezeichnet hat, fällt man vom Fußpunkte M der zu P gehörigen Ordinate ein Lot MQ auf die Normale, verbindet den Fußpunkt Q dieses Lotes mit dem Endpunkt T der Subtangente und zieht durch T rechtwinklig zu QT eine Gerade. Diese trifft die Normale von P in einem Punkte D, so daß

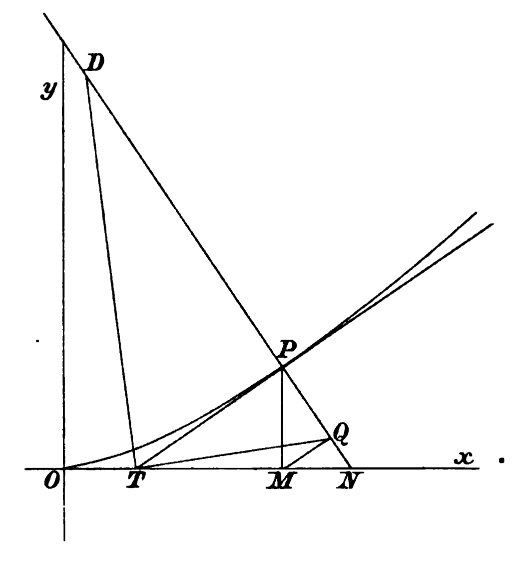
$$|PD| = \varrho_1 = \left|\frac{t^2}{\sigma \cdot \sin\alpha}\right|,$$

wie sich leicht daraus ergibt, daß $|PQ| = |\sigma \cdot \sin\alpha|$. Die absolute Länge des Krümmungsradius ϱ ist nach (5) gleich

$$\left|\frac{n}{n-1}\varrho_1\right|$$

oder gleich

$$\left|\varrho_1 + \frac{1}{n-1}\varrho_1\right|;$$



um die Länge ϱ zu erhalten, muß man daher noch $\varrho_1 = |PD|$ um eine Strecke von der Länge $\left|\frac{\varrho_1}{n-1}\right|$ vergrößern, oder, falls $n-1$ negativ sein sollte, um diese Strecke verkleinern.

Man hat natürlich darauf zu achten, daß sich der Krümmungradius von P aus in dasjenige Gebiet der Ebene erstreckt, dem die Kurve in P die konkave Seite zukehrt. *Mitunter* muß also die in der angegebenen Weise konstruierte Strecke von der Länge ϱ mit Hilfe des Zirkels noch um 180° umgeklappt werden. Sollte der Kurvenbogen, dem der Punkt angehört, nicht gezeichnet vorliegen, sondern P allein gegeben sein, so ist mit Hilfe des zweiten Differentialquotienten y'' zu entscheiden, welchem Teil der Ebene die Kurve in P die konkave oder konvexe Seite zukehrt. Bei positivem y kehrt die Kurve in P der

x-Achse bekanntlich die konkave oder konvexe Seite zu, je nachdem y'' negativ oder positiv ist; bei negativem y ist das Verhalten umgekehrt.

Man kann leicht zeigen, daß die Formel (5) und die aus ihr abgeleitete Konstruktion des Krümmungsradius ϱ auch bei schiefwinkligen Koordinaten gilt; nur ist alsdann die Subtangente σ nicht die rechtwinklige Projektion der Tangente t auf die x-Achse, sondern die Projektion in Richtung der y-Achse. Aus dieser Tatsache folgt, daß die Konstruktion z. B. auch für eine beliebige Hyperbel ($n = -1$) und nicht nur für die gleichseitige Hyperbel gilt.

Aus der Gleichung (4):

$$\varrho = \left| \frac{2nt}{(n-1)\sin 2\alpha} \right|$$

lassen sich mehrere Konstruktionen des zu P gehörigen Krümmungsradius ableiten, doch kommt keine von ihnen der soeben behandelten an Einfachheit gleich, wir wollen daher nicht näher auf sie eingehen.

Dagegen möge noch eine Konstruktion betrachtet werden, die sich aus der Gleichung (7):

$$\eta = y \pm \frac{nt}{(n-1)\sin\alpha}$$

für die Ordinate η des Krümmungsmittelpunktes ergibt. Nachdem man in der oben angegebenen Weise die Tangente $TP = t$ des Kurvenpunktes P gefunden hat, errichtet man in dem Endpunkte T dieser Tangente das Lot; dieses trifft die Verlängerung der Ordinate PM in einem Punkte E, so daß PE eine Strecke von der Länge $p = \frac{t}{\sin\alpha}$ darstellt. Eine parallel zur Abszissenachse gezogene Gerade, deren sämtliche Punkte die Ordinate $\eta = y \pm \frac{n}{n-1} p$ haben, wo die bei (3) gegebene Vorzeichenregel zu beachten ist, trifft die Normale von P in dem zu P gehörigen Krümmungsmittelpunkte.

Bei den vorstehend angegebenen Konstruktionen kann man den Umstand für unzweckmäßig halten, daß sie ϱ nicht direkt liefern, sondern erst nachdem eine gewisse Länge (q, ϱ_1, p), noch mit $\frac{n}{n-1}$ multipliziert ist. Aber gerade diese Tatsache bietet auch einen gewissen Vorteil, indem der Krümmungsradius sehr häufig so groß ausfällt, daß der Krümmungsmittelpunkt nicht mehr auf die Ebene des Zeichenpapiers zu liegen kommt. Man kann alsdann, wenn z. B. $\varrho_1 = PD$ konstruiert ist (vgl. die Figur), auf einem anderen Zeichenblatte $\varrho = \left| \frac{n}{n-1} \varrho_1 \right|$

konstruieren. So würde z. B. bei unsrer Figur, der eine Neilsche Parabel $y^2 = cx^3$ zugrunde gelegt ist, die Strecke $\varrho_1 = PD$ noch zu verdreifachen sein, um ϱ zu liefern, denn n ist $\frac{3}{2}$, $\frac{n}{n-1} = 3$; der Krümmungsmittelpunkt würde nicht mehr auf die Ebene des Papiers fallen.

Zum Schluße werde noch darauf hingewiesen, daß die angeführten Konstruktionen bei den sogenannten *polytropischen Kurven* anwendbar sind, auf deren Gleichungen

$$pv^m = \text{const.}$$

sich die meisten der in der Thermodynamik und der Theorie der Wärmemotoren behandelten Zustandsänderungen permanenter Gase zurückführen lassen. Dabei pflegt man die Zahl, die den Druck p angibt, unter dem sich ein Gas befindet, auf die Ordinatenachse abzutragen, den Betrag v des zugehörigen Gasvolumens auf die Abszissenachse. Verglichen mit $y = cx^n$ wäre $v = x$, $p = y$, $m = -n$.

Herr Mehmke machte mich darauf aufmerksam, daß Herr F. Kosch in Bd. 45 vorliegender Zeitschrift, S. 165 (1900) gleichfalls eine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes der polytropischen Kurven gegeben hat. Bei ihr wird der Krümmungsmittelpunkt durch einen leicht zu konstruierenden Kreis aus der Normale des betreffenden Kurvenpunktes herausgeschnitten. Auch eine von Herrn Mehmke in den Süddeutschen Blättern für höhere Unterrichtsanstalten (1. Jahrg. (1893), S. 69 f.) mitgeteilte allgemeine Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei einer durch $y = f(x)$ gegebenen Kurve würde sich leicht auf $y = cx^n$ anwenden lassen. Bei dieser allgemeinen Mehmkeschen Konstruktion ist überdies der Winkel der Koordinatenachsen beliebig, auch darf die Längeneinheit des Maßstabes, in dem die Abszissen aufgetragen werden, verschieden sein von der Längeneinheit des Maßstabes der Ordinaten.[1])

---

1) Bezüglich der punktweisen Konstruktion der polytropischen Kurven verweisen wir auf: E. Brauer, Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. 29 (1885), S. 433 f.; I. Taubeles ebenda, S. 675 f.; R. Proell ebenda, Bd. 35 (1891), S. 988—992 und 1022—1026; M. Tolle ebenda, Bd. 38 (1894), S. 1456—1459; W. Hartmann ebenda, Bd. 39 (1895), S. 194—196; A. Wagener ebenda, Bd. 40 (1896), S. 701 f.

Bemerkungen zu der sogenannten Petzval-Bedingung der photographischen Optik.

Von F. SCHIFFNER, k. k. Realschuldirektor in Wien.

Prof. Jos. Petzval wurde schon wiederholt der „Vater der modernen Optik" genannt, und das mit vollem Recht, denn seine dioptrischen Untersuchungen sind bahnbrechend gewesen und sein Porträtobjektiv ist bis heute mustergültig geblieben. Leider sind aber gerade die Manuskripte seines Werkes über Optik trotz vieler Bemühungen des verdienstvollen Petzvalbiographen Dr. Erményi bisher noch nicht aufgefunden worden, so daß man noch immer nicht weiß, ob Petzval den Plan, den er am 12. März 1857 in der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien entwickelt hat, ganz oder nur teilweise durchgeführt haben mag. Eines ist sicher: ein umfangreiches Manuskript über Optik hat existiert. Solange dies aber unbekannt bleibt, müssen wir uns mit Bruchstücken der Untersuchungen von Petzval begnügen. Solche hat mir vor einiger Zeit Herr Dr. Erményi vorgelegt, nämlich „Vorlesungen über Dioptrik", die Prof. J. Petzval in den Jahren 1860 und 1861 an der Wiener Universität gehalten und die sein Schüler J. Frischauf, jetzt Professor an der k. k. Universität in Graz, damals niedergeschrieben hat.[1]) In diesen Vorlesungen fand ich nun auch einen Beweis des Satzes, der unter dem Namen „Petzvalbedingung" bekannt ist, und von dem Petzval in seiner Publikation „Bericht über einige dioptrische Untersuchungen, Pesth 1843" sagt, daß er „wegen seiner Allgemeinheit, Einfachheit und Eleganz wohl der merkwürdigtse der ganzen Dioptrik" sei.

Der Satz lautet: „Der reziproke Wert des Krümmungshalbmessers des geometrischen Ortes eines Bildes am Scheitel ist gleich der Summe der Produkte aus den reziproken Werten der Brennweiten in die reziproken Werte der Brechungsverhältnisse der einzelnen Bestandlinsen."

Welche Bedeutung Petzval diesem Satze zuerkannt hat, kann daraus ersehen werden, daß er ihn in seinem Berichte aus dem Jahre 1857 als das vornehmste von den wenigen sehr einfachen Naturgesetzen be-

1) Es ist damit die Behauptung Dr. M. v. Rohrs in seiner Theorie und Geschichte des photographischen Objektivs, Berlin 1899, Petzval habe mit seinen dioptrischen Ergebnissen eine gewisse Verstecktheit verbunden und es sei unwahrscheinlich, daß er über optische Konstruktionen Vorträge gehalten habe, als irrig nachgewiesen. D. Red.

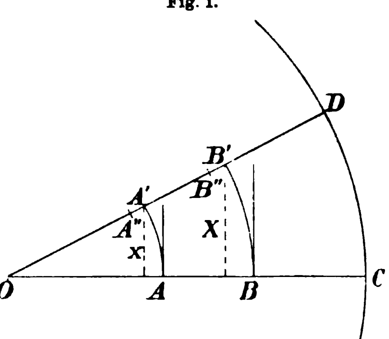
zeichnet, die wie grünende Oasen aus der mathematischen Sandwüste sich herausheben, mit welcher die Gebrechen der optischen Instrumente und ihre ungeheuren Rechnungsentwicklungen verglichen werden können. Ferner sagt er:

„Wiewohl der Beweis dieses Satzes aus der optischen Störungstheorie gezogen und hinter bedeutenden Rechnungsentwicklungen versteckt ist, so bin ich dennoch genötigt, denselben schon in der populären Optik zu gebrauchen und einstweilen ohne Beweis der höheren Wissenschaft zu entlehnen."

Petzval muß demnach einen sehr komplizierten Beweis seines Satzes vor Augen gehabt haben, und es ist überraschend, daß er in seinen Vorlesungen den unten folgenden, verhältnismäßig einfachen Beweis vorgeführt hat. Diesen Beweis zu veröffentlichen, scheint nicht überflüssig zu sein, da z. B. in den Vorlesungen über photographische Optik von A. Gleichen, Leipzig 1905, gesagt wird, Petzval habe die Ableitung seiner „berühmten Formel" nicht gegeben.[1]) Der Beweis lautet:

Ist CD (Fig. 1) eine brechende Fläche mit den Radien $OC = OD = r$, A ein Objektpunkt, B der entsprechende Bildpunkt, so besteht, wenn $AC = h$, $BC = k$ gesetzt wird und n das Brechungsverhältnis ist, die bekannte Fundamentalgleichung:

Fig. 1.



$$\frac{1}{k} = \frac{n-1}{n \cdot r} + \frac{1}{n \cdot h}. \tag{1}$$

Wäre das Objekt eine sphärische Fläche AA' mit dem Radius $OA' = r - h$, so würde die Bildfläche BB' ebenfalls sphärisch sein und den Halbmesser $OB = r - k$ haben. Wir fragen uns nun: Wenn das Objekt AA'' den Krümmungsradius ϱ hat, wie groß wird der Krümmungsradius R der Bildfläche BB'' sein? (A'' liegt ganz nahe bei A' und ist von A' um dh entfernt, das Bild B'' von A'' liegt ganz nahe bei B' und ist von B' um dk entfernt.)

Bei einem Kreise vom Radius r (Fig. 2) ist ein Punkt P mit der Ordinate x von der Tangente NQ um ein Stück $PQ = MN = a$ ent-

---

1) Ebenso unrichtig ist die Angabe in „4000 Jahre Pionier-Arbeit in den exakten Wissenschaften von L. Darmstaedter und R. du Bois Reymond, Berlin, 1904", Petzval habe 1840 durch „*mechanische* Konstruktion" sein lichtstarkes Doppelobjektiv gefunden.

fernt, für welches die Gleichung besteht $x^2 = 2ra - a^2$. Wenn a sehr klein ist, kann a^2 vernachlässigt werden und es ist $a = \frac{x^2}{2r}$.

Die Punkte A' und A'' (Fig. 1) werden deshalb von der Ebene, welche in A berührt, die Abstände $a = \frac{x^2}{2(r-h)}$ und $a_1 = \frac{x^2}{2\varrho}$, die Punkte B' und B'' von der Berührungsebene im Punkte B die Abstände $b = \frac{X^2}{2(r-k)}$ und $b_1 = \frac{X^2}{2R}$ haben. Es ist deshalb

Fig. 2.

$$dh = \frac{x^2}{2\varrho} - \frac{x^2}{2(r-h)} \tag{2a}$$

und

$$dk = \frac{X^2}{2R} - \frac{X^2}{2(r-k)}. \tag{2b}$$

Wenn wir die Gleichung (1), in welcher n und r konstant sind, differentiieren, erhalten wir: $-\frac{dk}{k^2} = -\frac{dh}{nh^2}$ oder $dk = \frac{k^2}{nh^2} \cdot dh$.

Mit Berücksichtigung von Gleichung (2a) wird

$$dk = \frac{k^2}{nh^2}\left[\frac{x^2}{2\varrho} - \frac{x^2}{2(r-h)}\right] = \frac{x^2k^2}{2nh^2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r-h}\right)$$

und

$$b_1 = b + dk = \frac{X^2}{2(r-k)} + \frac{x^2k^2}{2nh^2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r-h}\right),$$

somit

$$\frac{1}{R} = \frac{2b_1}{X^2} = \frac{1}{r-k} + \frac{1}{X^2} \cdot \frac{x^2k^2}{nh^2}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r-h}\right). \tag{3}$$

Nun besteht nach Figur 1 die Proportion $(r-h):(r-k) = x:X$, weshalb $X = \frac{x(r-k)}{r-h}$ ist.

Aus Gleichung (1) folgt

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{r} - \frac{1}{nr} + \frac{1}{nh}$$

oder

$$\frac{r-k}{r-h} = \frac{k}{nh}, \tag{4}$$

so daß $X = \frac{xk}{nh}$ gesetzt werden kann und Gleichung (3) lautet:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r-k} + n\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r-h}\right).$$

Da nach Gleichung (4) auch $\frac{1}{r-k} = \frac{nh}{k(r-h)} = \frac{nh}{r-h} \cdot \frac{1}{k}$ und hier $\frac{1}{k}$ nach Gleichung (1) ersetzt werden kann, so ergibt sich:

$$\frac{1}{R} = \frac{(n-1)h}{(r-h)r} + \frac{1}{r-h} + \frac{n}{\varrho} - \frac{n}{r-h} = \frac{n}{\varrho} - \frac{n-1}{r-h} + \frac{(n-1)h}{(r-h)r}$$

oder

$$\frac{1}{R} = \frac{n}{\varrho} - \frac{n-1}{r}. \tag{5}$$

Diese Gleichung, die von h und k ganz unabhängig ist, gibt uns den Krümmungsradius R des Bildes bei einer brechenden Fläche. Ist das Objekt plan, d. h. $\varrho = \infty$, so wird $\frac{1}{R} = -\frac{n-1}{r}$, also z. B. für Glas mit $n = \frac{3}{2}$ wird $R = -2r$.

Sind nun mehrere brechende Flächen mit den Radien $r, r_1, r_2, \ldots, r_m$ vorhanden und die entsprechenden Brechungsverhältnisse $n, n_1, n_2, \ldots, n_m$, die Radien der entstehenden Bildflächen $R, R_1, R_2, \ldots, R_m$, so ergeben sich, wenn die Oberfläche plan ist, folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{nR} = -\frac{n-1}{n \cdot r}$$

$$\frac{1}{n_1 R_1} = \frac{1}{R} - \frac{n_1 - 1}{n_1 r_1}$$

$$\frac{1}{n_2 R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{n_2 - 1}{n_2 r_2}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{1}{n_m R_m} = \frac{1}{R_{m-1}} - \frac{n_m - 1}{n_m r_m}.$$

Wird die zweite Gleichung durch n, die dritte durch $n \cdot n_1$ usw. dividiert und die Summe aller Gleichungen gebildet, so resultiert die Gleichung:

$$\frac{1}{n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdots n_m R_m} = -\frac{n-1}{n \cdot r} - \frac{n_1 - 1}{n \cdot n_1 \cdot r_1} - \frac{n_2 - 1}{n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdot r_2} \cdots - \frac{n_m - 1}{n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdots n_m \cdot r_m}.$$

Geht das Licht in das alte Mittel zurück, so ist $n \cdot n_1 \cdot n_2 \cdots n_m = 1$.

Ferner ist, wenn je zwei Flächen eine Linse bilden: $n \cdot n_1 = 1$, $n_2 \cdot n_3 = 1$ usw. und, wenn $p, p_1, \ldots$ die Brennweiten dieser Linsen sind:

$$-\frac{n-1}{nr} - \frac{n_1 - 1}{n \cdot n_1 \cdot r_1} = -\frac{n-1}{n \cdot r} - \frac{\frac{1}{n} - 1}{r_1} = -\frac{n-1}{n}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right) = -\frac{1}{n \cdot p}$$

$$-\frac{n_2 - 1}{n \cdot n_1 n_2 r_2} - \frac{n_3 - 1}{n \cdot n_1 n_2 \cdot n_3 r_3} = -\frac{n_2 - 1}{n_2}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = -\frac{1}{n_2 p_2} \cdots$$

Sind s Linsen mit dem Brechungsverhältnisse $n, n_1, \ldots, n_s$ und den Brennweiten $p, p_1, \ldots, p_s$ vorhanden, so ergibt sich die Gleichung:

$$-\frac{1}{R} = \frac{1}{n \cdot p} + \frac{1}{n_1 \cdot p_1} + \cdots \frac{1}{n_s \cdot p_s},$$

welche den oben ausgesprochenen Satz darstellt.

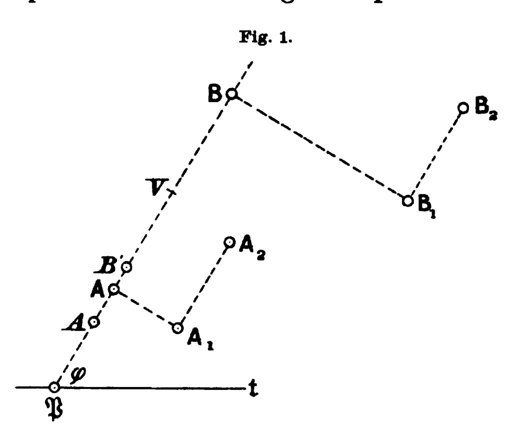
Über die Momentanbewegung eines starren ebenen Systems.

Von R. Müller in Braunschweig.

I. Bestimmung der Polbahntangente und der Kreispunktkurve für Verzweigungslagen.

1. Die komplane Bewegung eines starren ebenen Systems ist für drei unendlich benachbarte Lagen eindeutig definiert, wenn von irgend zwei Systempunkten die Anfangslagen A, B und die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte A, B ihrer Bahnkurven α, β bekannt sind; denn die Geraden $A\mathsf{A}$, $B\mathsf{B}$ schneiden sich im augenblicklichen Pol $\mathfrak{P}$, und dann ergibt sich mit Hilfe der Bobillierschen Konstruktion die Polbahntangente t und zu jedem dritten Systempunkte C der entsprechende Krümmungsmittelpunkt $\mathsf{\Gamma}$. Das eben Gesagte gilt aber nicht mehr, wenn — wie wir im Folgenden voraussetzen wollen — die vier Punkte A, A, B, B in *einer* Geraden liegen. In diesem Falle sind bekanntlich *zwei* Pole vorhanden, nämlich die Doppelpunkte der durch die Paare A, B und B, A bestimmten Involution, und jedem von ihnen entspricht eine besondere Momentanbewegung des Systems. Greifen wir dann unter den beiden möglichen Polen den einen willkürlich heraus und nennen ihn $\mathfrak{P}$, so ist die zugehörige Polbahntangente t, also auch die quadratische Verwandtschaft der einander entsprechenden Krümmungsmittelpunkte durch die bisherigen Daten überhaupt noch nicht bestimmt, dazu muß vielmehr die Bewegung der Punkte A, B für eine vierte Systemlage definiert werden, und dies geschieht durch Angabe der Krümmungsmittelpunkte A_1, B_1 der Evoluten α_1, β_1 der Kurven α, β.

Fig. 1.



Um für eine solche *Verzweigungslage* die Polbahntangente t und die weiteren Elemente der dem Pole $\mathfrak{P}$ entsprechenden Momentanbewegung zu ermitteln, benutze ich die Formeln, die ich bei früherer

Gelegenheit für die Krümmung der aufeinander folgenden Evoluten der Bahnkurven abgeleitet habe[1]):

Angenommen, das System gelange aus seiner Anfangslage in die folgenden, einander unendlich benachbarten Lagen durch unendlich kleine Drehungen um die Pole $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ $\cdots$ bezw. um die Winkel $d\vartheta$, $d\vartheta + d^2\vartheta$, $d\vartheta + 2d^2\vartheta + d^3\vartheta \cdots$; dabei sei $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \cdots = du$ und der Kontingenzwinkel der Polbahn bei $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R} \cdots = d\tau$, $d\tau + d^2\tau \cdots$ Wir bezeichnen mit φ den Winkel, den die Gerade $\mathfrak{P}A$ mit der Polbahntangente t — d. h. der Geraden $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ — bildet, und setzen $\mathfrak{P}A = r$, $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho$, $\mathsf{AA}_1 = \sigma_1$, $\mathfrak{P}B = r'$, $\mathfrak{P}\mathsf{B} = \varrho'$, $\mathsf{BB}_1 = \sigma_1'$; dann ist[2])

$$\varrho = \frac{r\,du \sin\varphi}{du \sin\varphi - r\,d\vartheta} \tag{1}$$

und

$$\sigma_1 = -\frac{r\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta \sin\varphi\} - 3\,du\,d\vartheta \sin\varphi\cos\varphi}{(du\sin\varphi - r\,d\vartheta)^3}\, r^2 du. \tag{2}$$

Schreiben wir (1) in der Form

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} = \frac{d\vartheta}{du \sin\varphi},$$

so bedeutet $\frac{du}{d\vartheta}$ den Durchmesser des Wendekreises und $\frac{du}{d\vartheta}\sin\varphi$ die Strecke $\mathfrak{P}V$, welche der Wendekreis von der Geraden $\mathfrak{P}A$ abschneidet. Setzen wir also

$$\frac{du}{d\vartheta}\sin\varphi = h, \tag{3}$$

so ist

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r'} - \frac{1}{\varrho'}. \tag{4}$$

Nun folgt aus (2)

$$\sigma_1\left(\frac{du\sin\varphi - r\,d\vartheta}{r\,du\sin\varphi}\right)^3 = -\frac{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi}{du^2\sin^3\varphi} + \frac{3\,d\vartheta\cos\varphi}{r\,du\sin^2\varphi}$$

oder

$$\frac{\sigma_1}{\varrho^3} = -\frac{1+\cot^2\varphi}{h}\left(\frac{2d\vartheta + d\tau}{du}\cot\varphi + \frac{d^2\vartheta}{du\,d\vartheta}\right) + \frac{3}{hr}\cot\varphi \tag{5}$$

und analog

$$\frac{\sigma_1'}{\varrho'^3} = -\frac{1+\cot^2\varphi}{h}\left(\frac{2d\vartheta + d\tau}{du}\cot\varphi + \frac{d^2\vartheta}{du\,d\vartheta}\right) + \frac{3}{hr'}\cot\varphi.$$

---

1) Über die Bewegung eines starren ebenen Systems durch fünf unendlich benachbarte Lagen, diese Zeitschrift 37. Bd. S. 129.

2) A. a. O. Gleichungen (2) und (10). Hinsichtlich der Vorzeichen der eingeführten Größen verweisen wir der Kürze wegen auf die dort getroffenen Festsetzungen.

Hieraus ergibt sich durch Subtraktion

$$\frac{\sigma_1}{\varrho^3} - \frac{\sigma_1'}{\varrho'^3} = \frac{3}{h}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right)\cot\varphi = \frac{3}{h}\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right)\cot\varphi;$$

wir erhalten daher *zur Bestimmung der Polbahntangente* die Gleichung

$$(6) \qquad \cot\varphi = \frac{h}{3}\left(\frac{\sigma_1}{\varrho^3} - \frac{\sigma_1'}{\varrho'^3}\right) : \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho'}\right).$$

Für $\sigma_1 = \sigma_1' = 0$ wird $\cot\varphi = 0$, d. h. $\varphi = 90^0$. *Sind also A und B Systempunkte mit stationären Krümmungskreisen, so steht die Polbahntangente senkrecht auf der Geraden AB.* Dieser Fall tritt z. B. ein, wenn A und B die Endpunkte der Koppel eines durchschlagenden Gelenkvierecks in der Verzweigungslage bedeuten.

2. Mit der Polbahntangente ist auch der Wendekreis und die quadratische Verwandschaft der Krümmungsmittelpunkte für die dem Pole $\mathfrak{P}$ entsprechende Momentanbewegung bestimmt. Um diese Bewegung noch für eine vierte unendlich benachbarte Systemlage darzustellen, benutzen wir die *Kreispunktkurve* m, d. h. den Ort aller Systempunkte, die augenblicklich eine Bahnstelle mit stationärem Krümmungskreis durchschreiten. Setzen wir in Gleichung (2) $\sigma_1 = 0$, so folgt als Gleichung von m

$$(7) \quad r\{d\vartheta(2d\vartheta + d\tau)\cos\varphi + d^2\vartheta\sin\varphi\} - 3\,du\,d\vartheta\sin\varphi\cos\varphi = 0;$$

m ist also eine Fokalkurve dritter Ordnung, die im Punkte $\mathfrak{P}$ die Gerade $\mathfrak{t}$ berührt und zugleich rechtwinklig schneidet. Ihre Bestimmung erfordert die Ermittelung der Größen

$$(8) \qquad \frac{1}{\mathfrak{d}_c} = \frac{2d\vartheta + d\tau}{3du}$$

und

$$(9) \qquad \frac{1}{\mathfrak{d}_e} = \frac{d^2\vartheta}{3\,du\,d\vartheta};$$

dabei sind $\mathfrak{d}_c$ und $\mathfrak{d}_e$ die Durchmesser der Krümmungskreise der Kurve in $\mathfrak{P}$; der erste berührt die Polbahntangente, der zweite die Polbahnnormale. Schreiben wir nun in Gleichung (5) für $\cot\varphi$ den Wert aus (6), so haben wir damit *eine* Gleichung zur Berechnung von $\frac{1}{\mathfrak{d}_c}$ und $\frac{1}{\mathfrak{d}_e}$. Um eine zweite Gleichung zu erhalten, müssen wir die Bewegung der Punkte A und B für eine fünfte Systemlage definieren, und dazu verwenden wir die Krümmungsmittelpunkte A_2, B_2 der Evoluten der Kurven α_1, β_1 in A_1, B_1, betrachten also die Strecken $A_1A_2 = \sigma_2$,

$B_1 B_2 = \sigma_2'$ als gegeben. Für den Krümmungsradius der „zweiten" Evolute der Bahnkurve des Punktes A gilt die früher abgeleitete Formel[1])

$$\sigma_2 = 3\sigma_1 \cdot \frac{r^2 d^2\vartheta + r du d\vartheta \cos\varphi - du^2 \sin\varphi\cos\varphi}{(du\sin\varphi - r d\vartheta)^2}$$

$$-\frac{r^2 du}{(du\sin\varphi - r d\vartheta)^4}\cdot[r^2\{d\vartheta(3d^2\vartheta + d^2\tau)\cos\varphi + [d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta]\sin\varphi\}$$

$$-r du\{3d\vartheta^2\cos^2\varphi + 5d^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau)\sin^2\varphi\} + 3du^2 d\vartheta\sin\varphi]$$

oder

$$\frac{\sigma_2}{\varrho^4} = \frac{3\sigma_1}{\varrho^2}\cdot\frac{r^2 d^2\vartheta + r du d\tau\cos\varphi - du^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2 du^2\sin^2\varphi}$$

$$(10) \qquad -\frac{d\vartheta(3d^2\vartheta + d^2\tau)\cos\varphi + [d\vartheta(d\vartheta + d\tau)(2d\vartheta + d\tau) + d^3\vartheta]\sin\varphi}{du^3\sin^4\varphi}$$

$$+\frac{3d\vartheta^2\cos^2\varphi + 5d^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau)\sin^2\varphi}{r du^2\sin^4\varphi} - \frac{3d\vartheta}{r^2 du\sin^3\varphi}.$$

Bilden wir die entsprechende Gleichung für $\frac{\sigma_2'}{\varrho'^4}$ und subtrahieren, so verschwinden mit dem zweiten Gliede rechts die Größen $\frac{d^2\tau}{du^2}$ und $\frac{d^3\vartheta}{du^3}$, und dann können die noch übrig bleibenden Unbekannten $\frac{d\tau}{du}$ und $\frac{d^2\vartheta}{du^2}$ mit Hilfe von (3), (8) und (9) ausgedrückt werden durch $\frac{1}{\mathfrak{d}_c}$ und $\frac{1}{\mathfrak{d}_e}$.

Wir wollen die Rechnung nur für den Fall durchführen, *daß die Punkte A und B sich momentan in Bahnstellen mit fünfpunktig berührenden Krümmungskreisen befinden*, daß also $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_1' = \sigma_2' = 0$ ist. Dann ist nach dem Vorhergehenden $\varphi = 90^0$, folglich nach (5) $d^2\vartheta = 0$ und nach (9) $\mathfrak{d}_e = \infty$. Ferner ergibt sich aus (10)

$$\frac{\sigma_2}{\varrho^4} - \frac{\sigma_2'}{\varrho'^4} = \frac{d\vartheta(5d\vartheta + 4d\tau)}{du^2}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) - 3\frac{d\vartheta}{du}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r'^2}\right) = 0,$$

oder

$$\frac{5d\vartheta + 4d\tau}{3du} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

Bezeichnen wir noch den Durchmesser des Wendekreises mit $\mathfrak{d}_w$, setzen also

$$\frac{d\vartheta}{du} = \frac{1}{\mathfrak{d}_w} = \frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho},$$

so erhalten wir schließlich nach (8)

$$(11) \qquad \frac{4}{\mathfrak{d}_c} = \frac{1}{\mathfrak{d}_w} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r'}.$$

1) A. a. O. S. 133. Gleichung (11).

Die Kreispunktkurve zerfällt daher gegenwärtig in die Polbahnnormale und in den die Polbahntangente berührenden Kreis vom Durchmesser $\mathfrak{d}_c$.

Mit $\mathfrak{d}_w$ und $\mathfrak{d}_c$ sind auch die Krümmungsradien der Polbahn und der Polkurve in $\mathfrak{P}$ bestimmt, denn diese sind bekanntlich bez. $= \frac{du}{d\tau}$ und $\frac{du}{d\vartheta + d\tau}$.

II. Über eine Kreisverwandtschaft, die mit der quadratischen Verwandtschaft der Systeme entsprechender Krümmungsmittelpunkte zusammenhängt.

Sei S irgend eine Lage eines komplan bewegten starren ebenen Systems, $\mathfrak{P}$ der zugehörige Pol, t die Polbahntangente, w der Wendekreis mit dem Durchmesser $\mathfrak{d}_w$. Dann entspricht jedem Punkte A von S ein bestimmter Punkt A der Geraden PA als Krümmungsmittelpunkt der Bahnstelle, die der Systempunkt A in der festen Ebene Σ durchschreitet, und alle Systemkurven, die $\mathfrak{P}A$ zur Normale und A zum Krümmungsmittelpunkt haben, erzeugen Hüllbahnelemente mit A als Krümmungsmittelpunkt. Setzen wir $\mathfrak{P}A = r$, $\mathfrak{P}\mathsf{A} = \varrho$, $\angle A\mathfrak{P}\mathrm{t} = \varphi$, so ist bekanntlich

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\varrho}\right)\sin\varphi = \frac{1}{\mathfrak{d}_w},$$

also

$$r = \frac{\mathfrak{d}_w \varrho \sin\varphi}{\varrho + \mathfrak{d}_w \sin\varphi}.$$

Bezeichnen wir noch die rechtwinkligen Koordinaten der Punkte A und A für $\mathfrak{P}$ als Anfangspunkt, t als x-Achse bez. mit x, y und ξ, η, so folgt durch Multiplikation mit $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$

$$(1) \qquad x = \frac{\mathfrak{d}_w \xi\eta}{\xi^2 + \eta^2 + \mathfrak{d}_w \eta}, \quad y = \frac{\mathfrak{d}_w \eta^2}{\xi^2 + \eta^2 + \mathfrak{d}_w \eta},$$

und diese Gleichungen definieren die bekannte *quadratische Verwandtschaft* zwischen den Systemen S und Σ der einander entsprechenden Krümmungsmittelpunkte.[1])

Hierdurch wird jeder Kurve k von S eine Kurve $\varkappa$ von Σ zugeordnet als Ort der Krümmungsmittelpunkte, die den Punkten von k entsprechen. Nehmen wir insbesondere an Stelle von k einen Kreis um den Punkt $\mathfrak{F}(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit der Gleichung

$$(x - \mathfrak{x})^2 + (y - \mathfrak{y})^2 - c^2 = 0,$$

1) Burmester Kinematik I, S. 117.

so erhalten wir für $\varkappa$ vermöge der Substitution (1) eine zirkulare Kurve vierter Ordnung:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &(\xi^2+\eta^2)\{\mathfrak{d}_w^2\eta^2 - 2\mathfrak{d}_w\eta(\mathfrak{x}\xi+\mathfrak{y}\eta) + (\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-c^2)(\xi^2+\eta^2)\} \\ &\quad - 2\mathfrak{d}_w^2\eta^2(\mathfrak{x}\xi+\mathfrak{y}\eta) + 2\mathfrak{d}_w(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-c^2)(\xi^2+\eta^2)\eta \\ &\quad + \mathfrak{d}_w^2(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-c^2)\eta^2 = 0. \end{aligned}$$

Um ihr Fokalzentrum $\mathfrak{F}'(\mathfrak{x}', \mathfrak{y}')$ — d. h. den reellen Schnittpunkt ihrer Tangenten in den imaginären Kreispunkten — zu bestimmen, bilden wir die Bedingung, unter welcher die Gerade

$$\eta - \mathfrak{y}' = i(\xi - \mathfrak{x}')$$

die Kurve $\varkappa$ in der Unendlichkeit berührt. Setzen wir in (2)

$$\eta = i\xi + (\mathfrak{y}' - i\mathfrak{x}'),$$

also

$$\xi^2 + \eta^2 = 2\xi(\mathfrak{x}' + i\mathfrak{y}') - (\mathfrak{x}' + i\mathfrak{y}')^2,$$

so ergibt sich eine Gleichung dritten Grades in ξ, und zwar lautet der Faktor von ξ^3

$$2\mathfrak{d}_w\{\mathfrak{d}_w(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}) - \mathfrak{d}_w(\mathfrak{x}'+i\mathfrak{y}') - 2i(\mathfrak{x}+i\mathfrak{y})(\mathfrak{x}'+i\mathfrak{y}')\}.$$

Dieser Faktor verschwindet also für

$$(3)\qquad \frac{1}{\mathfrak{x}'+i\mathfrak{y}'} = \frac{1}{\mathfrak{x}+i\mathfrak{y}} + \frac{2i}{\mathfrak{d}_w}.$$

Die so erhaltene Gleichung bestimmt das Fokalzentrum $\mathfrak{F}'$ von $\varkappa$ unabhängig vom Radius c des Kreises k, demnach ist $\mathfrak{F}'$ das Fokalzentrum aller Kurven vierter Ordnung, welche der Schar der konzentrischen Kreise um $\mathfrak{F}$ zugeordnet sind, und hieraus folgt ganz allgemein: *Allen zirkularen Kurven von S, die den Punkt $\mathfrak{F}$ zum Fokalzentrum haben, entsprechen in der quadratischen Verwandtschaft zirkulare Kurven von Σ mit einem gemeinschaftlichen Fokalzentrum $\mathfrak{F}'$.*

Durch Gleichung (3) wird jedem Punkte $\mathfrak{F}$ von S ein Punkt $\mathfrak{F}'$ von Σ zugewiesen, und die so definierte *konforme Abbildung der Ebene S auf die Ebene Σ* hat den Charakter einer *Kreisverwandtschaft mit zwei in $\mathfrak{P}$ vereinigten Fixpunkten. Auf diese Weise verknüpft sich also mit der quadratischen Verwandtschaft der Krümmungsmittelpunkte eine Kreisverwandtschaft zwischen den Fokalzentren aller zirkularen Kurven, die einander in jener quadratischen Verwandtschaft entsprechen.*

Schreiben wir Gleichung (3) in der Form

$$\frac{\mathfrak{x}'-i\mathfrak{y}'}{\mathfrak{x}'^2+\mathfrak{y}'^2} = \frac{\mathfrak{x}-i\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2} + \frac{2i}{\mathfrak{d}_w},$$

so folgt

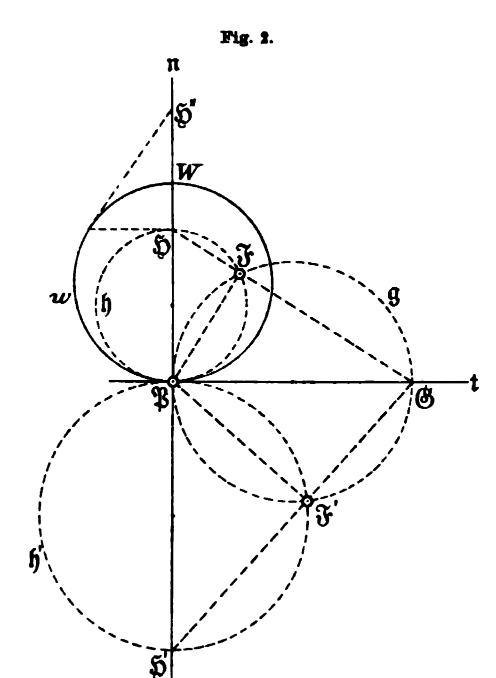
$$\frac{\mathfrak{x}'}{\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2} = \frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} \tag{4}$$

und

$$\frac{\mathfrak{y}'}{\mathfrak{x}'^2 + \mathfrak{y}'^2} = \frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} - \frac{2}{\mathfrak{d}_w}. \tag{5}$$

Gleichung (4) sagt aus, daß jeder Kreis $\mathfrak{g}$, der die Polbahnnormale $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{P}$ berührt, in unsrer quadratischen Verwandtschaft sich selbst entspricht. Einem Kreise $\mathfrak{h}$, der die Polbahntangente $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{P}$ berührt, entspricht nach (5) ein eben solcher Kreis $\mathfrak{h}'$. Sind $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ die zweiten Schnittpunkte von $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ mit $\mathfrak{n}$, und rechnen wir die Strecken $\mathfrak{P}\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{P}\mathfrak{H}'$ positiv in der Richtung nach dem Wendepol W, so wird $\mathfrak{H}'$ durch die Gleichung bestimmt

Fig. 2.



$$\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{H}'} = \frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{H}} - \frac{2}{\mathfrak{P}W}.$$

Bezeichnen wir also mit $\mathfrak{H}''$ den vierten harmonischen Punkt zu $\mathfrak{P}$, W und $\mathfrak{H}$, so ist $\mathfrak{P}\mathfrak{H}' = -\mathfrak{P}\mathfrak{H}''$. Um daher zum Fokalzentrum $\mathfrak{F}$ das entsprechende Fokalzentrum $\mathfrak{F}'$ zu konstruieren, errichten wir in $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{P}\mathfrak{F}$ ein Lot, welches $\mathfrak{t}$ in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{n}$ in $\mathfrak{H}$ schneidet, und bestimmen zu $\mathfrak{H}$ in der eben angegebenen Weise den Punkt $\mathfrak{H}'$; dann ist $\mathfrak{F}'$ der Fußpunkt des Lotes von $\mathfrak{P}$ auf $\mathfrak{G}\mathfrak{H}'$.

Braunschweig, d. 26. Mai 1906.

Bücherschau.

Charles Emerson Curry, Electromagnetic Theorie of Light. Erster Teil, London 1905.

Den Ausgangspunkt der Darstellung bilden die Maxwellschen Gleichungen; aus ihnen werden die Integrale abgeleitet, die ebenen und sphärischen Wellen entsprechen. Die sphärischen Wellen werden in den ersten Kapiteln behandelt, und zwar viel eingehender als es für eine Optik nötig ist. Die oben erwähnten Integrale bilden dann die Grundlage der Interferenztheorie sowie des Huygensschen Prinzips und der Beugung.

Die aus den Maxwellschen Gleichungen folgende Schwingungsgleichung ergibt in bekannter Weise das verbesserte Huygenssche Prinzip, trotzdem wird in ausführlichster Weise die Fresnelsche Ableitung desselben mit Hilfe der Zoneneinteilung gegeben; das ist aus historischen Gründen ja sicher berechtigt, aber vielleicht sind 24 Seiten für diesen Zweck etwas viel (bei Drude, Lehrbuch der Optik genügen hierzu 9 Seiten).

Die Sommerfeldsche Beugungstheorie ist auch behandelt, doch glaubt der Verf., daß durch sie wenig gewonnen sei gegenüber der Fresnelschen modifizierten Beugungstheorie. In Wirklichkeit ist es nun theoretisch von größtem Interesse, wenigstens in einem speziellen Falle eine strenge Lösung zu haben, schon deshalb, weil dadurch der Gültigkeitsbereich der genäherten Theorie fester abgegrenzt wird, und praktisch wird die Sommerfeldsche Lösung vollkommen exakt sein in den Wellenlängengebieten, in denen die Voraussetzungen der Sommerfeldschen Theorie gültig sind (vollkommene Leitfähigkeit des beugenden Schirms); man darf sie natürlich nicht auf alle Teile des sichtbaren Spektrums anwenden wollen (Versuche von Gouy).

Die letzten beiden Kapitel behandeln sehr eingehend Reflexion und Brechung in isotropen und anisotropen Medien.

Der Referent vermißt die Theorie der stehenden Wellen und die damit zusammenhängende Deutung der Wienerschen Versuche. Ferner sind die Maxwellschen Gleichungen immer nur auf vollkommene Isolatoren angewandt, infolgedessen fehlt die Berechnung des Reflexionsvermögens und Absorptionsvermögens der Metalle und die Besprechung der interessanten Versuche von Hagen und Rubens.

Die am Ende jeden Kapitels gegebenen Beispiele werden manchem Leser sehr erwünscht sein. Im zweiten Teil sollen die Abweichungen von der Maxwellschen Theorie behandelt werden.

Tübingen. R. Gans.



Th. Albrecht, Bestimmung der Längendifferenz Potsdam-Greenwich im Jahre 1903. (Veröffentlichung des Kgl. preußischen geodätischen Instituts. Neue Folge Nr. 15.) II u. 77 S. 4⁰. Berlin 1904, P. Stankiewicz. ℳ 5.—

Die von den Herren Th. Albrecht und B. Wanach 1903 ausgeführte Längenbestimmung zwischen Potsdam und Greenwich bildet ein Glied in der Kette der in den letzten Jahren vorgenommenen Anschlüsse zur Sicherung der fundamentalen Längendifferenz Greenwich-Paris, die bis auf den heutigen Tag einer Ungewißheit unterworfen war, wie sie in der Zeit des elektrischen Telegraphen und in Anbetracht der großen Wichtigkeit gerade jener Längendifferenz nicht mehr hätte bestehen sollen.

Die hier vorliegende Publikation gibt aufs ausführlichste Rechenschaft über Methode und Anlage der Beobachtungen; wir greifen die wesentlichen Punkte heraus. Von den beiden mit Repsoldschem Registriermikrometer versehenen Passageninstrumenten hatte das von Herrn Albrecht benutzte 8,1 cm Öffnung bei 92 cm Brennweite, das Herrn Wanach dienende nur 6,8 cm Öffnung und 87 cm Brennweite. Infolge der Größe des Längenunterschiedes von 52^m ging es zwar nicht an, in Greenwich und Potsdam allabendlich dieselben Sterne zu beobachten, indes ist die aus dieser nicht völligen Elimination der Rektaszensionen der Sterne fließende Unsicherheit durch die Anordnung der Zeitbestimmungen fast auf Null herabgedrückt. Die Sternörter entstammen den besten modernen Katalogen und sind dann auf dem Wege sukzessiver Annäherung einer Ausgleichung auf Grund des Längenbestimmungsmaterials unterzogen. Die Zeitsterne verteilen sich nicht weit vom Zenit so, daß der Einfluß eines Azimutfehlers in der Zeitbestimmung nahezu verschwinden muß. Als mittlerer Fehler der Uhrkorrektion aus einem Stern kommt denn auch der geringe Betrag $\pm 0.03^s$ zum Vorschein.

Besondere Sorgfalt ist der elektrischen Leitung gewidmet; sie besaß von vornherein eine sehr inhomogene Beschaffenheit: auf 522 km Bronzedraht auf deutschem Boden von Potsdam bis Emden folgten 425 km Seekabel und daran schloß sich die 235 km lange Kupferdrahtleitung Bacton-Greenwich. Um nun wenigstens die Lage des Kabels symmetrisch zu gestalten, schaltete die englische Telegraphenverwaltung noch die 334 km lange Schleife London-Leicester-London ein. Wie bei allen neueren Längenbestimmungen sollte nur mit direkten Leitungen operiert werden und daher blieben die für den gewöhnlichen Telegraphenbetrieb in Emden und Bacton befindlichen Translatoren außer Gebrauch. Übrigens lehrte das Experiment, daß man bei Benutzung der Translatoren ein nur um 0.01^s abweichendes Resultat erhalten haben würde. Die Stromzeit für die 1091 km Oberleitung und 425 km submarines Kabel erreichte den hohen Betrag von $s = + 0.141^s$, mittl. Fehler $\pm 0.001^s$.

Die Genauigkeit der Längendifferenz aus den Beobachtungen eines Abends charakterisiert sich durch den mittl. Fehler $\pm 0.021^s$ und als Schlußresultat folgt aus 24 Abenden zwischen 1903 Mai 7 und Juli 11 mit einmaligem Beobachter- und Instrumentenwechsel der Wert des Längenunterschiedes

Transit circle der Sternwarte Greenwich westlich vom östlichen Meridianhaus des geodätischen Instituts zu Potsdam:

$$52^m 16^s.051, \text{ mittl. Fehler } \pm 0.005^s$$

Durch die behandelte Längenbestimmung ist in Verbindung mit den sowohl von englischer wie von französischer Seite i. J. 1902 angestellten Längenbestimmungen Paris-Greenwich (Monthly notices, Vol. 65, Nr. 3 und Comptes rendus, T. 139, Nr. 24) der bisherigen Ungewißheit hinsichtlich der gegenseitigen Lage von Paris und Greenwich ein Ende bereitet worden, und mit größerer Sicherheit, als das 1893 durch van de Sande Bakhuyzen (Astron. Nachr. Nr. 3202, 1893 Dez.) geschehen konnte, ließ sich jetzt das zentraleuropäische Längennetz ausgleichen. Eine solche Ausgleichung zwischen 176 Längenbestimmungen mit 79 Stationspunkten hat wiederum Th. Albrecht vorgenommen (Astron. Nachr. Nr. 3993, 1905 Febr). U. a. liefert die Ausgleichung den Längenunterschied Paris-Greenwich zu $9^m 20.932^s$, und der mittl. Fehler der am sichersten fest gelegten Längen gegen Greenwich folgt zu $\pm 0.02^s$.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

F. Hayn, Selenographische Koordinaten. II. Abhandlung. (Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. 29. Band, Nr. I.) Mit 4 Tafeln. 142 S. Lex. 8. Leipzig 1904, B. G. Teubner. ℳ 6.—

In einer I. Abhandlung (siehe diese Ztschr. Bd. 49, S. 388) hatte Herr Hayn die theoretische Vorarbeit und die Revision der mathematischen Behandlung der Monddrehung erledigt; die II. Abhandlung stellt sich als Aufgabe die Ableitung der Rotationselemente des Mondes und der selenographischen Koordinaten der 5 das Netz erster Ordnung bildenden Krater Mösting A, Messier A, Kepler A, Egede A, Tycho Zentralberg.

Das Instrument, an dem die Beobachtungsarbeit in den Jahren 1898 bis 1903 geleistet wurde, war der Leipziger 30 cm-Refraktor, ausgerüstet mit Reinfelderscher Optik und Repsoldscher Montierung; die Brennnweite beträgt 3,6 m. Zur Erzielung guter Mondbilder mußte das Objektiv indes bis auf 15 cm Durchmesser abgeblendet werden. Die von periodischen und fortschreitenden Fehlern freie Mikrometerschraube hatte eine Ganghöhe von 0,58 mm, aus Durchgängen von Plejadensternen fand sich ihr Revolutionswert zu 33.48″; weder die Okularstellung noch der Schraubenwert verrieten eine Abhängigkeit von der Temperatur. Während nun der bei dem Gros aller Messungen innegehaltene Beobachtungsmodus in der Bestimmung der Rektaszensions- und Deklinationsdifferenzen bei ruhendem Fernrohr bestand, mußte der Verf. bei den später als notwendig sich herausstellenden Anschlüssen des Hauptkraters Mösting A an Punkte des Mondrandes dieses Verfahren verlassen und zu einer Messung der bis auf 18′ ansteigenden Distanzen schreiten, die die aktive Mitwirkung des Refraktortriebwerks verlangt und dessen Qualitäten denen der Mikrometerschraube gleichsetzt. Die Erfahrung bestätigte die Zulässigkeit dieser Annahme; die periodischen Fehler des Uhrkreises erwiesen sich in allen Teilen als gleichmäßig und nicht übermäßig groß: in 72^s kamen Ausschläge von 1.3″ vor.

Ursprünglich sollte die Position von Mösting A als keiner Verbesserung bedürftig angesehen und lediglich die Neigung J des Mondäquators gegen die Ekliptik neu abgeleitet werden. Im Verlaufe der Arbeit erwies es sich jedoch als unumgänglich, nicht nur den Ort von Mösting A, sondern auch die physische Libration neu zu untersuchen. Um zunächst den Krater

festzulegen, wurde das Gebilde an 18 Randpunkte in der oben angedeuteten Weise angeschlossen und gefunden

$$\lambda = -5^{0}10'17'' \quad \beta = -3^{0}10'58''.$$

Aus der Gesamtheit der Beobachtungen folgte ferner für die Neigung

$$J = 1^{0}32'16''.$$

Seinen Resultaten will der Verf. zwar noch keine definitive Bedeutung beigelegt wissen, da eine Neuberechnung der umfangreicheren älteren Reihen nach der revidierten Theorie erst dazu verhelfen könne; als sicher darf aber das Ergebnis gelten, daß der Mondradius zum Krater Mösting A sich größer herausstellt, als der mittlere Radius der Mondperipherie. Das hieße, daß der Mond um beiläufig 1″ oder 2000 m nach der Erde zu verlängert sei. Für die Realität spricht nicht nur die innere Genauigkeit der Beobachtungen, sondern auch der Umstand, daß mit der Vergrößerung des Mondradius für Mösting A der Widerspruch verschwindet, der zwischen den Hansenschen Mondstörungen und den älteren Arbeiten über die physische Libration bestand. Hansen findet nämlich für die Funktion f der Trägheitsmomente A, B, C den Wert $f = 0{,}9$, während die Reihen von Schlüter und Hartwig, deren Berechnung nur ein Radius zugrunde liegt, für f nur 0,5 ergaben. Nach Hayn hingegen kommt in Übereinstimmung mit der Theorie $f = 0{,}85$. —

Da die Beobachtungen des Mondrandes teilweise stark von systematischen Fehlern beinflußt sind, suchte Herr Hayn aus seinen Beobachtungen das Randprofil zu studieren; die Tafel I der Abhandlung stellt das Resultat graphisch dar. Später hat dann der Verf. noch die Beobachtungen des Herrn Hartwig zugezogen und numerische Tafeln entworfen, die es erlauben, für jeden Punkt des Mondrandes und jede Libration die Beobachtungen (Meridianörter und vor allem Sternbedeckungen) von den Niveauungleichheiten des Randes zu befreien. (Astr. Nachr. Nr. 4009, 1905 April).

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

M. Brendel. Theorie des Mondes. Abhandlungen der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physische Klasse. Neue Folge Band III, Nr. 4; Berlin 1905, Weidmann. ℳ 7.— = Astronomische Mitteilungen der Kgl. Sternwarte zu Göttingen. VIII. Teil; Göttingen 1905.

Herrn Brendels Arbeiten bewegten sich mehrfach auf demselben Gebiete, das er mit dieser Abhandlung wieder betritt. Schon seine Theorie der kleinen Planeten[1]) verband mit ihrem eigentlichen Ziele der allgemeinen bequemen Darstellung der Planetenbewegungen innerhalb gegebener Annäherungsgrenzen das Streben, der Störungstheorie H. Gyldéns mehr Eingang zu verschaffen, als die von Gyldén selbst verfaßten Werke infolge ihrer schwierigen Schreibweise das zu tun vermochten.

Die vorliegende Schrift bringt die Anwendung derjenigen „von Gyldén aufgestellten Prinzipien, die wirklich auch bei der praktischen Störungs-

1) Abh. d. k. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Neue Folge Bd. I, Nr. 2; Berlin 1898 (4°, 171 S.).



rechnung schnell zum Ziele führen", auf die Theorie der Mondbewegung, Prinzipien, deren Übertragung auf den Mond noch mehr Vorteile bietet als bei den kleinen Planeten. Die Besonderheiten der Mondbewegung, die die Lösung des Problems teils erleichtern, teils erschweren, hebt die Einleitung übersichtlich und klar hervor und sie kennzeichnet auch kurz die Absichten, die Gyldén beim Entwurf seiner Theorie leiteten. Nachdem nun die beiden ersten Kapitel in leicht verständlicher Weise mit den Differentialgleichungen der Mondbewegung und der Entwicklung der Störungsfunktion die Vorbereitung erledigt, leitet das dritte Kapitel auf den Kernpunkt der Methode über; es behandelt die Einführung der periodischen Lösung nullten Grades und schlägt einen von dem Verfahren Hills durchaus verschiedenen Weg ein. Prinzipiell vermeidet Herr Brendel Reihen von mehr oder weniger schwacher Konvergenz; die Koeffizienten der Störungsglieder explicit als Funktionen der störenden Masse und der anderen Koordinaten auszudrücken, ist nicht erforderlich; „es genügt ja auch vollkommen, wenn es gelungen ist, soviel Relationen zwischen den gesuchten Koeffizienten aufzustellen, wie solcher Koeffizienten bestimmt werden sollen." Das vierte und fünfte Kapitel widmet sich der Berechnung der periodischen Lösung nullten Grades und der Glieder ersten Grades.

Den Inhalt seiner Arbeit glaubt der Verfasser im wesentlichen noch als ein numerisches Experiment bezeichnen zu müssen, da zunächst ein Kriterium dafür fehlt, welchen Betrag die Restglieder der angewandten Reihen erreichen können.

Eines der interessantesten Probleme der Mondbewegung ist inzwischen auf Herrn Brendels Anregung und im Rahmen seiner auf Gyldéns Prinzipien gestützten Theorie von Herrn A. v. Brunn[1]) neu bearbeitet worden. Herr v. Brunn unterzieht die Säkularbeschleunigung des Mondes einer eingehenden Diskussion, die einen Beitrag zur theoretischen Erkenntnis dieser ihrer Quantität nach lange umstrittenen Ungleichheit bildet. Die Erscheinung äußert sich seit historischen Zeiten in einer allmählichen Beschleunigung des Mondes, und die Erklärung geht auf die Variation der Exzentrizität der Erdbahn zurück, wie Laplace 1787 (im engsten Anschluß übrigens an Lagrange) nachwies.

Straßburg i. E. WIRTZ.

Neue Bücher.

Analysis.

1. KOZÁK, JOS., Grundprobleme der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. I. Band. Wien 1907, Fromme. M. 11.—
2. SABUDSKI, N., Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, ihre Anwendung auf das Schießen und auf die Theorie des Einschießens. Mit Genehmigung des Verfassers übersetzt von Ritter von Eberhard. Stuttgart, Grub. M. 8.80, geb. M. 10.—

1) A. v. Brunn, Die Säkularbeschleunigung des Mondes. (Dissertation.) Göttingen 1905 (8°, 102 S.)

Astronomie, Chronologie und Geodäsie.

3. ANDOYER, H., Cours d'astronomie. I. Astronomie théorique. Paris, Hermann, Frs. 9.—
4. BÖRSCH, A., Lotabweichungen. Heft III. Astronomisch-geodätisches Netz I. Ordnung nördlich der europäischen Längengradmessung in 52 Grad Breite. (Veröffentlichung des Kgl. preußischen geodätischen Instituts, Neue Folge Nr. 28.) Berlin, Stankiewicz. M. 10.—
5. GAUSS, F. G., Trigonometrische und polygonometrische Rechnungen in der Feldmeßkunst. 3. Auflage, 4. u. 5. Heft. Halle, Strien. Je M. 3.50.
6. GINZEL, F. K., Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Das Zeitrechnungswesen der Völker. I. Band: Zeitrechnung der Babylonier, Ägypter, Mohammedaner, Perser, Inder, Südostasiaten, Chinesen, Japaner und Zentralamerikaner. Leipzig, Hinrichs. M. 19.—; geb. M. 22.—
7. HERMES, O., u. P. SPIES, Elemente der Astronomie und mathematischen Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. 5., verbesserte Auflage. Berlin, Winckelmann & Söhne. M. 1.20.

S. auch Nr. 16, 19, 43.

Darstellende Geometrie.

8. GEYGER, ERICH, Lehrbuch der darstellenden Geometrie für den Gebrauch an technischen Hochschulen, mittleren gewerblichen und technischen Lehranstalten, Kunstgewerbeschulen, Fortbildungsschulen usw. u. f. das Selbststudium. I. Teil, Affinität und Perspektivität ebener Figuren. Perspektive, involutorische und harmonische Grundgebilde. Kegelschnitte als Kreisprojektionen. Die orthogonale axonometrische und schiefe Projektion. Zylinder, Kegel, Kugel; ebene und Raumkurven. Schnitte und Abwicklungen. Durchdringungen. Leipzig, Göschen. M. 8.—; geb. M. 8.60.
9. HEMPEL, J., Schattenkonstruktionen für den Gebrauch an Baugewerkschulen, Gewerbeschulen und ähnlichen Lehranstalten, sowie zum Selbstunterricht. Leipzig, Teubner. geb. M 5.—
10. ROHN, KARL, u. ERWIN PAPPERITZ, Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 3 Bände. 3., umgearbeitete Auflage. Leipzig, Veit & Co. M. 28.—, geb. M. 31.—

Geometrie.

11. ADLER, AUGUST, Theorie der geometrischen Konstruktionen. (Sammlung Schubert LII.) Leipzig, Göschen. geb. M. 9.—
12. EBNER, F., Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Leipzig, Teubner. geb. M. 4.—
13. ZÜHLKE, PAUL, Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen bei ungünstigen Lageverhältnissen. Leipzig, Teubner. kart. M. 1.—

Geschichte und Biographien.

14. KISTNER, A., Geschichte der Physik. I. Die Physik bis Newton. II. Die Physik von Newton bis zur Gegenwart. (Sammlung Göschen Nr. 293 u. 294.) Leipzig, Göschen. geb. je M. —.80.
15. MATHÉ, FRANZ, Karl Friedrich Gauß. („Männer der Wissenschaft" Heft 6.) Leipzig, Weicher. M. 1.—
16. OPPENHEIM, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. („Aus Natur Geisteswelt" 110. Bändchen.) Leipzig, Teubner. M. 1.—, geb. M. 1.25.
17. RICHARZ, F., u. W. KÖNIG, Zur Erinnerung an Paul Drude. Zwei Ansprachen. Mit einem Bilde und einem Verzeichnis der wissenschaftl. Arbeiten Drudes. Gießen, Töpelmann. M. 1.40.



Logikrechnung.

18. Shearman, A. T., Development of symbolic logic; a critical-historical study of the logical calculus. London, Williams & Norgate. cloth 5 s.

Mechanik.

19. Darwin, Sir G. H., On the figure and stability of a liquid satellite. London, Dulau. 4 s.
20. Herrmann, Gust., Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen. Berlin, Simion Nfl. geb. M. 8.—
21. Heun, Karl, Lehrbuch der Mechanik. I. Teil. Kinematik. (Sammlung Schubert, XXXVII.) Leipzig, Göschen. geb. M. 8.—
22. Leon, Alfons, Proseminar-Aufgaben aus der Elastizitätstheorie. Wien u. Leipzig, Fromme. M. 2.50.
23. Leon, Alfons, Spannungen und Formänderungen einer um einen ihrer Durchmesser gleichmäßig sich drehenden Kreisscheibe. Wien u. Leipzig, Fromme. M. 1.25.

Physik und Geophysik.

24. Auerbach, Felix, Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre. („Aus Natur und Geisteswelt" 40. Bändchen.) 2. Auflage. Leipzig, Teubner. M. 1.—; geb. M. 1.25.
25. Drude, Paul, Lehrbuch der Optik. 2., erweiterte Auflage. Leipzig, Hirzel. M. 12.—; geb. M. 13.—
26. Gleichen, Alexander, Leitfaden der praktischen Optik. Leipzig, Hirzel. M. 5.60.
27. Haase, Geo., Repetitorium der Physik. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. Freiburg i. B. 1907, Speyer & Kaerner. M. 2.—; geb. M. 2.60, durchsch. M. 3.—
28. Jadanza, N., Teorica dei cannocchiali, esposta secondo il metodo di Gauss. 2a edizione interamente rifatta. Torino. L. 8.—
29. Jäger, Gust., Theoretische Physik. I. Mechanik und Akustik. 3., verbesserte Auflage, Neudruck (Sammlung Göschen Nr. 76.) Leipzig, Göschen. geb. M. —80.
30. Keindorff, August, Die Zustandsgleichung der Dämpfe, Flüssigkeiten und Gase. Leipzig, Teubner. M. 2.—
31. Kühnen, F., u. Ph. Furtwängler, Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam mit Reversionspendeln. (Veröffentlichung des Kgl. preußischen geodät. Instituts. Neue Folge Nr. 27.) Berlin, Stankiewicz.
32. Lenard, P., Über Kathodenstrahlen. Nobel-Vorlesung mit einem angehängten Literaturverzeichnis. Leipzig, Barth. M. 1.20.
33. Lorentz, H. A., Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern. Unveränderter Abdruck der 1875 bei E. J. Brill in Leiden erschienenen ersten Auflage. Leipzig, Teubner. geb. M. 3.20.
34. Mahler, G., Physikalische Formelsammlung. 3., verbesserte Auflage. (Sammlung Göschen Nr. 136.) Leipzig, Göschen. geb. M. —.80.
35. Meissner, Otto, Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung, mit Ausblicken auf Witterungskunde und Klimalehre. Unterlagen f. schulgemäße Behandlung sowie zum Selbstunterricht. (Sammlung naturwissenschaftl.-pädagogischer Abhandlungen, Band II Heft 6.) Leipzig, Teubner. M. 2.60.
36. Müller-Erzbach, W., Physikalische Aufgaben f. die oberen Klassen höherer Lehranstalten und für den Selbstunterricht. 3., verbesserte und vermehrte Auflage. Berlin, Springer. M. 2.40.
37. Petrovitch, M., La mécanique des phénomènes, fondée sur les analogies. („Scientia" Nr. 27.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 2.—
38. Rydberg, J. R., Elektron der erste Grundstoff. Berlin, Junk. M. 1.—

S. auch Nr. 14, 43.

Statistik.

39. Blaschke, Ernst, Vorlesungen über mathematische Statistik (Die Lehre von den statistischen Maßzahlen). (Teubners Sammlung Band XXIII.) Leipzig, Teubner. geb. M. 7.40.

Tafeln.

40. Bruhns, C., Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf sieben Dezimalen. 7. Ster.-Ausg. (Auch engl., franz. und italien. Ausg.) Leipzig, Tauchnitz. M. 4.20.
41. Guillemin, A., Tableaux logarithmiques A et B, équivalant à des tables de logarithmes à 6 et à 9 décimales et notice explicative donnant la théorie et le mode d'emploi des tableaux. Paris, Alcan.
42. Jaakson, J., Graphische Multiplikations-, Divisions-, Quadraten- und Wurzeltabelle. Blatt I f. ein-, zwei- und dreistellige Zahlen. Berlin, Weber. M. —.50.

Verschiedenes.

43. Jochmann, E., Grundriß der Experimentalphysik und Elemente der Chemie sowie der Astronomie und der mathematischen Geographie. Zum Gebrauch beim Unterricht auf höheren Lehranstalten und zum Selbststudium. 16., verbesserte Auflage, herausg. v. O. Hermes u. P. Spieß. Berlin, Winckelmann & Söhne. M. 5.—; geb. M. 5.50.
44. Lafitte, Prosper de, Essai sur le carré magique de N à N nombres. Paris, Gauthier-Villars.
45. Reidt, Friedrich, Anleitung zum mathematischen Unterricht an höheren Schulen. 2. Auflage, revidiert u. mit Anmerkungen versehen v. Heinrich Schotten. Berlin, Grote. geb. M. 4.—
46. Schubert, Hermann, Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. III. Band. Leipzig, Göschen. geb. M. 4.—

Eingelaufene Schriften.

[In dieser Abteilung werden alle eingelaufenen Schriften regelmäßig aufgeführt. Die Besprechung geeigneter Schriften bleibt vorbehalten. Rücksendung findet nicht statt.]

Adler, A., Theorie der geometrischen Konstruktionen, s. N. B. („Neue Bücher") Nr. 11.

Andoyer, H., Cours d'astronomie, s. N. B. 3.

Auerbach, F., Die Grundbegriffe der modernen Naturlehre, s. N. B. 24.

Beck, Hans, Die Strahlenketten im hyperbolischen Raum. Diss. Bonn. Hannover, 1905, Druckerei Riemschneider.

Bendt, Franz, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3., verbesserte Auflage. (Webers illustrierte Handbücher Band 157.) geb. M. 3.—

Bigler, Ulrich, Die Wellenfläche optisch zweiachsiger Kristalle. Beilage zum Programm der St. Gallischen Kantonsschule. St. Gallen 1902, Zollikofersche Buchdruckerei.

Blaschke, E., Vorlesungen über mathematische Statistik, s. N. B. 39.

Block, C., Lehr- und Übungsbuch für den planimetrischen Unterricht an höheren Schulen. 2. Teil. Unter-Tertia. Leipzig u. Berlin, Teubner. geb. M. —.80.

Bochow, Karl, Die Funktionen rationaler Winkel. Insbesondere über die numerische Berechnung der Winkelfunktionen ohne Benutzung der trigonometrischen Reihen und der Zahl π. Sonderabdruck aus dem Programm 1905 der städtischen Realschule zu Magdeburg. Leipzig 1905, Fock.

Börsch, A., Lotabweichungen, Heft III, s. N. B. 4.

Brioschi, Francesco, Opere matematiche. T. IV. Milano, Hoepli.

Bromwich, T. J. I'A., Quadratic forms and their classification by means of invariant factors. (Cambridge Tracts in Mathematics and mathematical Physics Nr. 3.) Cambridge, University Press. 3 s 6 d.

Charlier, C. V. L., Über die Acceleration der mittleren Bewegung der Kometen. Meddelande från Lunds Astronomiske Observatorium. Archiv för Mathematik, Astronomi och Fysik.

Drude, P., Lehrbuch der Optik, s. N. B. 25.

Ebner, F., Leitfaden der technisch wichtigen Kurven, s. N. B. 12.

Forsyth, Andrew Russell, Theory of Differential Equations. Part IV. Partial differential equations. Vols. V and VI. Cambridge, University Press. 25 s.

Geyger, E., Lehrbuch der darstellenden Geometrie, s. N. B. 8.

Ginzel, F. K., Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, I., s. N. B. 6.

Girndt, M., Technik und Schule. Beiträge zum gesamten Unterrichte an technischen Lehranstalten. In zwanglosen Heften herausgegeben. I. Band. 1. Heft. Leipzig, Teubner. M. 1.60.

Gleichen, A., Leitfaden der praktischen Optik, s. N. B. 26.

Guillemin, A., Tableaux logarithmiques, s. N. B 41.

Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dezember 1905. (Veröffentlichung des Kgl. Preußischen Geodätischen Instituts, Neue Folge Nr. 29.) Berlin, Stankiewicz. M. 4.—

Henkler, Paul, Der Lehrplan für den Unterricht in der Naturkunde, historisch u. kritisch betrachtet. (Sammlung naturwissenschaftl.-pädagogischer Abhandlungen, Band II, Heft 7.) Leipzig, Teubner. M. 1.—

Industries électriques, Etat actuel des, Conférences faites sous les auspices de la Société française de Physique et de la Société d'encouragement pour l'industrie nationale. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.—

Jouffret, E., Mélanges de géometrie à quatre dimensions. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 7.50.

Junker, Fr., Repetitorium und Aufgabensammlung zur Integralrechnung. (Sammlung Göschen Nr. 147.) Leipzig, Göschen. geb. M. —.80.

Kreindorff, A., Die Zustandsgleichung der Dämpfe, Flüssigkeiten und Gase, s. N. B. 30.

Kistner, A., Geschichte der Physik, I, II, s. N. B. 14.

Kühnen, F., u. Ph. Furtwängler, Bestimmung der absoluten Größe der Schwerkraft zu Potsdam, s. N. B. 31.

Lafitte, P. de, Essai sur le carré magique, s. N. B. 44.

Laurent, H., La géometrie analytique générale. Paris, Hermann. Frs. 6.—

Lebesgue, Henri, Leçons sur les séries trigonométriques, professées au Collège de France. Paris, Gauthier-Villars. Frs. 3.50.

Lehnen, Wilhelm, Teilung eines jeden gegebenen Winkels in den Primzahlen 3, 5, 7, 11, 13 usw. entsprechende gleiche Teile. 1 Blatt 8°. Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Leon, A., Proseminar-Aufgaben . . ., s. N. B. 22.

Leon, A., Spannungen und Formänderungen, s. N. B. 23.

Leschanowski, H., Gemeinverständliche erste Einführung in die höhere Mathematik und deren Anwendung. Wien u. Leipzig, Fromme. M. 2.50.

Lorentz, H. A., Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, s. N. B. 33.

Marx, E., Die Geschwindigkeit der Röntgenstrahlen. Experimentaluntersuchung. (Abhandlungen der mathem.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Ges. der Wiss. Bd. XXIX Nr. VI.) Leipzig, Teubner. M. 1.60.

Mathé, Fr., Karl Friedrich Gauß, s. N. B. 15.

Maudebli, S., Die Interpolation und ihre Verwendung bei der Benutzung und Herstellung mathematischer Tabellen. Solothurn, Zepfelsche Buchdruckerei.

Meissner, O., Die meteorologischen Elemente und ihre Beobachtung, s. N. B. 3

Müller, Franz Joh., Abbildung eines Sphäroidstreifens auf die Ebene. Sonderabdruck aus Bd. X der Zeitschr. des Bayer. Geometervereins. Würzburg 190

Müller-Erzbach, W., physikalische Aufgaben, s. N. B. 25.

Newest, Th., Vom Kometentrug zur Wirklichkeit der letzten Dinge. Einige Weltprobleme. IV. Teil. Wien, Konegen. M. 2.5

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit, s. N. B. 16.

Pesloüan, Ch. Lucas de, N.-H. Abel, Sa vie et son œuvre. Paris, Gauthier-Villars. Cartonné Frs. 5.—

Petit-Bois, G., Tafeln unbestimmter Integrale. Leipzig, Teubner.

Petrovitch, M., La mécanique des phénomènes, s. N. B. 37.

Pionchon, S., Principes et formules de trigonométrie rectiligne et sphérique. (Bibliothéque de l'Elève-Ingénieur.) Paris, Gauthier-Villars. Frs. 5.—

Reidt, Fr., Anleitung zum mathematischee Unterricht, s. N. B. 45.

Reye, Th., Die Geometrie der Lage. II. Abteilung. 4., umgearbeitete u. verbesserte Auflage. Stuttgart 1907, Kröner. M. 10.—; geb. M. 12.—

Rydberg, J. R., Elektron der erste Grundstoff, s. N. B. 38.

Sabudski, N., Die Wahrscheinlichkeitsrechnung, s. N. B. 2.

Sahulka, Johann, Erklärung der Gravitation, der Molekularkräfte, der Wärme, des Lichtes, der magnetischen und elektrischen Erscheinungen aus gemeinsamer Ursache auf rein mechanischem, atomistischem Wege. Wien und Leipzig, Fromme. M. 5.—

Schubert, H., Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis, III, s. N. B. 46.

Steckelberg, H., Die Elemente der Differential- und Integralrechnung. Leipzig. M. —.80.

Stuyvaert, M., Les nombres positifs. Exposé des théories modernes de l'arithmétique élémentaire. Gand, Van Goethem. Frs. 3.—

Thieme, Herm., Leitfaden der Mathematik für Realanstalten. I. Teil: Die Unterstufe. 3. Auflage. Leipzig 1907, Freytag.

Vessiot, E., Leçons de géométrie supérieure, professées en 1905—1906. Rédigées par M. Anzenberger. (Publications du Laboratoire de mathématiques de l'université de Lyon.) Paris, Hermann. Frs. 12.—

Vivanti, Giulio, Elementi della theoria delle funzioni poliedriche e modulari. (Manuali Hoepli 366—367.) Milano, Hoepli. Legato in tela. L. 3.—

Wrobel, E., Übungsbuch zur Arithmetik und Algebra. I. Teil: Pensum der Tertia u. Untersekunda. 11., durchgesehene Auflage. Rostock, Koch. geb. M. 3.30.

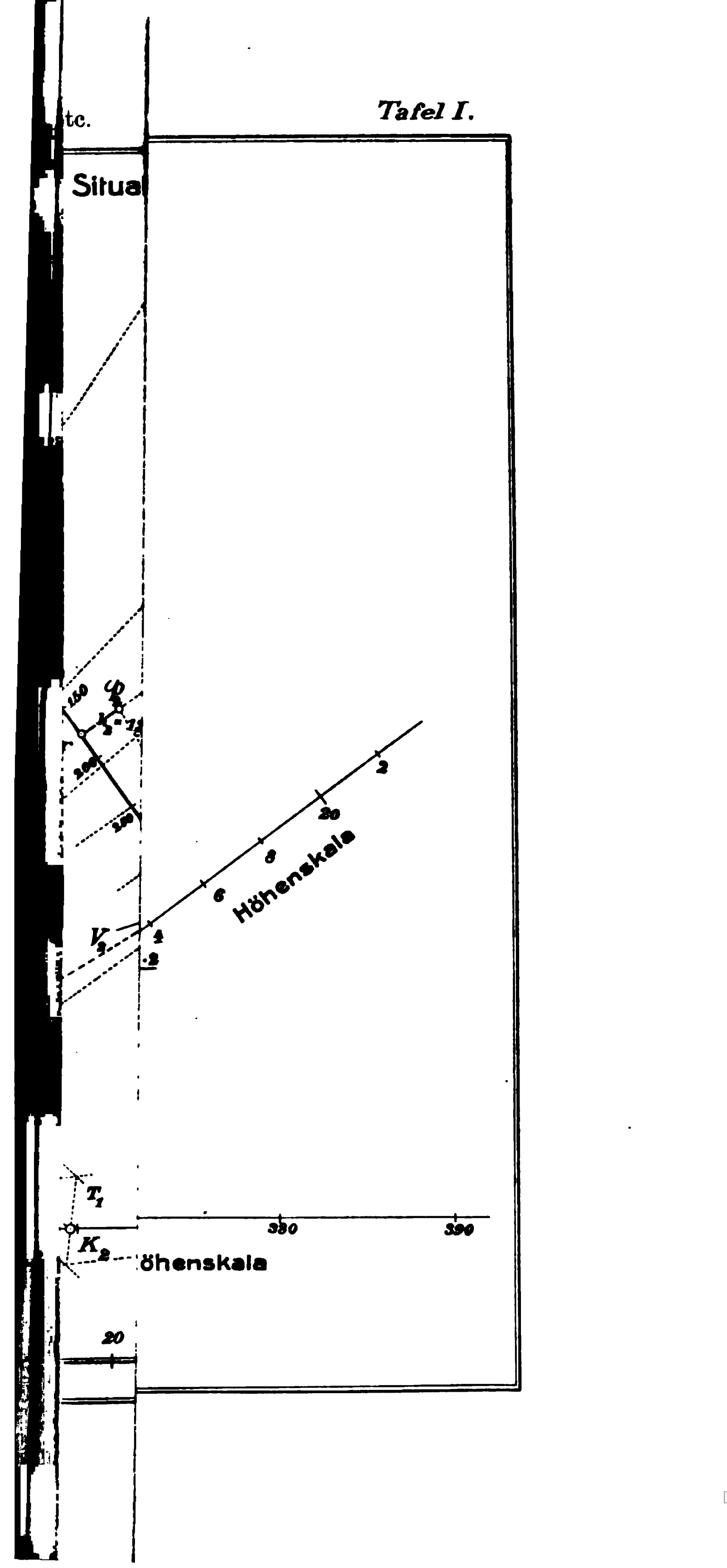
— Dasselbe. II. Teil: Pensum der Obersekunda und Prima des Gymnasiums. 6. Auflage. Ebenda. geb. M. 1.60.

— Dasselbe, Anhang für höhere realistische Lehranstalten (Realgymnasien, Oberrealschulen usw.). Ebenda. kart. M. 1.—

— Leitfaden der Geometrie nebst einer großen Zahl von Übungsaufgaben. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. 3., verbesserte und vermehrte Auflage. Ebenda. geb. M. 2.—

Young, W. H., and Grace Chisholm Young, The theory of sets of points. Cambridge, University press. cloth 12 s.

Zühlke, P., Ausführung elementar-geometrischer Konstruktionen . . ., s. N. B. 13.


tc.
Situa
Höhenskala
2
20
8
6
4
2
V_2
T_1
K_2
380
390
öhenskala
20

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

54. BAND. 2. HEFT.

MIT 38 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 29. Januar 1907.



LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

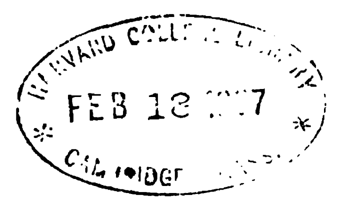
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

P. Bohl, B. Cohn, P. Debye, K. Doehlemann, A. Egerer, K. Fuchs, v. Gleich, A. Grünwald, K. Heun, W. Láska, R. Mehmke, G. Mie, M. Milankovitch, R. Müller, F. Nußbaum, J. V. Pexider, L. Prandtl, C. Runge, Fr. Schilling, Fr. Schur, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, M. Tolle, Fr. Ulkowski, Ph. Weinmeister, P. Werkmeister, K. Wieghardt, C. W. Wirtz, R. Wölffing.



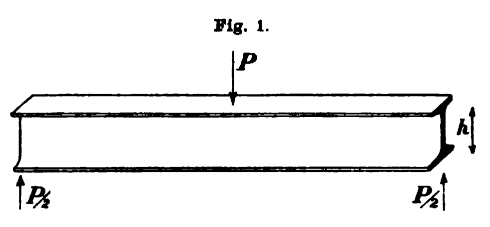
Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen.

Von A. Sommerfeld in Aachen.

§ 1. Problemstellung.

Die folgende Untersuchung nimmt ihren Ausgang von einer wichtigen Frage der Bautechnik. Bei der üblichen Verwendung der eisernen Träger z. B. der I-Träger kommt es darauf an, eine gegebene Belastung P unter möglichst geringem Aufwand von Material zu tragen. Ist die Anordnung im Sinne von Fig. 1 getroffen, so wird der Träger auf Biegung beansprucht; für die Stärke der auftretenden Spannungen wird daher das Trägheitsmoment J des Querschnittes, oder genauer gesagt, das sogenannte „Widerstandsmoment" $J/(h/2)$ maßgebend. Das Verhältnis „Widerstandsmoment/Querschnitt" kann man als den „Wirkungsgrad" des betreffenden Profiles bezeichnen, da der Materialaufwand mit der Größe des Querschnittes und die Tragfähigkeit mit dem Widerstandsmomente proportional ist. Dieser Wirkungsgrad wird nun ersichtlich dann besonders günstig, wenn man den Steg des Profiles möglichst dünn macht.

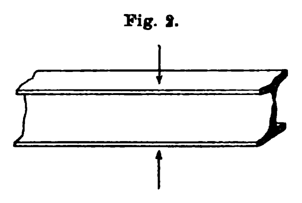
Fig. 1.



Indessen gibt es hierbei eine bestimmte Grenze. Ist der Steg zu dünn, so wird er bei der zu tragenden Last instabil; er wird seitlich ausbiegen, „ausbeulen", oder wie man im Anschluß an das instabile Gleichgewicht eines geraden Stabes sagt, „ausknicken".

Ersichtlich wird die Knickgefahr nicht nur von der Größe der Last P, sondern auch von der Art und Weise abhängen, wie dieselbe durch die Reaktionen an den Auflagerstellen des Trägers ins Gleichgewicht gesetzt wird. Die Knickgefahr ist bei gleicher Größe von P verhältnismäßig am kleinsten, wenn wie in Fig. 1 die Last in der Mitte zwischen den Auflagern angreift, so daß auf jedes Lager $P/2$ kommt. Die Knickgefahr wächst in dem Maße, wie sich P dem einen Ende nähert; sie wird am größten, wenn wie in Fig. 2 die Last P gerade über der gleichen und entgegengesetzten Gegenkraft P steht.

Bei der theoretischen Behandlung wird man diesen ungünstigsten Fall zugrunde zu legen haben. Man wird nicht nur den Fall einer in einen Punkt konzentrierten Belastung P untersuchen, der im Experimente kaum realisierbar ist, sondern wird etwa eine gleichförmige Verteilung der Last über eine Strecke l des Trägers voraussetzen. Schreibt man


Fig. 2.

$$p = \frac{P}{l},$$

so bedeutet p die Belastung für die Längeneinheit des Trägers (Fig. 3). Im Interesse der Einfachheit möge dann auch die Länge des Widerlagers l betragen.

Die Länge des Trägers selbst wird als unendlich vorausgesetzt, d. h. es wird angenommen, daß die Belastung P hinreichend weit von den Enden wirkt, so daß diese keinen Einfluß auf den Vorgang des Ausknickens nehmen.

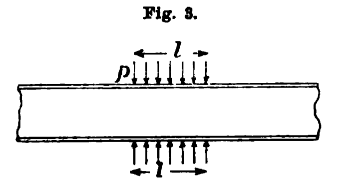


Fig. 3.

Da allein der Steg ausgebogen wird, so kommt es auf die Gestalt und Breite der Flansche nicht an. Maßgebend ist vielmehr nur die Höhe h und die Stärke s des Steges. Die Flanschen sind nur insofern von Belang, als sie vermöge ihrer Befestigung auf dem Auflager oder vermöge ihrer Verbindung mit der drückenden Last P eine Richtungsänderung des Steges am oberen und unteren Rande unmöglich machen. Der Steg eines I-Profiles verhält sich daher bei der Ausknickung wie eine an den Enden befestigte und *eingespannte* Platte (vgl. Fig. 4a). Zum Vergleiche wird man auch den Fall eines einfachen Bleches ohne Flanschen untersuchen (vgl. Fig. 4b). An die Stelle der Einspannung tritt hier die Bedingung, daß am oberen und unteren Rande keine Drehmomente übertragen werden, d. h. daß die Ränder des Steges frei drehbar angeordnet sind.

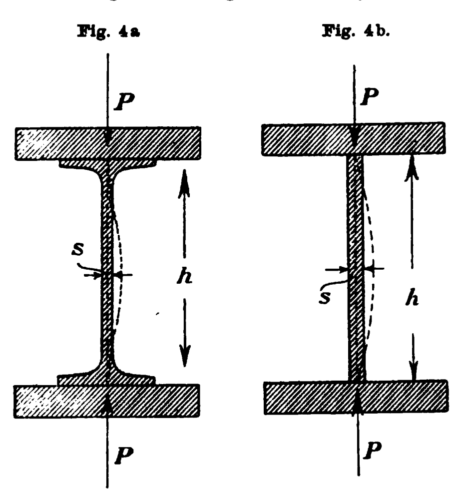


Fig. 4a Fig. 4b.

Die beiden in den Figuren 4a und 4b unterschiedenen Fälle sind analog zu den beiden Hauptfällen des klassischen Problems der

Knickung eines dünnen geraden Stabes: a) Stab an beiden Enden eingespannt, b) Stab an beiden Enden frei drehbar. Die Lösung dieses Problems ist in der bekannten Eulerschen Formel enthalten:

$$\text{(1)} \qquad \text{a)} \quad P = 4\pi^2 \frac{EJ}{h^2}, \qquad \text{b)} \quad P = \pi^2 \frac{EJ}{h^2};$$

hier bedeutet P die Knicklast, h die Länge, E den Elastizitätsmodul des Stabes, J das Trägheitsmoment des Querschnittes für diejenige Querschnittsachse, für die es am kleinsten ausfällt.

Den Formeln (1) analog müssen offenbar diejenigen Grenzformeln werden, auf die unser Problem im Falle $l = \infty$ zurückführt. In diesem Grenzfalle wird nämlich der Steg in seiner ganzen Erstreckung gleichmäßig an der Ausknickung teilnehmen; er wird sich also wie ein gewöhnlicher Stab von rechteckigem Querschnitt verhalten, wobei die eine Seite des Rechtecks gleich s, die andere gleich $l = \infty$ zu setzen ist. Das Trägheitsmoment dieses Querschnitts wird

$$J = \frac{ls^3}{12} = \infty;$$

zugleich wird auch die gesamte Knicklast P gleich ∞, während die „spezifische Knicklast" $p = P/l$ und das Trägheitsmoment $J_1 = J/l$ für die Breite 1 endlich bleibt. Die „spezifische Knicklast" p wird nun durch die zu (1) analogen Formeln[1])

$$\text{(2)} \qquad \text{a)} \quad p = \frac{4\pi^2}{1-\mu^2} \frac{EJ_1}{h^2}, \qquad \text{b)} \quad p = \frac{\pi^2}{1-\mu^2} \frac{EJ_1}{h^2}$$

gegeben, unter μ das Poissonsche Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung verstanden.

Die Lösung des Problems für den allgemeinen Fall eines endlichen l oder für den anderen Grenzfall $l = 0$ soll im Folgenden abgeleitet werden, wobei wir auch die Formeln (2) wiederfinden werden. Daß diese Lösung bisher unbekannt war, ergibt sich z. B. aus dem Umstande, daß eine zur Ausarbeitung neuer Normalprofile eingesetzte Sachverständigen-Kommission, welche Versuche über die zulässige Verschwächung der Stege von I-Trägern anstellen ließ, zur Berechnung dieser Versuche sich der Eulerschen Formel (1b) bediente.[2]) Die Ausknickungsfigur wurde in dem fraglichen Kommissionsberichte nach Art von Fig. 5 schematisiert, und es wurde angenommen, daß die

1) Vgl. Love, Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Vol. II, § 381.

2) Zeitschr. d. Vereins deutscher Ingenieure 1905, S. 1487, vgl. speziell S. 1496 und 1497.

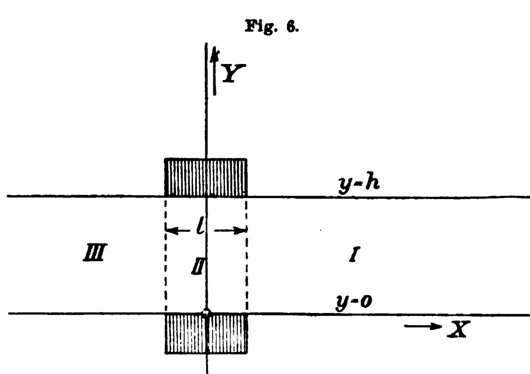
Knicklast für unser Problem dieselbe sei, wie für einen Stab von der Breite $l + h$, der sich über seine ganze Breite gleichmäßig ausbiegt. Daß die Wahl der Breite $l + h$ auf Willkür beruht, liegt auf der Hand; auch ist die Ausknickungsfigur in Wirklichkeit sowie nach unserer Theorie keineswegs scharf rhombisch begrenzt, läuft vielmehr asymptotisch und stetig nach den Seiten aus. Endlich ist nicht einzusehen, weshalb bei Versuchen mit I-Trägern die Formel b) (freie Drehbarkeit am oberen und unteren Ende) und nicht die Formel a) (Einspannung) in Frage kommen soll. Wir kehren zu solchen Versuchen und ihrer Deutung im § 7 zurück.

Fig. 5.

Wollen wir unser Problem in Strenge behandeln, so müssen wir zunächst die Gesetze angeben — Differentialgleichungen und Randbedingungen —, welche die geometrische Gestalt der möglichen Ausbiegungen beherrschen. Daß es sich hier nicht um irgend welche zufällige Formen, sondern um streng gesetzmäßige Erscheinungen handelt, zeigen auch die Versuche aufs deutlichste.

Die *Differentialgleichung des Problems* ist bereits bei Love[1]) abgeleitet; integriert wird sie dort aber nur für den verhältnismäßig trivialen Fall eines Rechtecks, dessen beide Seitenpaare nach ihrer ganzen Länge je von einem konstanten Drucke beansprucht werden.

Fig. 6.



Die Mittelfläche des ursprünglich ebenen Bleches sei die xy-Ebene. Die x-Achse falle mit der unteren Kante des Bleches zusammen; die obere Kante sei $y = h$. u sei die Ausbiegung senkrecht zur xy-Ebene. Wir unterscheiden drei Gebiete (vgl. Fig. 6) nämlich

$$\text{I. } x > \frac{l}{2}, \qquad \text{II. } |x| < \frac{l}{2}, \qquad \text{III. } x < -\frac{l}{2}.$$

In I. und III. gilt die gewöhnliche Differentialgleichung für die unendlich kleinen Biegungen der Platten

$$\text{I. } \varDelta\varDelta u = 0, \qquad \varDelta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

1) l. c. Vol. II. § 380 Gl. (25).

In II. ist die Gleichung deshalb abzuändern, weil hier außer den die Biegung begleitenden Spannungen noch ein durch die spezifische Belastung p hervorgerufener, von Anfang an vorhandener Druck nach der y-Richtung wirkt. Dieser Druck bedingt das letzte Glied in der Differentialgleichung

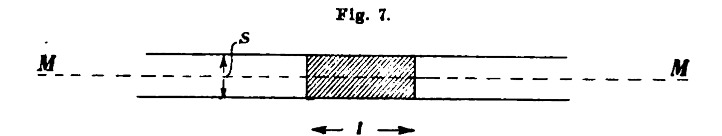
$$\text{II.} \quad \varDelta\varDelta u + \frac{p}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Während nämlich bei der Ableitung der Gl. I. Glieder vom zweiten Grade in u oder den Ableitungen von u vernachlässigt werden („unendlich kleine Verbiegungen"), ist das Produktglied $p(\partial^2 u/\partial y^2)$, welches den von u unabhängigen Druck p enthält, nicht zu vernachlässigen. C bedeutet den sogenannten „Plattenmodul" (cylindrical rigidity bei Love):

$$(3) \qquad C = \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{Es^3}{12} = \frac{EJ_1}{1-\mu^2},$$

wo wie oben E den Elastizitätsmodul, s die Stärke der Platte, μ die Poissonsche Zahl und J_1 das Trägheitsmoment eines Schnittes $y =$ const. von der Breite 1 um die Mittelachse MM (Fig. 7) bedeutet.

Fig. 7.



Hierzu kommen die folgenden *Nebenbedingungen*: Im Unendlichen verschwindet u und $\partial u/\partial x$ (solange wenigstens, als die Belastungsfläche l endlich ist):

$$(4) \qquad u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = \pm\infty.$$

Die Ausbiegung ist eine gerade Funktion von x im Gebiete II, und sie ist in den Gebieten I und III durch Ausdrücke gegeben, die sich nur durch das Vorzeichen von x unterscheiden; allgemein gilt:

$$(5) \qquad u(+x) = u(-x).$$

Insbesondere haben wir

$$(6) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \cdots \text{für } x = 0.$$

An den Rändern $y = 0$ und $y = h$ gelten die folgenden Bedingungen: im Falle der Einspannung

$$(7\text{a}) \qquad u = \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \cdots \text{für } y = 0 \text{ und } y = h,$$

bei drehbarer Befestigung der oberen und unteren Kante,

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \cdots \text{ für } y = 0 \text{ und } y = h. \tag{7b}$$

Es ist nämlich das Drehmoment der Biegungsspannungen für einen Schnitt $y =$ const. allgemein gegeben durch[1])

$$C\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right); \tag{8}$$

da dieses Moment im Falle b) verschwinden soll und da u an den Rändern für jedes x, mithin auch $\partial^2 u/\partial x^2$ verschwindet, so folgt in der Tat als zweite Bedingung $\partial^2 u/\partial y^2$ für $y = 0$ und $y = h$.

Schließlich gelten für die Stellen $x = \pm l/2$ (Übergang zwischen II und I und zwischen II und III) gewisse Stetigkeitsbedingungen. Es müssen nämlich nicht nur die Ausbiegungen u und die Tangentialebenen an die Ausbiegungsfläche stetig verlaufen, sondern es müssen auch die durch die Schnittflächen $x = \pm l/2$ übertragenen Momente und Spannungen sich stetig aneinander anschließen. Die Momente sind, wie in (8), als Kombination der zweiten Differentialquotienten gegeben, die Spannungen selbst werden durch die dritten Differentialquotienten[2]) von u dargestellt. Zusammenfassend haben wir also:

$$u,\ \frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \text{ stetig } \ldots \text{ für } x = \pm \frac{l}{2}\cdot \tag{9}$$

Das eigentliche Ziel unserer Untersuchung besteht indessen nicht in der Ermittelung der Ausbiegungsfläche $u = u(x, y)$, sondern in der Berechnung derjenigen Werte von P, unter deren Wirkung die fragliche Ausbiegung möglich wird, wozu die Kenntnis der Gestalt der Fläche u nur die notwendige Vorbereitung bildet.

Daß in der Tat jene Ausbiegung nur bei besonderen Werten von P möglich ist, lehrt die folgende Überlegung. Durch die vorangehenden Differentialgleichungen, Rand- und Stetigkeitsbedingungen wird die Funktion u *im allgemeinen* eindeutig bestimmt sein. Es gibt aber eine triviale Lösung, nämlich $u = 0$, welche allen Bedingungen des Problems genügt. Wir schließen daraus, daß das Blech im allgemeinen seine ebene Form beibehält. Ausnahmen treten nur für besondere „kritische Werte“ oder „Eigenwerte“ der in dem Problem vorkommenden Parameter ein. Dabei können wir den variabeln Parameter, auf dessen Werte es ankommt, in mannigfacher Weise aussuchen.

1) Love l. c. § 380, Gl. (20).

2) Love, l. c. § 380 Gl. (22). Es handelt sich insbesondere um die bei Love mit T_1 bezeichneten Spannungsresultanten.

Wir können z. B., indem wir die Abmessungen des Bleches oder sein Material als verfügbar ansehen, h oder s oder E zu diesem Parameter wählen. Am naturgemäßesten ist es aber, das Blech als gegeben und die Last P als variabelen Parameter anzusehen. Die „Eigenwerte“ dieses Parameters nennen wir die „Knicklasten“.

Es wird sich zeigen, daß diese Knicklasten in unendlicher Anzahl vorhanden sind. Jede dieser unendlich vielen Knicklasten wird — in dem bisher betrachteten Falle — je durch eine transzendente Gleichung gegeben. Namentlich werden wir uns für die niedrigste Knicklast interessieren, weil diese allein praktisches Interesse besitzt. Bei endlichem l werden die Bedingungen (9) nicht nur zur Bestimmung der in u verfügbaren Konstanten, sondern zugleich zur Aufstellung der transzendenten Gleichung für P dienen.

In dem Grenzfalle $l = 0$ (punktförmig zentrierte Last) kommen dagegen die Bedingungen (9) in Fortfall, und es gilt überall für $x > 0$ und für $x < 0$ die einfache Differentialgleichung I) $\Delta\Delta u = 0$. Die Differentialgleichung II) dient in diesem Falle lediglich zur Bestimmung von P, und zwar in folgender Weise: Man integriere die Gleichung II) gliedweise nach x von $-l/2$ bis $+l/2$, wobei man die Integration in den beiden ersten Termen von $\Delta\Delta u$ ausführe, unter Berücksichtigung des Umstandes, daß u eine gerade, also $\partial u/\partial x$ und $\partial^3 u/\partial x^3$ ungerade Funktionen von x sind. Man erhält:

$$(10)\qquad 2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_{x=l/2} + 4\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y^2}\right)_{x=l/2} + \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\,dx + \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{P}{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx = 0.$$

In der Grenze für $l = 0$ verschwindet das zweite und dritte Glied, das zweite wegen der in Gültigkeit bleibenden Bedingung (6), das dritte, weil $\partial^4 u/\partial y^4$ ebenso wie u in der Umgebung von $x = 0$ endlich ist, auch bei verschwindendem l. Da das Entsprechende von $\partial^2 u/\partial y^2$ gilt, so läßt sich das letzte Glied von (10) wie folgt schreiben:

$$(11)\qquad \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{P}{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\,dx = \frac{P}{C}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 \cdots \text{ für } l = 0.$$

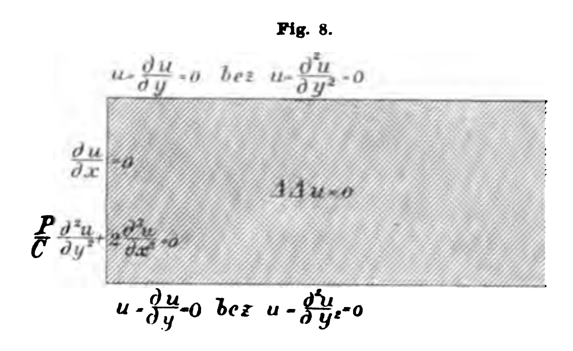
Läßt man auch im ersten Gliede von (10) $l = 0$ werden, so hat man schließlich die Bedingung:

$$(12)\qquad \frac{P}{C}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\,\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \cdots \text{ für } x = 0.$$

Bei dem in Rede stehenden Grenzfall $l = 0$ stellt sich das Problem daher folgendermaßen: In dem durch die Geraden $x = 0$, $y = 0$ und

$y = h$ begrenzten unendlichen Streifen (vgl. Fig. 8) ist die Differentialgleichung I. zu integrieren mit den Randbedingungen (7a) oder (7b) längs $y = 0$ und $y = h$ und mit den Randbedingungen (6) und (13) längs $x = 0$. Es wird sich zeigen, daß die Gesamtheit dieser Bedingungen nicht nur zur Bestimmung von u ausreicht (abgesehen von einer willkürlichen Konstanten) sondern auch zur Bestimmung der Knicklast P.

Fig. 8.



Wir sehen uns damit vor eine höchst eigenartige Randwertaufgabe gestellt, wie sie bisher in der mathematischen Physik noch nicht aufgetreten ist.

§ 2. Die Last ist in einen Punkt konzentriert, die Ränder sind drehbar befestigt.

In diesem einfachsten Falle wird die Lösung äußerst elementar. Die Bedingungen des Problems sind folgende (s. Gl. I., (7b), (6) und (12) des vorigen §):

1) Für $x > 0,\ 0 < y < h \cdots \Delta\Delta u = 0,$

2) für $y = 0$ und $y = h \cdots u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$

3) für $x = 0 \cdots \frac{\partial u}{\partial x} = 0,\quad \frac{P}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$

4) für $x = \infty \cdots u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$

Den Bedingungen 2) genügen wir u. a. durch den Ansatz

$$u = \sin\frac{\pi y}{h} f(x).$$

Aus der Differentialgleichung (1) ergibt sich für $f(x)$ die folgende Bestimmungsgleichung:

$$f^{IV}(x) - 2\frac{\pi^2}{h^2} f''(x) + \frac{\pi^4}{h^4} f(x) = 0. \tag{5}$$

Setzt man f in der Form an:

$$f = e^{\lambda x},$$

so sieht man, daß $\lambda = \pm \pi/h$ eine Doppelwurzel der zu (5) gehörigen charakteristischen Gleichung wird und daß die allgemeine Lösung von (5) geschrieben werden kann:

$$f(x) = (A + Bx)e^{-\frac{\pi x}{h}} + (C + Dx)e^{+\frac{\pi x}{h}}.$$

Wegen der Bedingung 4) muß

$$C = D = 0$$

und wegen der ersten der Bedingungen 3)

$$B = A\frac{\pi}{h}$$

werden. Wir erhalten somit

$$u = A \sin\frac{\pi y}{h}\left(1 + \frac{\pi x}{h}\right)e^{-\frac{\pi x}{h}}. \tag{6}$$

Es bleibt noch die zweite Bedingung 3) zu erfüllen. Diese lautet wenn wir (6) benutzen:

$$A \sin\frac{\pi y}{h}\left(-\frac{\pi^2}{h^2}\frac{P}{C} + \frac{4\pi^3}{h^3}\right) = 0. \tag{7}$$

Ganz so wie bei dem Eulerschen Fall der Knickung eines dünnen Stabes schließen wir auf zwei Möglichkeiten: *Entweder* und im allgemeinen muß $A = 0$ sein, d. h. unser Blech bleibt eben und wird durch die Belastung P in keiner Weise verbogen. *Oder* die Klammer in dem Ausdruck (17) verschwindet, d. h. wir haben

$$P = \frac{4\pi C}{h} = \frac{4\pi}{1-\mu^2}\frac{EJ_1}{h}; \tag{8}$$

in diesem besonderen Falle braucht A nicht zu verschwinden, wird vielmehr unbestimmt. Das Blech befindet sich in jedem der durch (6) dargestellten Verbiegungszustände unter dem Einfluß der Last (8) im Gleichgewicht. Natürlich ist auch jetzt der Fall $A = 0$ (Ebenbleiben des Bleches) nicht ausgeschlossen; er stellt einen Gleichgewichtszustand, aber einen *instabilen* dar; die geringste Erschütterung würde genügen, um das unter der kritischen Belastung (8) zufällig noch eben gebliebene Blech plötzlich in eine ausgebogene Form überzuführen.

Indem wir uns die Belastung P allmählich wachsend vorstellen, schildern wir die Vorgänge im Blech wie folgt: Das Blech ist ursprünglich völlig eben und bleibt es zunächst, wenn wir eine genau in der Mittelebene des Bleches wirkende Drucklast P aufbringen. Mit wachsendem P wird allerdings der Stabilitätsgrad des Bleches heruntergesetzt. Man erkennt dieses aber nicht an irgend einer Ausbiegung, sondern nur etwa an der Höhe des Tones, den das Blech, mit einem Hämmerchen

angeschlagen, abgibt und der mit zunehmendem P tiefer werden muß. Die Stabilität ist erschöpft, wenn P den Wert (8) erreicht, *die ebene Form ist instabil*, das Blech beult aus.

Es wäre natürlich widersinnig aus (7) zu schließen, daß das Blech nach Überschreitung der Knicklast (8) wieder gerade werden müßte. Vielmehr wird eine Steigerung der Belastung, nachdem das Blech bei dem Werte (8) bereits ausgebogen ist, zu einer Vermehrung der Ausbiegung führen; die Belastung P findet ja jetzt bereits sozusagen einen Hebelarm vor, an dem sie wirkt. Dabei wäre zu bemerken, daß die weitere Verbiegung nicht mehr durch die Gleichung (1) geregelt wird, die nur für die unendlich kleinen Verbiegungen einer ursprünglich ebenen Platte gilt, sondern durch eine entsprechende Gleichung für die Verbiegungen einer bereits gekrümmten Platte. Man kann auch bemerken, daß selbst bei festgehaltener Größe der Knicklast (8) die in (6) berechnete Gestalt des verbogenen Bleches nur für ein hinreichend kleines A, d. h. für hinreichend geringe Abweichungen von der ursprünglich ebenen Gestalt strenge zutreffend sein wird, weil ja bei ihrer Ableitung die Differentialgleichung (1) zugrunde gelegt wurde. Die Gültigkeit unserer Knickformel (8) wird aber durch diese Bemerkung keineswegs eingeschränkt.

Will man die Knickgrenze (8) überschreiten, so müßte man dafür Sorge tragen, daß die Verbiegung (6) nicht zustande kommen kann. Dies würde am besten dadurch geschehen, daß man in der Mitte des Bleches (z. B. bei $x = 0$, $y = h/2$) eine lose Führung anbrächte. Theoretisch würde bereits ein verschwindend kleiner Zwang genügen — durch eine verschwindend kleine, senkrecht gegen die Ebene des Bleches wirkende Kraft dargestellt, die der Ausbiegungs-Tendenz u entgegengerichtet ist. In der Tat wird die Arbeit verschwindend klein, die zur Stabilierung eines an sich instabilen Gleichgewichtes theoretisch erforderlich ist. Unter dem Einfluß einer derartigen Vorkehrung wird man die Kraft P über die Grenze (8) hinaus steigern können, ohne daß das Blech aus seiner Ebene heraustritt. Man wird dann aber finden, daß bei der doppelten Größe von P, nämlich

$$P = \frac{8\pi C}{h}$$

abermals Instabilität eintritt.

In der Tat leiten wir auf demselben Wege, der zu Gleichung (8) führte, *unendlich viele weitere Knicklasten höherer Ordnung* ab. Machen wir nämlich den allgemeinen Ansatz

$$u = \sin\frac{m\pi y}{h} f_m(x),$$

so haben wir $f_m(x)$ der Gleichung

$$f_m^{IV}(x) - 2\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 f''(x) + \left(\frac{m\pi}{h}\right)^4 f(x) = 0$$

zu unterwerfen; ihre im Unendlichen verschwindende Lösung, welche zugleich einen verschwindenden Wert von $\partial u/\partial x$ für $x = 0$ ergibt, lautet

$$A_m\left(1 + \frac{m\pi x}{h}\right)e^{-\frac{m\pi x}{h}};$$

wo A_m willkürlich. Statt (6) erhalten wir daher allgemeiner:

$$(9) \qquad u = A_m \sin\frac{m\pi y}{h}\left(1 + \frac{m\pi x}{h}\right)e^{-\frac{m\pi x}{h}}.$$

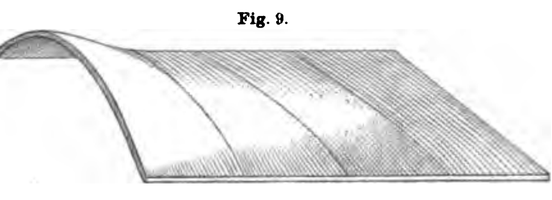
Die zweite der Bedingungen (3) liefert daher die folgende Serie von Knicklasten:

$$(10) \qquad P_m = \frac{4\pi m C}{h} \cdots m = 1, 2, 3, \cdots$$

Wenn wir wie oben vorgeschlagen, die Mitte des Bleches festhalten, kann die Knicklast erster Ordnung nicht zur Geltung kommen, wohl aber diejenige zweiter Ordnung, bei der die zugehörige Ausbiegung (Gleichung 9) ohnehin in der Mitte eine „Knotenlinie" aufweist. Die Knicklast dritter Ordnung würde man zur Beobachtung bringen, wenn man das Blech z. B. in $^1/_3$ seiner Höhe festhielte, wodurch die Ausbiegungen erster und zweiter Ordnung, nicht aber diejenige dritter Ordnung behindert würde, welch' letztere in $^1/_3$ und $^2/_3$ der Höhe ihre natürlichen Knotenlinien besitzt. So kann man fortfahren, um eine beliebige Knicklast P_m zu realisieren.

Es entspricht der Einfachheit unseres Problemes, insbesondere der Einfachheit der Grenzbedingungen 2), daß die Knicklasten hier eine harmonische Reihe bilden.

Fig. 9.



In Fig. 9 haben wir diejenige Form des verbogenen Bleches dargestellt, welche der niedrigsten Knicklast $P = 4\pi C/h$ entspricht, indem wir die aufeinanderfolgenden Schnitte parallel der y-Achse (Sinuslinien) verzeichneten, und zwar für $x > 0$. Die zu $x = 0$ gehörige Amplitude der Sinuslinie stellt den willkürlich bleibenden Koeffizienten A dar. Für $x < 0$ hat man sich die Figur symmetrisch wiederholt zu denken. Vergleicht man diese Fig. mit der photographischen Aufnahme,

Fig. 14, eines ähnlichen Belastungsfalles, so erkennt man deutlich den gleichen allgemeinen Verlauf der Ausbiegungsfläche.

Noch möge eine Bemerkung Platz finden, die ebensowohl auf die Knickung des geraden Stabes wie auf diejenige unserers ebenen Bleches Bezug hat. In der Theorie setzt man eine Last voraus, die *genau zentrisch* ist (nach der Stabachse bez. nach der Mittelebene des Bleches); man findet dann, daß die gerade bez. ebene Gestalt erhalten bleibt bis an die Knickgrenze heran, wo sich eine *plötzliche* und *der Größe nach unbestimmte* Ausbiegung einstellt. In Wirklichkeit ist die Bedingung genauer Zentrierung natürlich nie erfüllt; die Last findet von Anfang an einen gewissen kleinen Hebelarm vor und bewirkt daher auch schon unterhalb der Knickgrenze eine gewisse Ausbiegung. Diese Ausbiegung ist aber bei geringer Exzentrizität des Lastangriffes zunächst sehr klein, vielleicht nicht wahrnehmbar und wächst erst dann merklich an, wenn sich die Größe der Belastung ihrem kritischen Wert, der Knicklast, nähert. Für die Knickgrenze selbst wird die Ausbiegung von diesem Standpunkte aus unendlich groß, was natürlich cum grano salis zu verstehen ist, da sich die Aussagen der Theorie nur auf unendlich kleine Ausbiegungen beziehen.

Fig. 10 ist der Theorie des auf Knickung beanspruchten geraden Stabes entnommen, kann aber ebenso gut zur Erläuterung der Verhältnisse bei der Ausknickung eines ebenen Bleches dienen. Nach der Abszissenachse sind die Belastungen, nach der Ordinatenachse die Ausbiegungen aufgetragen. e bedeutet die ursprüngliche Exzentrizität des Kraftangriffes; bei der Kurve 1 ist dieselbe halb so groß wie bei 0, bei 2 halb so groß wie bei 1, bei 3 halb so groß wie bei 2 und bei 4 gleich Null vorausgesetzt. In demselben Verhältnis wie die ursprünglichen Exzentrizitäten stehen bei den Kurven 0, 1, 2, 3, ... auch die durch jedes P hervorgerufenen Ausbiegungen. Man sieht nun aus der Figur deutlich, wie die plötzliche und unbestimmte Ausknickung bei genau zentrischem Druck, in der Figur durch den rechteckigen Linienzug 4 dargestellt, stetig aus den allmählichen Ausbiegungs-Diagrammen 0, 1, 2, 3, hervorgeht, wenn man die Exzentrizität e stetig abnehmen läßt.

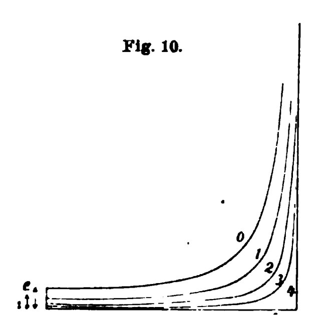


Fig. 10.

Denselben Einfluß wie der hier vorausgesetzte Hebelarm e würde eine ursprüngliche Krummheit des Stabes (oder Bleches) oder eine gewisse schiefe Richtung der Kraft, überhaupt jeder Umstand haben, der von Anfang an die Wirkung eines Biegungsmomentes mit sich bringt,

während dieses Biegungsmoment bei unserer bisherigen Behandlung erst durch die Ausknickung selbst erzeugt werden mußte.

Man kann sich schließlich leicht überzeugen, daß die gefundene Reihe der P vollständig ist.

Wir gehen davon aus, daß es nur *eine* mit ihren Ableitungen stetige Lösung von $\Delta\Delta u = 0$ gibt, die auf der Begrenzung eines Gebietes vorgeschriebene Werte teils von u und $\partial u/\partial n$ teils von u und Δu annimmt, wofür wir den Beweis sogleich nachtragen werden. Das fragliche Gebiet sei der Parallelstreifen Fig. 8 mit den Rändern $y = 0$, $y = h$, $x = 0$, $x = \infty$. Als Randwerte schreiben wir vor:

$$\text{für } y = 0 \text{ und } y = h \ldots u = 0,\ \Delta u = 0,$$

$$\text{,,}\quad x = 0 \ldots u = F(y),\ \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\text{,,}\quad x = \infty \ldots u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Die Bedingung $\Delta u = 0$ längs $y = 0$ und $y = h$ ist (wegen $u = 0$) ersichtlich identisch mit unserer bisherigen Bedingung $\partial^2 u/\partial y^2 = 0$. Die Funktion $F(y)$ denken wir uns nach Fourier zwischen $y = 0$ und $y = h$ entwickelt:

$$F(y) = A_1 \sin\frac{\pi y}{h} + A_2 \sin\frac{2\pi y}{h} + \cdots$$

Dann lautet die Lösung unseres Problems:

$$u = \sum_{m=0}^{m=\infty} u_m,\quad u_m = A_m \sin\frac{m\pi y}{h}\left(1 + \frac{m\pi x}{h}\right) e^{-\frac{m\pi x}{h}}. \tag{11}$$

Diese Lösung ist, wie wir vorausschickten, eindeutig bestimmt. Wir schließen daraus: Wenn wir die Bedingung $u = F(y)$ für $x = 0$ aufheben, so wird die allgemeinste Lösung, welche den übrigen Bedingungen genügt, immer noch durch die Reihe (11) gegeben, wobei aber jetzt die A_m als willkürliche Konstante zu betrachten sind. In dieser Form muß also auch die Lösung desjenigen Problemes enthalten sein, welches wir am Anfange dieses § stellten, desjenigen Problemes also, bei welchem für $x = 0$ statt der Randbedingung $u = F(y)$ die folgende vorgeschrieben war:

$$\frac{P}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0. \tag{12}$$

Auf die Reihe (11) gliedweise angewandt liefert dieselbe:

$$\sum A_m \sin\frac{m\pi y}{h}\left(-\frac{P}{C}\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 + 4\left(\frac{m\pi}{h}\right)^3\right) = 0,$$

oder, da jeder Koeffizient der Fourierschen Reihe verschwinden muß:

$$A_m\left(\frac{P}{C}-\frac{4m\pi}{h}\right)=0 \ldots m=1, 2, 3, \ldots$$

Wenn also überhaupt eine Ausbiegung u eintreten soll, so muß P einen der Werte (10) haben, und es müssen gleichzeitig alle Koeffizienten A_m bis auf einen verschwinden.

Beim Beweise des soeben benutzten Hilfssatzes gehe man aus von der Greenschen Gleichung

$$(13) \qquad \int (U\Delta V - V\Delta U)d\sigma = \int\left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right)ds,$$

wo sich das Integral links über das Innere, das Integral rechts über den Rand des Gebietes erstreckt.

Unter der Annahme, daß es zwei Lösungen u_1, u_2 der Differentialgleichung $\Delta\Delta u = 0$ bei den vorgeschriebenen Randbedingungen gebe, setzen wir

$$U = u_1 - u_2, \quad V = \Delta U.$$

Dann wird die rechte Seite von (13) gleich Null, weil am Rande teils $U=0$ und $\partial U/\partial n = 0$ teils $U=0$ und $V=\Delta U=0$ vorgeschrieben ist. Da ferner nach Voraussetzung $\Delta\Delta U = 0$ ist, so folgt aus (13):

$$\int (\Delta U)^2 d\sigma = 0.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn überall in unserem Gebiete $\Delta U = 0$ ist. Aus dem Zusammenbestehen dieser Gleichung und der Randbedingung $U = 0$ ergiebt sich aber weiter, daß U überall gleich Null oder daß u_1 gleich u_2 sein muß. Der fragliche Eindeutigkeitsbeweis ist somit erbracht.

Bemerken wir noch, daß die unendliche Ausdehnung des Gebietes, die im allgemeinen Schwierigkeiten machen kann, im Falle unseres Streifens die Stichhaltigkeit des Beweises nicht beeinträchtigt.

§ 3.

Die Last ist in einen Punkt konzentriert, die Ränder sind eingespannt.

Nach den Ausführungen des § 1 (Gleichung (I), (7a), (6) und (12) haben wir jetzt das folgende, wesentlich erschwerte Problem:

1) Für $x > 0$, $0 < y < h \ldots \Delta\Delta u = 0$,

2) „ $y = 0$, und $y = h \ldots u = \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$,

3) „ $x = 0 \cdots \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\dfrac{P}{C}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$,

4) „ $x = \infty \ldots u = \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$.

Wir gehen von einer Reihe von Funktionen

$$(5)\qquad v_m = \cos\frac{m\pi y}{h}\left(1+\frac{m\pi x}{h}\right)e^{-\frac{m\pi x}{h}} \ldots m>0,\ v_0=0$$

aus, welche der Lösung (6) und (9) des vorigen § nachgebildet sind. m bedeutet eine der Zahlen 1, 2, 3, ... Für $m=0$ würde sich zunächst $v_0=1$ ergeben, was jedoch der Bedingung (4) widersprechen würde. Daher ist die besondere Festsetzung $v_0=0$ getroffen. Sämtliche v genügen unseren Bedingungen 1) und 4) vollständig, den Bedingungen 2) und 3) aber nur teilweise. Wir ergänzen[1]) diese Reihe zunächst durch eine zweite Reihe von Funktionen:

$$(6)\qquad V_m = \cos\lambda x f(y).$$

Wegen der Bedingung 1) muß $f(y)$ der folgenden Differentialgleichung unterworfen werden:

$$(7)\qquad f^{\mathrm{IV}}(y) - 2\lambda^2 f''(y) + \lambda^4 f(y) = 0,$$

deren allgemeine Lösung wir schreiben können:

$$f(y) = (A+By)\,\mathfrak{Sin}\,\lambda y + (C+Dy)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y,$$

unter $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ den hyperbolischen Sinus und Cosinus verstanden. Wir passen diese Funktion demjenigen Teil der Bedingungen 2) an, denen auch v_m bereits genügt, nämlich

$$(8)\qquad f'(0) = f'(h) = 0,$$

sowie der weiteren Forderung, deren Zweckmäßigkeit sich alsbald ergeben wird:

$$(9)\qquad f(0) = (-1)^m f(h).$$

Durch diese drei Forderungen (8) und (9) lassen sich z. B. die drei Konstanten B, C und D bestimmen bez. durch die vierte A ausdrücken. Nachdem dieses geschehen, nimmt $f(y)$ die Form an:

$$(10)\quad f(y)=A\{\mathfrak{Sin}\,\lambda(y-h)-\lambda y\,\mathfrak{Cof}\,\lambda(y-h)-(-1)^m(\mathfrak{Sin}\,\lambda y-\lambda(y-h)\,\mathfrak{Cof}\,\lambda y)\}.$$

Diese Bedeutung von $f(y)$ denken wir uns in (6) eingetragen. Indem wir weiterhin A als Funktion des Parameters λ und eines

1) Ich wurde auf diesen Kunstgriff geführt durch die Lektüre einer Arbeit von Mathieu; J. Ecole Polytechnique, t. 29 1880, wo die Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ für das Innere eines Rechtecks integriert wird. Im übrigen sind unsere Rechnungen von den recht unübersichtlichen Mathieuschen Reihen wesentlich verschieden.

zweiten Parameters α auffassen, gehen wir zu einer Serie neuer Hilfsgrößen über:

$$(11)\qquad U_m = \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha A(\lambda, \alpha) \cos\lambda x \{\mathfrak{Sin}\,\lambda(y-h) - \cdots\}.$$

Nunmehr betrachten wir die Summe $u_m = v_m + U_m$.

Dieselbe genügt bei beliebiger Wahl der noch verfügbaren Funktion $A(\lambda, \alpha)$ der Differentialgleichung $\Delta\Delta u_m = 0$, ferner den Bedingungen:

$$\frac{\partial u_m}{\partial y} = 0 \text{ für } y = 0 \text{ und } y = h,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0 \quad ,, \quad x = 0.$$

Es gelingt aber durch geeignete Wahl von $A(\lambda, \alpha)$ leicht, sie auch den weiteren Bedingungen

$$u_m = 0 \text{ für } y = 0 \text{ und } y = h$$

zu unterwerfen. Bemerken wir zunächst, daß, wenn diese Bedingung für $y = 0$ erfüllt ist, sie von selbst auch für $y = h$ befriedigt ist. Denn wir haben vermöge (5) und (9)

$$(12)\qquad v_m(0) = (-1)^m v_m(h), \quad U_m(0) = (-1)^m U_m(h).$$

Es ist also nur noch zu bewirken, daß für $y = 0$ gelte:

$$u_m = 0, \quad \text{d. h.} \quad v_m = -U_m$$

oder, ausführlicher geschrieben:

$$(13)\quad \left(1 + \frac{m\pi x}{h}\right) e^{-\frac{m\pi x}{h}} = \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha A(\lambda, \alpha) \cos\lambda x (\mathfrak{Sin}\,\lambda h + (-1)^m \lambda h).$$

Nach dem Fourierschen Theorem gilt aber für eine beliebige Funktion $f(x)$ bei positivem x:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha \cos\lambda x \cos\lambda\alpha f(\alpha).$$

Wählen wir also

$$A(\lambda, \alpha) = \frac{2}{\pi} \frac{\cos\lambda\alpha}{\mathfrak{Sin}\,\lambda h + (-1)^m \lambda h} \left(1 + \frac{m\pi\alpha}{h}\right) e^{-\frac{m\pi\alpha}{h}},$$

so ist Gleichung (13) befriedigt. Zugleich nimmt U_m die folgende Form an (s. Gleichung (11)):

$$(14)\quad U_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \cos\lambda x \frac{\{\mathfrak{Sin}\,\lambda(y-h) - \cdots\}}{\mathfrak{Sin}\,\lambda h + (-1)^m \lambda h} \int_0^\infty d\alpha \cos\lambda\alpha \left(1 + \frac{m\pi\alpha}{h}\right) e^{-\frac{m\pi\alpha}{h}}.$$

Nunmehr genügt die Summe $u_m = v_m + U_m$ nicht nur unserer Differentialgleichung 1) und der ersten Bedingung 3) sondern auch beiden Bedingungen 2). Für $m = 0$ haben wir entsprechend $v_0 = 0$ (vgl. Gleichung (5)) auch $A(\lambda, \alpha) = 0$ und $U_0 = 0$ zu setzen.

Indem wir die zweite Bedingung 3) zurückstellen, zeigen wir zunächst, daß U_m auch der Bedingung 4) genügt. Zu dem Zwecke können wir in (14) das Integral nach α ausrechnen. Es ergibt sich leicht:

$$\int_0^\infty d\alpha \cos\lambda\alpha \left(1 + \frac{m\pi\alpha}{h}\right) e^{-\frac{m\pi\alpha}{h}} = \frac{2h/m\pi}{(1+(\lambda h/m\pi)^2)^2},$$

also

$$(15)\quad U_m = \frac{4h}{m\pi^2}\int_0^\infty d\lambda \cos\lambda x \frac{\mathfrak{Sin}\,\lambda(y-h) - \lambda y\,\mathfrak{Cos}\,\lambda(y-h) - (-1)^m(\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda(y-h)\,\mathfrak{Cos}\,\lambda y)}{(1+(\lambda h/m\pi)^2)^2(\mathfrak{Sin}\,\lambda h + (-1)^m\lambda h)}.$$

Wenn x sehr groß ist, wird $\cos\lambda x$ eine schnell oszillierende Funktion, während der mit $\cos\lambda x$ multiplizierte Faktor eine stetige Funktion von λ ist, die für $\lambda = \infty$ stark verschwindet. Unser Ausdruck (15) verschwindet also für große Werte von x aus demselben Grunde, wie die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe von hohem Stellenzeiger. Derselbe Schluß läßt sich auf einen beliebigen Differentialquotienten von U_m nach x anwenden. Da auch v_m samt seinen sämtlichen Ableitungen für $x = \infty$ verschwindet (s. Gleichung (5)), so genügt u_m in der Tat unserer Bedingung 4).

Im Anschluß an Gleichung (15) überzeugt man sich nachträglich leicht, daß unser Integral einen endlichen Sinn hat, daß nämlich der Integrand für $\lambda = 0$ endlich bleibt und für $\lambda = \infty$ mit Rücksicht auf die Bedingung $0 < y < h$ wie eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten verschwindet.

Nunmehr setzen wir unsere Funktionen u_m zu der folgenden Reihe zusammen

$$(16)\qquad u = A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + \cdots$$

und behaupten, daß wir durch diese auch der zweiten Bedingung 3) genügen können, wenn wir nur die Koeffizienten A und die Knicklast P passend wählen. Nachdem dieses geschehen ist, stellt (16) die Lösung unseres Problemes dar.

Unsere weitere Aufgabe wird dadurch erschwert, daß — im Gegensatz zu dem vorigen § — die Bestimmung der Knicklasten P und der Koeffizienten A untrennbar mit einander verbunden ist, so daß wir auf Gleichungen für unendlich viele Unbekannte geführt werden.

Wir ersetzen in unserer zweiten Gleichung (3), d. h. in der Bedingung:

$$\frac{P}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \tag{17}$$

u durch die Reihe (16), tragen die Werte von v_m für $x = 0$ ein und berücksichtigen, daß nach (15)

$$\frac{\partial^3 U_m}{\partial x^3} = 0 \quad \text{für } x = 0$$

wird. So ergibt sich aus (17):

$$\sum_{m=1}^{m=\infty} A_m \left\{ \left(-\frac{P}{C} + \frac{4m\pi}{h}\right)\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2 \cos\frac{m\pi y}{h} + \frac{P}{C}\frac{\partial^2 U_m}{\partial y^2} \right\}. \tag{18}$$

Nunmehr wird es erforderlich, die Größe U_m für $x = 0$ in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln von der Form:

$$U_m = a_{m0} + a_{m1}\cos\frac{\pi y}{h} + a_{m2}\cos\frac{2\pi y}{h} + \cdots. \tag{19}$$

Als Vorbereitung berechnen wir die Entwickelungen der in U_m vorkommenden Funktion von y:

$$\mathfrak{Sin}\,\lambda(y-h) - \lambda y\,\mathfrak{Cos}\,\lambda(y-h) = b_0 + b_1\cos\frac{\pi y}{h} + b_2\cos\frac{2\pi y}{h} + \cdots. \tag{20}$$

Man findet leicht

$$b_n = \frac{-4h^3}{n^4\pi^4}\,\frac{\lambda^3(\mathfrak{Cos}\,\lambda h - (-1)^n)}{(1 + (\lambda h/n\pi)^2)^2}. \tag{21}$$

Vertauschen wir in (20) y mit $h - y$, so entsteht:

$$\mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda(y-h)\,\mathfrak{Cos}\,\lambda y = -b_0 + b_1\cos\frac{\pi y}{h} - b_2\cos\frac{2\pi y}{h} + \cdots. \tag{20'}$$

Demnach wird der Zähler in (15), wenn m ungerade ist:

$$2\left(b_1\cos\frac{\pi y}{h} + b_3\cos\frac{3\pi y}{h} + \cdots\right),$$

wenn aber m gerade:

$$2\left(b_0 + b_2\cos\frac{2\pi y}{h} + b_4\cos\frac{4\pi y}{h} + \cdots\right).$$

Die Koeffizienten a_{mn} in (19) lassen sich jetzt direkt angeben. Aus dem Vorstehenden folgt, daß bei ungeradem m nur die a_{mn} mit ungeradem n und daß bei geradem m nur diejenigen mit geradem n von Null verschieden sind. Und zwar wird

m und n ungerade

$$a_{mn} = -\frac{32}{\pi^6}\frac{1}{mn^4}\int_0^\infty \frac{\mathfrak{Cos}\,\mu + 1}{\mathfrak{Sin}\,\mu - \mu}\,\frac{\mu^3 d\mu}{(1 + (\mu/m\pi)^2)^2(1 + (\mu/n\pi)^2)^2} \tag{22}$$

m und n gerade

(22′) $$a_{mn} = -\frac{32}{\pi^6}\frac{1}{mn^4}\int\limits_0^\infty \frac{\mathfrak{Cos}\,\mu - 1}{\mathfrak{Sin}\,\mu + \mu}\,\frac{\mu^3 d\mu}{(1+(\mu/m\pi)^2)^2(1+(\mu/n\pi)^2)^2}.$$

Alle diese a_{mn} sind, wie man sieht, reine Zahlen von negativem Vorzeichen. Zwischen a_{mn} und a_{nm} besteht die Beziehung:

(22″) $$a_{mn}n^3 = a_{nm}m^3.$$

Wir können jetzt Gl. (18) als gewöhnliche trigonometrische Reihe schreiben. Wir sammeln zunächst diejenigen Glieder, welche mit

$$\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 \cos\frac{\pi y}{h}$$

multipliziert sind. Diese lauten:

(23) $$A_1\left(-\frac{P}{C} + \frac{4\pi}{h}\right) - \frac{P}{C}(A_1 a_{11} + A_3 a_{31} + A_5 a_{51} + \cdots).$$

Sodann sondern wir diejenigen Glieder aus, welche mit

$$\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \cos\frac{2\pi y}{h}$$

multipliziert sind. Sie werden:

(23′) $$A_2\left(-\frac{P}{C} + \frac{8\pi}{h}\right) - \frac{P}{C}(A_2 a_{22} + A_4 a_{42} + A_6 a_{62} + \cdots).$$

Die Glieder, welche

$$\left(\frac{3\pi}{h}\right)^2 \cos\frac{3\pi y}{h}$$

zum Faktor haben, heißen:

(23″) $$A_3\left(-\frac{P}{C} + \frac{12\pi}{h}\right) - \frac{P}{C}(A_1 a_{13} + A_3 a_{33} + A_5 a_{53} + \cdots)$$

und so fort. Ein von y unabhängiges konstantes Glied tritt in (18) nicht auf, da einerseits $v_0 = 0$ und andrerseits die konstanten Glieder a_{m0} der U_m bei der Differentiation nach y fortfallen. Alle diese Ausdrücke (23) müssen aber verschwinden, da die Reihe (18) für alle Werte von y zwischen 0 und h identisch Null sein soll. Wir erhalten also unendlich viele Gleichungen für die Unbekannte P/C und die Verhältnisse $A_1 : A_3 : A_5 : \cdots$, $A_2 : A_4 : A_6 : \cdots$. Die Lösungen zerfallen in zwei Gruppen, eine Gruppe mit ungeraden, eine mit geraden Indices.

Die Lösungen mit ungeraden Indices ergeben sich folgendermaßen: Wir setzen:

$$A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = 0,$$

schreiben zur Abkürzung

$$Q = \frac{4\pi C}{hP} \tag{24}$$

und bestimmen Q aus der unendlichen Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 + a_{11} - Q, & a_{31}, & a_{51}, & a_{71}, & \dots \\ a_{13}, & 1 + a_{33} - 3Q, & a_{53}, & a_{73}, & \dots \\ a_{15}, & a_{35}, & 1 + a_{55} - 5Q, & a_{75}, & \dots \\ a_{17}, & a_{37}, & a_{57}, & 1 + a_{77} - 7Q, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0. \tag{25}$$

Für Q werden sich so unendlich viele Werte ergeben; indem wir einen derselben, z. B. den größten auswählen (der der kleinsten Knicklast P entspricht), tragen wir diesen in das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} A_1(1 + a_{11} - Q) + A_3 a_{31} + A_5 a_{51} + \cdots = 0 \\ A_1 a_{13} + A_3(1 + a_{33} - 3Q) + A_5 a_{53} + \cdots = 0 \\ A_1 a_{15} + A_3 a_{35} + A_5(1 + a_{55} - 5Q) + \cdots = 0 \\ \dots \end{cases} \tag{26}$$

ein, bestimmen daraus die Verhältnisse $A_1 : A_3 : A_5 : \dots$ und erhalten schließlich die Ausbiegung der Platte bei der fraglichen Knicklast, welche bis auf die willkürliche Konstante A_1 bestimmt ist, in der Form:

$$u = A_1\left(u_1 + \frac{A_3}{A_1} u_3 + \frac{A_5}{A_1} u_5 + \cdots\right). \tag{27}$$

Die Lösungen mit geraden Indices ergeben sich ähnlich, indem wir

$$A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = 0$$

setzen und die in (24) erklärte Abkürzung Q aus der unendlichen Determinante berechnen:

$$\begin{vmatrix} 1 + a_{22} - 2Q, & a_{42}, & a_{62}, & a_{82} & \dots \\ a_{24}, & 1 + a_{44} - 4Q, & a_{64}, & a_{84} & \dots \\ a_{26}, & a_{46}, & 1 + a_{66} - 6Q, & a_{86} & \dots \\ a_{28}, & a_{48}, & a_{68}, & 1 + a_{88} - 8Q & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0, \tag{25'}$$

was wieder auf unendlich viele Arten möglich sein wird. Eine dieser Lösungen tragen wir in das Gleichungssystem

$$\begin{cases} A_2(1 + a_{22} - 2Q) + A_4 a_{42} + A_6 a_{62} + \cdots = 0 \\ A_2 a_{24} + A_4(1 + a_{44} - 4Q) + A_6 a_{64} + \cdots = 0 \\ A_2 a_{26} + A_4 a_{46} + A_6(1 + a_{66} - 6Q) + \cdots = 0 \\ \dots \end{cases} \tag{26'}$$

ein, bestimmen daraus die Verhältnisse $A_2 : A_4 : A_6 \ldots$ und gewinnen eine mögliche Form der Ausknickung in dem Ausdrucke:

$$u = A_2 \left(u_2 + \frac{A_4}{A_2} u_4 + \frac{A_6}{A_2} u_6 + \cdots\right) \tag{27'}$$

Wir überzeugen uns leicht, daß die Gleichungen (25) und (25′) *unendlich viele reelle Wurzeln* haben, indem wir ihre Auflösung mit einem *Hauptachsenproblem* in Zusammenhang bringen. Zu dem Ende grenzen wir aus (25) oder (25′), von links oben beginnend, eine Determinante von N Horizontal- und N Vertikalreihen ab, setzen dieselbe gleich Null und zeigen, daß diese Gleichung N reelle Wurzeln besitzt. Betrachten wir nämlich im Falle der Gleichung (25) die quadratische Form

$$\varphi = \sum b_{ik}\, x_i x_k \ldots \qquad i, k = 1, 2, 3, \cdots N$$

$$b_{ik} = \frac{2i-1}{(2k-1)^2}\, a_{2i-1,\, 2k-1} \ldots i \neq k, \qquad b_{ii} = \frac{1}{2i-1}\, (a_{2i-1,\, 2i-1} + 1),$$

bez. die quadratische Mannigfaltigkeit im Raume von N Dimensionen $\varphi = \text{const.}$, so sind die Hauptachsen der letzteren in bekannter Weise bestimmt durch die folgende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} b_{11} - Q, & b_{21}, & b_{31}, & \ldots & b_{N1} \\ b_{12}, & b_{22} - Q, & b_{32}, & \ldots & b_{N2} \\ b_{13}, & b_{23}, & b_{33} - Q, & \ldots & b_{N3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{1N} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{NN} - Q \end{vmatrix} = 0$$

d. h. vermöge der angegebenen Werte der b durch die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + 1 - Q, & 3\, a_{31}, & 5\, a_{51}, & \ldots & (2N+1)\, a_{2N+1,1} \\ \frac{1}{3^2}\, a_{13}, & \frac{1}{3}(a_{33} + 1) - Q, & \frac{5}{3^2}\, a_{53}, & \ldots & \frac{2N+1}{3^2}\, a_{2N+1,3} \\ \frac{1}{5^2}\, a_{15}, & \frac{3}{5^2}\, a_{35}, & \frac{1}{5}(a_{55} + 1) - Q, & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{(2N+1)^2}\, a_{1,2N+1}, & \cdots & & & \frac{1}{2N+1}\left(a_{2N+1,2N+1} + 1\right) - Q \end{vmatrix} = 0$$

Diese Gleichung reduziert sich aber direkt auf die aus (25) ausgeschnitte N-reihige Determinante, wenn wir die 1te, 2te, 3te ... Horizontalreihe mit 1^2, 3^2, 5^2 ... multiplizieren, die 1ten, 2te, 3te ... Vertikalreihe mit 1, 3, 5, ... dividieren. Die fragliche Determinante hat somit N reelle Wurzeln; dem entsprechend hat unsere Gleichung (25), da die Überlegung für jedes beliebige N gilt, unendliche viele reelle Wurzeln. In ganz entsprechender Weise verfährt man bei der Gleichung (25′).

Die Bestimmung der Wurzeln Q und der Koeffizienten-Verhältnisse A wird im nächsten § zahlenmäßig ausgeführt werden. Hierbei wird die Güte der Konvergenz unserer unendlichen Prozesse von selbst hervortreten. Hier mögen nur noch zwei Bemerkungen Platz finden.

Die eine bezieht sich auf die Berechnung der *Meridiankurve* unserer Ausbiegungsfläche d. h. der Kurve $u(y)$ für $x = 0$. Während dieselbe im vorigen § durch eine einfache Sinus-Kurve dargestellt wurde, wird sie jetzt wesentlich verwickelter. Wir unterscheiden dabei zwischen den Lösungen von geraden und denen von ungeraden Indices.

Die Lösung mit geraden Indices lautet nach Gl. (27') für $x = 0$, wenn wir v_m aus (5), U_m aus (19) entnehmen:

$$\begin{aligned} u = \sum A_m(v_m + U_m) = & A_2\left(\cos\frac{2\pi y}{h} + a_{20} + a_{22}\cos\frac{2\pi y}{h} + a_{24}\cos\frac{4\pi y}{h} + \cdots\right) \\ & + A_4\left(\cos\frac{4\pi y}{h} + a_{40} + a_{42}\cos\frac{2\pi y}{h} + a_{44}\cos\frac{4\pi y}{h} + \cdots\right) \\ & + A_6\left(\cos\frac{6\pi y}{h} + a_{60} + a_{62}\cos\frac{2\pi y}{h} + a_{64}\cos\frac{4\pi y}{h} + \cdots\right) \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

oder wenn wir nach den Cosinus-Funktionen ordnen:

$$\begin{aligned} u = & \{A_2 a_{20} + A_4 a_{40} + A_6 a_{60} + \cdots\} \\ & + \{A_2(1 + a_{22}) + A_4 a_{42} + A_6 a_{62} + \cdots\}\cos\frac{2\pi y}{h} \\ & + \{A_2 a_{24} + A_4(1 + a_{44}) + A_6 a_{64} + \cdots\}\cos\frac{4\pi y}{h} \\ & + \{A_2 a_{26} + A_4 a_{46} + A_6(1 + a_{66}) + \cdots\}\cos\frac{6\pi y}{h} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Nach den Gl. (26') sind aber die Koeffizienten von $\cos 2\pi(y/h)$, $\cos 4\pi(y/h)$, $\cos 6\pi(y/h), \ldots$ einfach gleich $2QA_2$, $4QA_4$, $6QA_6, \ldots$ Setzen wir ferner zur Abkürzung

$$A_0 = A_2 a_{20} + A_4 a_{40} + A_6 a_{60} + \cdots, \tag{28}$$

so ergibt sich für unsere Meridiankurve:

$$u = A_0 + Q\left(2A_2\cos\frac{2\pi y}{h} + 4A_4\cos\frac{4\pi y}{h} + 6A_6\cos\frac{6\pi y}{h} + \cdots\right). \tag{29}$$

Aus der Lösung mit ungeraden Indices, bei welcher nach Obigem das konstante Glied in Fortfall kommt, ergibt sich in entsprechender Weise als Gleichung der Meridiankurve für diese Art der Ausbiegung:

$$u = Q\left(A_1\cos\frac{\pi y}{h} + 3A_3\cos\frac{3\pi y}{h} + 5A_5\cos\frac{5\pi y}{h} + \cdots\right). \tag{29'}$$

Eine zweite Bemerkung soll auf eine gewisse Willkür in unserem ursprünglichen Ansatz aufmerksam machen. Wir haben die Funktion v_m in (5) mit der Cosinus-Funktion gebildet. Es wäre ebensogut möglich gewesen, letztere durch die Sinusfunktion zu ersetzen; natürlich würde dann aber die Bestimmung der Funktion $f(y)$ in (6) abzuändern sein, da dieselbe alsdann statt (8) und (9) den Gl. $f(0) = f(h) = 0$, $f'(0) = (-1)^m f'(h)$ zu unterwerfen wäre. Gleichzeitig würde damit auch unsere Funktion U_m und, unter Beibehaltung der Gl. (19), die Bedeutung der Koeffizienten a_{mn} etwas anders ausfallen. Dagegen bleibt, unter Berücksichtigung dieser abgeänderten Bedeutung, die Gestalt der unendlichen Determinanten (25), (25') und der Koeffizientengleichungen (26), (26') erhalten. Die aus jenen Determinanten berechneten Wurzeln Q müssen natürlich bei beiden Ansätzen in irgend einer Reihenfolge übereinstimmen. Es läßt sich voraussehen, daß die Determinante mit ungeraden Indices beim Sinusansatz dieselben Wurzeln liefern wird wie diejenige mit geraden Indices beim Cosinus-Ansatz und umgekehrt. Denn eine Reihe, die nach den Cosinus der geraden Vielfachen von $\pi y/h$ fortschreitet, (vgl. z. B. Gl. (29)), wird, in eine Sinus-Reihe transformiert, nur die Sinus der ungeraden Vielfachen desselben Argumentes aufweisen, und umgekehrt. Die Zahlenrechnungen des folgenden § haben diese Vorhersage im einzelnen bestätigt.

§ 4. Fortsetzung. Zahlenrechnungen.[1]

Der erste Schritt zur zahlenmäßigen Bestimmung der Knicklasten besteht in der Berechnung der Koeffizienten a_{mn}. Das Integral nach μ, Gl. (22) und (22') wurde in zwei Teile zerlegt, einen ersten Teil von $\mu = 0$ bis $\mu = 5$, welcher durch mechanische Quadratur gewonnen wurde, und ein Restglied von $\mu = 5$ bis $\mu = \infty$. In letzterem wurde der Faktor

$$\frac{\operatorname{Cos}\mu \pm 1}{\operatorname{Sin}\mu \mp \mu}$$

durch seinen Grenzwert 1 für $\mu = \infty$ ersetzt, von welchem der Wert für $\mu = 5$ nur um $+ 8{,}7\,\%$ bezw. um $- 7{,}6\,\%$ abweicht. Die Ungenauigkeit, die dadurch in dem Restgliede selbst hervorgerufen wird, ist wesentlich kleiner und beträgt vielleicht $\pm 2\,\%$; sie ist für das Folgende belanglos, da auch die übrigen Rechnungen im Resultat kaum eine größere Genauigkeit als $2\,\%$ beanspruchen können. Mit

---

1) Die folgenden Rechnungen sind von Herrn stud. ing. Heyden und Herrn Dipl. Ing. Debye ausgeführt worden, denen ich dafür herzlichst danke.

dieser Vernachlässigung läßt sich das Restglied allgemein ausführen und liefert:

$$m \neq n,\ n > 0 \cdots \int_5^\infty \frac{\mu^3 d\mu}{\left(1+\left(\frac{\mu}{m\pi}\right)^2\right)^2\left(1+\left(\frac{\mu}{n\pi}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m^4 n^4 \pi^4}{(m^2-n^2)^2}\left\{\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}\log\frac{m^2+25/\pi^2}{n^2+25/\pi^2} - \frac{m^2}{m^2+25/\pi^2} - \frac{n^2}{n^2+25/\pi^2}\right\}$$

$$m = n,\ n > 0 \cdots \int_5^\infty \frac{\mu^3 d\mu}{\left(1+\left(\frac{\mu}{m\pi}\right)^2\right)^4} = \frac{m^8\pi^4}{6}\left\{\frac{25/\pi^2}{(m^2+25/\pi^2)^3} + \frac{1/2}{(m^2+25/\pi^2)^2}\right\}$$

$$m \neq n,\ n = 0 \cdots \frac{1}{n^4}\int_5^\infty \frac{\mu^3 d\mu}{\left(1+\left(\frac{\mu}{m\pi}\right)^2\right)^2\left(1+\left(\frac{\mu}{n\pi}\right)^2\right)^2} = \pi^4\int_5^\infty \frac{d\mu}{\mu\left(1+\left(\frac{\mu}{m\pi}\right)^2\right)^2}$$

$$= \frac{\pi^4}{2}\left\{\log\left(1+\frac{m^2\pi^2}{25}\right) - \frac{m^2}{m^2+25/\pi^2}\right\}$$

Auf diesem Wege ergibt sich die folgende Tabelle der a_{mn}, wobei die a_{mn} mit geraden Indices nach Gl. (22′), diejenigen mit ungeraden nach (22) zu rechnen waren. Es war nur nötig, die Diagonalreihen und die rechts davon stehenden Zahlen numerisch auszuwerten; die symmetrisch stehenden Zahlen links davon konnten danach auf Grund der Relation (22″) sofort hingeschrieben werden. Wir geben die Koeffizienten mit geraden Indices ausführlicher als die mit ungeraden, weil erstere, wie wir sehen werden, die uns zumeist interessierende niedrigste Knicklast bestimmen:

$a_{00} = 0,\ a_{20} = -0{,}837,\quad a_{40} = -0{,}647,\quad a_{60} = -0{,}542,\quad a_{80} = -0{,}463$

$a_{02} = 0,\ a_{22} = -0{,}126,\quad a_{42} = -0{,}215,\quad a_{62} = -0{,}251,\quad a_{82} = -0{,}259$

$a_{04} = 0,\ a_{24} = -0{,}0269,\quad a_{44} = -0{,}0878,\quad a_{64} = -0{,}0932,\quad a_{84} = -0{,}110$

$a_{06} = 0,\ a_{26} = -0{,}00930,\quad a_{46} = -0{,}0277,\quad a_{66} = -0{,}0450,\quad a_{86} = -0{,}0537$

$a_{08} = 0,\ a_{28} = -0{,}00404,\quad a_{48} = -0{,}0138,\quad a_{68} = -0{,}0226,\quad a_{88} = -0{,}0335$

. . . .

$a_{11} = -0{,}961,\quad a_{31} = -0{,}875,\quad a_{51} = -0{,}700,$

$a_{13} = -0{,}0325,\quad a_{33} = -0{,}0971,\quad a_{53} = -0{,}137,$

$a_{15} = -0{,}0056,\quad a_{35} = -0{,}0297,\quad a_{55} = -0{,}0540.$

. . . .

Wir kommen jetzt zur Berechnung der Knicklasten P bezw. der durch Gl. (24) definierten Hilfsgröße $Q = 4\pi C/hP$ und beginnen mit der Determinante (25′) der geraden Indices. Von links oben beginnend sondern wir eine einreihige, zweireihige ... Determinante aus derselben

aus. Wir erhalten so eine Gleichung ersten, zweiten ... Grades für Q. Die größte Wurzel derselben heiße Q_1, die zweitgrößte (aus später ersichtlichen Gründen) Q_3. Wir überzeugen uns durch Ausrechnung, daß diese Wurzeln rapide je einer Grenze zustreben, welche zugleich als größte bezw. zweitgrößte Wurzel der unendlichen Determinante angesprochen werden kann. Wir erhalten

1-reih. Det. $Q_1 = 0{,}437$,

2-reih. Det. $Q_1 = 0{,}437$, $Q_3 = 0{,}227$,

3-reih. Det. $Q_1 = 0{,}44$, $Q_3 = 0{,}221$.

Somit ergibt sich hinreichend genau

$$(1) \quad \begin{cases} Q_1 = 0{,}44, & P_1 = 2{,}3 \frac{4\pi C}{h} \\ Q_3 = 0{,}22, & P_3 = 4{,}6 \frac{4\pi C}{h}. \end{cases}$$

Entsprechend behandeln wir die Determinante (25) der ungeraden Indices; bei dieser ist die Konvergenz nicht ganz so gut wie bei jener. Die größte Wurzel der aus ihr ausgeschnittenen Gleichung ersten, zweiten, ... Grades heiße Q_2. Es ergibt sich

1-reih. Det. $Q_2 = 0{,}039$,

2-reih. Det. $Q_2 = 0{,}348$,

2-reih. Det. $Q_2 = 0{,}330$.

Als Grenzwert sehen wir an

$$(2) \quad Q_2 = 0{,}33, \quad P_2 = 3{,}0 \frac{4\pi C}{h}.$$

Ebenso wie in diesem Falle werden sich allgemein die Wurzeln Q unserer Determinante (25) zwischen diejenigen der Determinante (25′) einordnen.

Die Berechnung der größten Wurzel Q_1 bez. der kleinsten Knicklast P_1 wurde noch auf einem anderen Wege kontrolliert. Wie Ende des vorigen § besprochen, kann man in dem ursprünglichen Ansatz die Cosinus- durch die Sinus-Funktion ersetzen; man erhält dann ebenfalls unendliche Determinanten von der Form der früheren, nur mit anderer Bedeutung der a_{mn}. Es wurde bereits darauf hingewiesen, daß die Determinante der ungeraden Indices bei dem Sinus-Ansatz derjenigen der geraden Indices bei dem Cosinus-Ansatz entsprechen muß. In der Tat ergibt sich als größte Wurzel der ersteren

aus der 1-reih. Det. $Q_1 = 0{,}324$,

„ „ 2-reih. „ $Q_1 = 0{,}440$,

„ „ 3-reih. „ $Q_1 = 0{,}439$

in voller Übereinstimmung mit unserem Ergebnis unter 1).

Um die zu jedem Q gehörige Form der Ausbiegung zu finden, müssen weiterhin die Koeffizienten A berechnet werden. Wir beschränken uns hierbei auf die kleinste Knicklast und machen dementsprechend in den Gl. (26′) des vorigen § $Q = Q_1$. Wir erhalten so ein unendliches System linearer Gleichungen für die Unbekannten $A_2 : A_4 : A_6 \ldots$, dessen Coefficienten $1 + a_{22} - 2 Q_1$, $a_{24}, \ldots$ bekannte Zahlen sind. Das unendliche System wurde ersetzt durch das folgende drei- vierreihige, in dem die fraglichen Zahlenkoeffizienten bereits eingetragen sind:

$$
\begin{aligned}
-0{,}001\, A_2 - 0{,}215\, A_4 - 0{,}251\, A_6 - 0{,}259\, A_8 &= 0, \\
-0{,}027\, A_2 - 0{,}838\, A_4 - 0{,}093\, A_6 - 0{,}110\, A_8 &= 0, \\
-0{,}009\, A_2 - 0{,}028\, A_4 - 1{,}670\, A_6 - 0{,}054\, A_8 &= 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus ergeben sich die Unbekannten als die Werte dreireihiger Determinanten zu:

$$
A_2 : A_4 : A_6 : A_8 = \\
-0{,}313 : -0{,}011 : +0{,}002 : +0{,}011.
$$

Nach Gl. (28) des vorigen § berechnet sich ferner der verhältnismäßige Wert des constanten Gliedes A_0 zu:

$$
A_0 : A_2 : \cdots = +0{,}263 : -0{,}313 : \cdots
$$

Nunmehr läßt sich die Meridiankurve der Ausbiegungsfläche, d. h. der Verlauf von u für $x = 0$ zwischen $y = 0$ und $y = h$ nach Gl. (29) des vorigen § direkt hinschreiben. Es ergibt sich, von einem willkürlichen Faktor abgesehen:

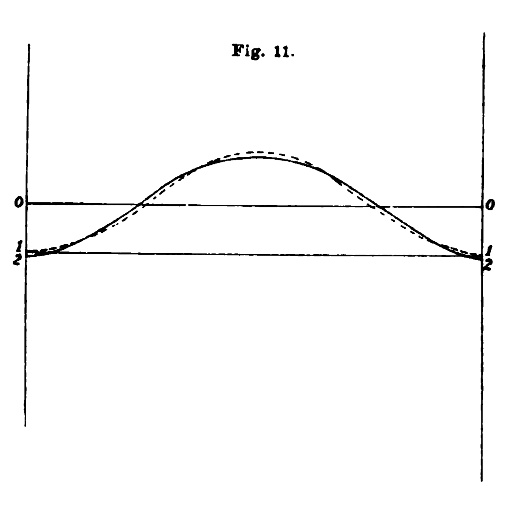
$$
(3) \quad u = +0{,}263 - 0{,}273 \cos \frac{2\pi y}{h} - 0{,}018 \cos \frac{4\pi y}{h} + 0{,}005 \cos \frac{6\pi y}{h} \\
+ 0{,}036 \cos \frac{8\pi y}{h} + \cdots
$$

Als Probe für die Genauigkeit der Zahlenrechnungen berechnen wir den Wert von u für $y = 0$ (oder für $y = h$), welcher strenge genommen gleich Null sein muß. Er ergibt sich zu $u = +0{,}013$; der Unterschied dürfte von dem wahrscheinlich zu großen letzten Gliede der Reihe (3) herrühren.

Fig. 11 stellt den Verlauf von u dar. Die Gerade 0 entspricht dem constanten Gliede, die punktierte Linie 1 der Summe der ersten beiden Glieder in Gl. (3); bei Hinzufügung des folgenden Gliedes (Linie 2) erhält man bei dem hier benutzten Maßstab keine erhebliche Abweichung von der Linie 1. Die Meridiankurve kann daher merklich als eine Cosinuskurve beschrieben werden.

Die photographische Aufnahme, Fig. 13, eines entsprechenden Knickfalles zeigt eine Meridiankurve von demselben Charakter.

Wenn wir die entsprechenden Rechnungen für die Wurzeln $Q = Q_2$, $Q = Q_3, \ldots$ ausführen würden, müßten wir natürlich bei der betr. Meridiankurve (statt der in Fig. 11 dargestellten einen Erhebung nach der einen Seite) für $Q = Q_2$ eine Erhebung nach der einen und eine nach der anderen Seite finden, welche in einem Knoten in der Mitte aneinander anschließen, für $Q = Q_3$ müßten sich zwei äußere Erhebungen nach der einen und eine mittlere nach der anderen Seite ergeben u. s. f.



Schließlich vergleichen wir noch die Knicklast im jetzigen Falle der Einspannung mit der früher gefundenen bei freier Drehbarkeit der Kanten. Erstere ist natürlich die größere. Das Verhältnis beider beträgt (Gl. (1) dieses § und Gl. (8) des § 2) 2,3 während es im Eulerschen Falle des geraden Stabes (Gl. (1) in § 1) gleich 4 ist. Bei den höheren Knicklasten wird dieses Verhältnis sogar noch kleiner, nämlich bei der nächst höheren Knicklast P_2 (Gl. (2) dieses § und Gl. (10) des § 2) gleich 1,5 und muß sich in der Grenze für P_∞ der Einheit nähern. Letzteres entspricht dem Umstande, daß für die höheren Knicklasten, bei denen die Ausbiegungsfläche aus einer größeren Anzahl von Wellen besteht, der Unterschied zwischen dem größeren Zwange der Einspannung und dem geringeren der drehbar festgehaltenen Ränder mehr und mehr zurücktreten muß; dasselbe gilt auch für die Knickung des geraden Stabes.

§ 5.

Die Last ist gleichmäßig über die ganze Länge des Bleches verteilt.

Als Gegenstück zu dem bisher behandelten Grenzfall einer punktförmig konzentrirten Last nehmen wir jetzt an, daß die Last gleichmäßig über die ganze als unendlich vorausgesetzte Länge des Bleches verteilt sei. Die Lösung wurde bereits oben (Gl. (2) in § 1) im Anschluß an Love angegeben. Sie läßt sich äußerst leicht ableiten, da das Problem vermöge der vorausgesetzten Lastverteilung von der x-Koordinate unabhängig wird und aus dem Gebiete der partiellen Differentialgleichungen in das der gewöhnlichen zurücktritt.

p sei die Last für die Längeneinheit der Ränder, bei der das Blech ausknickt. Das Gebiet II (vgl. Fig. 6) erstreckt sich jetzt über das ganze Blech. Daher gilt überall die Gl. II aus § 1 welche wegen der Unabhängigkeit der Ausbiegung von x übergeht in:

$$\frac{d^4u}{dy^4} + \frac{p}{C}\frac{d^2u}{dy^2} = 0. \tag{1}$$

Wir setzen zunächst wie in § 2 frei drehbare Ränder, also $u = d^2u / dy^2 = 0$ für $y = 0$ und $y = h$ voraus. Diesen Randbedingungen entspricht der Ansatz

$$u = A \sin\frac{\pi y}{h}; \tag{2}$$

er genügt auch der Differentialgleichung (1), wenn nur

$$\frac{\pi^4}{h^4} - \frac{p}{C}\frac{\pi^2}{h^2} = 0, \quad p = \frac{\pi^2 C}{h^2}.$$

Dies stimmt mit Gl. (2b) in § 1. Der Ansatz (2) läßt sich sofort erweitern und liefert die höheren Knicklasten, wenn man macht

$$u = A \sin\frac{n\pi y}{h}, \qquad p = \frac{(n\pi)^2 C}{h^2}. \tag{3}$$

Nehmen wir andrerseits den Fall der Einspannung mit den Randbedingungen $u = du/dy = 0$. Ihnen genügt der Ansatz

$$u = A\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{h}\right), \tag{4}$$

welcher sich zugleich mit (1) in Einklang bringen läßt, wenn man macht:

$$\frac{(2\pi)^4}{h^4} - \frac{p}{C}\frac{(2\pi)^2}{h^2} = 0, \qquad p = \frac{4\pi^2 C}{h^2}.$$

Dies ist der Wert aus Gl. (2a) in § 1.

Eine nahe liegende Verallgemeinerung von (4) lautet

$$u = A\left(1 - \cos\frac{2\pi m y}{h}\right), \quad p = \frac{4\pi^2 m^2 C}{h^2}. \tag{5}$$

Damit ist aber nur ein Teil der höheren Knicklasten gefunden; die durch 5 (und 4) dargestellten Lösungen weisen nämlich sämtlich eine ungerade Anzahl von Ausbiegungen und Symmetrie gegen die Mitte auf und entsprechen demnach denjenigen Lösungen, die in § 3 und 4 als Lösungen mit geraden Indices bezeichnet wurden. Diejenigen Verbiegungen, welche sich aus einer geraden Anzahl von Beulen zusammensetzen, sind dagegen unter einer anderen Form enthalten, welche den

Lösungen mit ungeraden Indices der vorangehenden § entspricht. Dieselbe lautet

$$u = A\left\{\left(1 - \cos\frac{\lambda_m y}{h}\right) - \frac{2}{\lambda_m}\left(\frac{\lambda_m y}{h} - \sin\frac{\lambda_m y}{h}\right)\right\}, \tag{6}$$

wobei

$$\operatorname{tg}\frac{\lambda_m}{2} = \frac{\lambda_m}{2} \quad \text{und} \quad p = \frac{\lambda_m^2 C}{h^2}; \tag{7}$$

λ_1 sei die kleinste Wurzel der Gleichung (7) nämlich Null, $\lambda_2, \lambda_3 \ldots$ bedeuten die der Größe nach geordneten positiven Wurzeln. Zum Beweis trage man (6) in (1) und die Grenzbedingungen ein und berücksichtige (7).

Wir vergleichen die Knicklasten (5) und (7) mit den zuerst erhaltenen (3). Es entspricht vermöge der Gestalt der Ausbiegungsfigur

dem Falle $n = 1$ in Gleichung (3) ... der Fall $m = 1$ in Gleichung (5)
„ „ $n = 3, 5, 7 \ldots$ in. Gl. „ ... „ „ $m = 2, 3, 4 \ldots$ in Gl. „
„ „ $n = 2, 4, 6 \ldots$ „ „ „ ... „ „ $m = 2, 3, 4 \ldots$ in Gl. (7).

Das Verhältnis der zusammengehörigen Knicklasten beträgt im ersten Falle 4, nimmt aber bei den höheren Knicklasten ab und nähert sich der 1. Setzen wir nämlich nach der vorstehenden Zusammenstellung $n = 2m - 1$ in (3) ein, so ergibt sich im Verhältnis aus (5) und (3):

$$\frac{4m^2}{(2m-1)^2} = 1 \text{ bei großem } m.$$

Ähnlich folgt, wenn wir in (3) $n = 2m$ machen und in (7) λ_m durch seinen asymptotischen Wert $\pi(2m + 1)$ ersetzen, als Verhältnis der Werte (7) und (3):

$$\frac{(2m+1)^2}{(2m)^2} = 1 \text{ bei großem } m.$$

Der Einfluß der Einspannung nimmt somit bei den höheren Knicklasten ab, was im Einklang steht mit einer Bemerkung am Schluß des letzten §.

Wir vergleichen schließlich noch die jetzt gefundenen niedrigsten Knicklasten mit denjenigen im Eulerschen Falle bei entsprechender Befestigung der Enden, d. h. die Gleichung 2a und b des § 1 mit den Gleichungen 1a und b. Sie unterscheiden sich durch den Faktor $1 - \mu^2$. Derselbe hängt offenbar mit der Tatsache der Querdilatation zusammen. Bei dem unendlich dünnen Stabe kann sich die Querdilatation frei ausbilden, bei dem hier betrachteten Blech, dessen Meridiankurve sonst mit der elastischen Linie des ausgeknickten Stabes übereinstimmt, ist dieselbe behindert. Durch Hinderung der Quer-

dilatation wird aber, allgemein gesprochen, die Wirkung einer Druckkraft herabgesetzt. Daher muß die Knicklast bei gehinderter Querdilatation etwas höher liegen wie bei freier, was in dem Faktor $1 - \mu^2$ im Nenner von Gl. 2) zum Ausdruck kommt.

§ 6. Die Last ist gleichmäßig über ein gewisses Stück des Randes verteilt, die Ränder frei drehbar.

Aus der Gesamtlast P und der Länge l der Belastungsfläche leiten wir die spezifische Belastung $p = P/l$ ab und unterscheiden wie in § 1 drei Gebiete (vgl. Fig. 6):

$$\text{(I)}\quad x > \frac{l}{2}, \qquad \text{(II)}\quad |x| < \frac{l}{2}, \qquad \text{(III)}\quad x < -\frac{l}{2}.$$

Unser Problem ist durch die folgenden Bedingungen bestimmt (vgl. § 1, Gl. (I), (II), (4), (5), (7b), (9)):

1) Im Gebiet I und III gilt die Differentialgleichung

$$\Delta\Delta u = 0,$$

im Gebiete II die Gleichung

$$\Delta\Delta u + \frac{p}{C}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2) Für $y = 0$ und $y = h$ haben wir bei beliebigem x:

$$u = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

3) Für $x = \pm\infty$ gilt:

$$u = \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

4) u ist in x gerade:

$$u(-x) = u(+x).$$

5) Für $x = \pm l/2$ und beliebige Werte von y müssen sich

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$$

stetig verhalten.

Wir genügen den Bedingungen 2) in einfachster Weise, indem wir uns die Abhängigkeit von y für alle drei Gebiete durch

$$\sin\frac{\pi y}{h}$$

gegeben denken. Vermöge der Gleichung $\Delta\Delta u = 0$ wird die Abhängigkeit von x im Gebiete I alsdann durch die Differentialgleichung

(5) des § 2 bestimmt. Ihre für $x = +\infty$ verschwindende allgemeinste Lösung lautet

$$(A + Bx)e^{-\frac{\pi x}{h}},$$

wo A und B Integrationskonstanten sind. Mithin wird unser Ansatz für das Gebiet I

$$u = \sin\frac{\pi y}{h}(A + Bx)e^{-\frac{\pi x}{h}} \cdots \text{ in I.} \tag{6}$$

Die entsprechende Lösung im Gebiete III ist nach unserer Bedingung (4) unmittelbar hinzuschreiben:

$$u = \sin\frac{\pi y}{h}(A - Bx)e^{+\frac{\pi x}{h}} \cdots \text{ in III.} \tag{7}$$

Im Gebiete (II) haben wir die Abhängigkeit der gesuchten Lösung

$$u = \sin\frac{\pi y}{h}f(x)$$

von x durch die folgende Differentialgleichung zu bestimmen:

$$f^{\mathrm{IV}}(x) - \frac{2\pi^2}{h^2}f''(x) + \frac{\pi^4}{h^4}f(x) = +\frac{\pi^2}{h^2}\frac{p}{C}f(x).$$

Schreiben wir $f(x) = e^{\lambda x}$, so lautet die Gleichung für λ:

$$\left(\lambda^2 - \frac{\pi^2}{h^2}\right)^2 = +\frac{\pi^2}{h^2}\frac{p}{C},$$

$$\lambda_1^2 = \frac{\pi^2}{h^2}\left(1 + \frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{p}{C}}\right), \quad \lambda_2^2 = \frac{\pi^2}{h^2}\left(1 - \frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{p}{C}}\right).$$

Die erste dieser Wurzeln gibt zwei reelle Werte $\pm\lambda_1$; wir wollen zeigen, daß die beiden Wurzeln λ_2 imaginär sind. Gehen wir nämlich von einer punktförmig konzentrierten Last P aus, so ist $p = \infty$, also sicher $\lambda_2^2 < 0$. Wir lassen die Belastungsfläche l wachsen und haben zunächst sicher noch $\lambda_2^2 < 0$. Die Knicklast für den Grenzfall $l = \infty$ ist uns aber nach den Erörterungen des vorigen § oder nach Gl. (2b) des § 1 bekannt: $p = \pi^2 C/h^2$; mithin haben wir $\lambda_2^2 = 0$ erst für $\lambda = \infty$. Die Annahme liegt nahe und wird sich in der Folge bestätigen, daß wir für jedes endliche l immer noch $\lambda_2^2 < 0$ haben. Wir schreiben dementsprechend

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{\pi}{h}\mu_1, & \lambda_2 = i\frac{\pi}{h}\mu_2, \\ \mu_1^2 = \frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{p}{C}} + 1, & \mu_2^2 = \frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{p}{C}} - 1, \end{cases} \tag{9}$$

wo μ_1, μ_2 reell sind und positiv gewählt werden können. Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (8) setzt sich nun aus dem trigono-

metrischen Sinus und Cosinus von $\pi\mu_2 x/h$ und dem hyperbolischen Sinus und Kosinus von $\pi\mu_1 x/h$ zusammen. Wegen der Bedingung (4) können wir aber nur die Kosinusfunktionen brauchen. Deshalb haben wir

$$u = \sin\frac{\pi y}{h}\left(a\cdot\mathfrak{Cos}\frac{\pi}{h}\mu_1 x + b\cos\frac{\pi}{h}\mu_2 x\right); \tag{10}$$

wo a und b zwei weitere Integrationskonstanten.

Durch unsere Ansätze (6), (7), (10) ist den Bedingungen (1) bis (4) unseres Problems genügt. Auch die Bedingungen (5) sind bereits zur Hälfte befriedigt, insofern unsere Funktionen gerade sind und wir daher nur noch die Übergangslinie $x = + l/2$ zwischen den Gebieten I und II zu betrachten brauchen. Setzen wir zur Abkürzung

$$\frac{\pi l}{2h} = \varrho, \tag{11}$$

so schreiben sich die Bedingungen (5) nach (6) und (10) folgendermaßen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\left\{A + B\frac{l}{2}\right\}e^{-\varrho} = a\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho + b\cos\mu_2\varrho,\\
-&\left\{A + B\frac{l}{2}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)\right\}e^{-\varrho} = a\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho - b\mu_2\sin\mu_2\varrho,\\
+&\left\{A + B\frac{l}{2}\left(1-\frac{2}{\varrho}\right)\right\}e^{-\varrho} = a\mu_1^2\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho - b\mu_2^2\cos\mu_2\varrho,\\
-&\left\{A + B\frac{l}{2}\left(1-\frac{3}{\varrho}\right)\right\}e^{-\varrho} = a\mu_1^3\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho + b\mu_2^3\sin\mu_2\varrho.
\end{aligned}\right. \tag{12}$$

Im allgemeinen sind diese Gleichungen nur dadurch zu befriedigen, daß man

$$A = B = a = b = 0$$

setzt; dann bleibt das Blech eben. Verschwindet aber die Determinante des Systems, wodurch den μ_1, μ_2 und daher (s. Gl. (9)) der Belastung p eine Bedingung auferlegt wird, so ergeben sich aus (12) bestimmte Verhältnisse $A : B : a : b$. Die alsdann mögliche Ausbiegung des Bleches ist der Form nach bestimmt, der Größe nach unbestimmt.

Die Bedingung des Knickens lautet hiernach, wenn wir als die aus (12) zu eleminierenden Größen

$$Ae^{-\varrho},\quad B\frac{l}{2}e^{-\varrho},\quad -a,\quad -b$$

ansehen:

$$\begin{vmatrix}
1, & 1, & \mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & \cos\mu_2\varrho\\
1, & 1-\frac{1}{\varrho}, & -\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & \mu_2\sin\mu_2\varrho\\
1, & 1-\frac{2}{\varrho}, & \mu_1^2\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2^2\cos\mu_2\varrho\\
1, & 1-\frac{3}{\varrho}, & -\mu_1^3\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2^3\sin\mu_2\varrho
\end{vmatrix} = 0.$$

oder bequemer:

$$\begin{vmatrix} 0, & 1, & \mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & +\cos\mu_2\varrho \\ 1, & 1, & -\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & +\mu_2\sin\mu_2\varrho \\ 2, & 1, & +\mu_1^2\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2^2\cos\mu_2\varrho \\ 3, & 1, & -\mu_1^3\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2^3\sin\mu_2\varrho \end{vmatrix} = 0.$$

Wir entwickeln nach zweireihigen Unterdeterminanten:

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \mu_1^2\mu_2^2 \begin{vmatrix} \mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & -\cos\mu_2\varrho \\ -\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2\sin\mu_2\varrho \end{vmatrix} \\
+&\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mu_1\mu_2\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho\sin\mu_2\varrho \begin{vmatrix} -\mu_1^2, & -\mu_2^2 \\ -1, & +1 \end{vmatrix} \\
+&\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mu_1\mu_2 \begin{vmatrix} -\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & +\sin\mu_2\varrho \\ +\mu_1\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2\cos\mu_2\varrho \end{vmatrix} \\
-&\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -\mu_1^3\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & -\mu_2^3\sin\mu_2\varrho \\ \mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & \cos\mu_2\varrho \end{vmatrix} \\
-&\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho\cos\mu_2\varrho \begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \mu_1^2, & -\mu_2^2 \end{vmatrix} \\
+&\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho, & \cos\mu_2\varrho \\ -\mu_1\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho, & +\mu_2\sin\mu_2\varrho \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

und erhalten schließlich:

$$(13)\quad \begin{cases} -2(\mu_1^2+\mu_2^2)\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho\cos\mu_2\varrho + 2\mu_1\mu_2(u_1^2+\mu_2^2)\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho\sin\mu_2\varrho \\ +\mu_2(\mu_1^2\mu_2^2+3\mu_1^2+\mu_2^2-1)\,\mathfrak{Cos}\,\mu_1\varrho\sin\mu_2\varrho \\ +\mu_1(\mu_1^2\mu_2^2-3\mu_2^2-\mu_1^2-1)\,\mathfrak{Sin}\,\mu_1\varrho\cos\mu_2\varrho = 0. \end{cases}$$

Dies ist unsere transzendente Gleichung zur Bestimmung der in μ_1, μ_2 vorkommenden Knicklast p; sie hat, wie wir sehen werden, nur eine reelle Wurzel. Zu den höheren Knicklasten gelangt man, wenn man in dem ursprünglichen Ansatz (Gl. (6), (7) und (10)) y und x ersetzt durch my und mx. Ändert man die Definition der Größen μ_1, μ_2, ϱ in folgender Weise ab:

$$\mu_1^2 = \frac{h}{m\pi}\sqrt{\frac{p}{C}} + 1, \quad \mu_2^2 = \frac{h}{m\pi}\sqrt{\frac{p}{C}} - 1, \quad \varrho = \frac{m\pi l}{2h},$$

so bleibt Gl. (13) der Form nach erhalten und dient auch zur Berechnung dieser höheren Knickbelastungen. Im folgenden beschränken wir uns aber auf die praktisch allein wichtige niedrigste Knicklast.

Wir wünschen zunächst Gl. (13) in Zusammenhang zu bringen mit unseren früheren Ergebnissen für $l = 0$ (§ 2) und $l = \infty$ (§ 5).

a) Für $l = 0$ wird $p = \infty$, also (Gl. (9)) auch $\mu_1^2, \mu_2^2 = \infty$, ferner (Gl. (11)) $\varrho = 0$. Da aber $lp = P$ endlich bleiben muß, so wird

$$\varrho\mu_1^4 = \varrho\mu_2^4 = \varrho\mu_1^2\mu_2^2 = \frac{h}{2\pi}\frac{P}{C} \tag{14}$$

gleich einer endlichen Zahl; dagegen:

$$\varrho\mu_1 = \varrho\mu_2 = \cdots = \varrho\mu_1^3 = \varrho\mu_2^3 = 0. \tag{15}$$

Ersetzen wir daher in (13) die Kosinus durch 1, die Sinus durch $\mu_1\varrho$ bezw. $\mu_2\varrho$, so ergibt sich

$$-2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + 2\mu_1^2\mu_2^2\varrho^2(\mu_1^2 + \mu_2^2)$$
$$+ \mu_2^2\varrho(\mu_1^2\mu_2^2 + 3\mu_1^2 + \mu_2^2 - 1) + \mu_1^2\varrho(\mu_1^2\mu_2^2 - 3\mu_2^2 - \mu_1^2 - 1) = 0.$$

Streichen wir alle diejenigen Glieder, welche nicht unendlich werden, so bleibt:

$$-2(\mu_1^2 + \mu_2^2) + \mu_1^2\mu_2^2\varrho(\mu_1^2 + \mu_2^2) = 0,$$

also

$$\mu_1^2\mu_2^2\varrho = 2,$$

d. h. wegen (14)

$$P = \frac{4\pi C}{h}. \tag{16}$$

Dies ist unsere Knicklast aus § 2, Gleichung (8).

b) Nehmen wir andrerseits $l = \infty$. Mit $l = \infty$ wird $\varrho = \infty$. Setzen wir den im vorigen § abgeleiteten Wert $p = \pi^2 C/h^2$ in die Gleichung (9) dieses § ein, so folgt $\mu_2^2 = 0, \mu_1^2 = 2$; somit wird $\mu_1\varrho = \infty$, $\operatorname{Cof}\mu_1\varrho = \operatorname{Sin}\mu_1\varrho = \infty$, $\operatorname{Cof}\mu_1\varrho/\operatorname{Sin}\mu_1\varrho = 1$; dagegen wird $\mu_2\varrho$ zunächst unbestimmt. Tragen wir dieses in (13) ein, so ergibt sich

$$(-4 - 3\sqrt{2})\cos\mu_2\varrho = 0,$$

also

$$\mu_2 = \frac{\pi}{2\varrho}, \quad \frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{p}{C}} = 1 + \frac{\pi^2}{4\varrho^2},$$

$$p = \frac{\pi^2 C}{h^2}\left(1 + \frac{\pi^2}{2\varrho^2} + \cdots\right). \tag{17}$$

Somit ist dargetan, daß der im vorigen § abgeleitete Grenzwert $p = \pi^2 C/h^2$ mit unserer allgemeinen Gleichung (13) für $\varrho = \infty$ oder, was dasselbe ist, für $l = \infty$ verträglich ist; gleichzeitig ist aber eine erste Korrektion jenes Grenzwertes für große Werte von ϱ gewonnen, wie wir durch die Schreibweise unserer letzten Formel als einer nach

negativen Potenzen von ϱ fortschreitenden Entwickelung angedeutet haben.

Auch die Grenzformel (16) wollen wir durch eine für kleine Werte von ϱ gültige Reihenentwicklung ergänzen, welche ihrerseits nach aufsteigenden Potenzen von ϱ fortschreiten wird und bis zu dem Gliede ϱ^2 berechnet werden soll. Bei der Abschätzung, wie weit man in jedem Term von Gleichung (13) zu gehen hat, ist zu berücksichtigen, daß nach Gleichung (14) $\mu_1^4 \varrho$ und $\mu_2^4 \varrho$ auch bei verschwindendem ϱ endlich sind, und daß sich der Faktor $\mu_1^2 + \mu_2^2$ schließlich herausheben wird. Man erkennt dann, daß die folgenden Näherungen für jede der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen genügen: Im ersten Term bis ϱ^2, im zweiten bis ϱ, im dritten und vierten bis ϱ^3. Wir erhalten:

$$
\begin{aligned}
&- 2(\mu_1^2 + \mu_2^2)\left(1 + \frac{\varrho^2}{2}(\mu_1^2 - \mu_2^2)\right) + 2\mu_1^2\mu_2^2\varrho^2(\mu_1^2 + \mu_2^2) \\
&+ \mu_2^2\varrho(\mu_1^2\mu_2^2 + 3\mu_1^2 + \mu_2^2 - 1)\left(1 + \frac{\varrho^2}{6}(3\mu_1^2 - \mu_2^2)\right) \\
&+ \mu_1^2\varrho(\mu_1^2\mu_2^2 - 3\mu_2^2 - \mu_1^2 - 1)\left(1 - \frac{\varrho^2}{6}(3\mu_2^2 - \mu_1^2)\right) = 0.
\end{aligned}
$$

Dividiert man mit $\mu_1^2 + \mu_2^2$ und setzt nach Gleichung (9) $\mu_1^2 - \mu_2^2 = 2$, so folgt

$$
\begin{aligned}
&- 2(1 + \varrho^2) + 2\mu_1^2\mu_2^2\varrho^2 + \varrho(\mu_1^2\mu_2^2 - 1)\left(1 + \frac{\varrho^2}{3}\right) \\
&- 2\varrho + \frac{3}{2}\mu_1^2\mu_2^2\varrho^3 - \frac{\mu_1^6 + \mu_2^6}{\mu_1^2 + \mu_2^2}\frac{\varrho^3}{6} = 0.
\end{aligned}
$$

Macht man vorübergehend

$$\frac{h}{\pi}\sqrt{\frac{P}{C}} = x$$

so wird: $\mu_1^2 + \mu_2^2 = 2x$, $\mu_1^2\mu_2^2 = x^2 - 1$, $\mu_1^6 + \mu_2^6 = 2(x^3 + 3x)$; unsere Gleichung lautet also:

$$
\begin{aligned}
&- 2(1 + \varrho^2) + 2(x^2 - 1)\varrho^2 + \varrho(x^2 - 2)\left(1 + \frac{\varrho^2}{3}\right) \\
&- 2\varrho + \frac{3}{2}(x^2 - 1)\varrho^3 - (x^2 + 3)\frac{\varrho^3}{6} = 0.
\end{aligned}
$$

Somit wird (unter Vernachlässigung überflüssiger Terme):

$$x^2\varrho\left(1 + 2\varrho + \frac{5}{3}\varrho^2\right) = 2 + 4\varrho + 4\varrho^2, \qquad x^2\varrho = 2\left(1 + \frac{\varrho^2}{3}\right),$$

$$P = \frac{4\pi C}{h}\left(1 + \frac{\varrho^2}{3} + \cdots\right). \tag{18}$$

Die Vergleichung dieser Formel mit dem früheren Grenzwert (16) zeigt, daß die Knicklast mit wachsendem l etwas ansteigt, aber zu-

nächst nur in geringem Grade, solange nämlich ϱ klein, d. h. solange l klein gegen h ist. Dies ist sehr verständlich.

In Fig. 12 ist der Gesamtverlauf von P zur Abszisse ϱ aufgetragen. Auf der Ordinatenachse ist zunächst der Wert $P = 4\pi C/h$ für $\varrho = 0$ d. h. für punktförmig konzentrierte Belastung markiert. Die Parallele zur Abszissenachse in diesem Punkte stellt eine erste Näherung der gesuchten Kurve für kleine ϱ dar und ist in der Figur mit 1 bezeichnet.

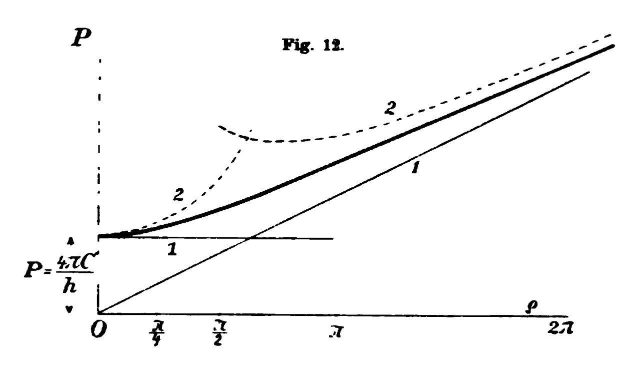


Fig. 12.

Die zweite Näherung ist nach Gleichung (18) eine Parabel; sie ist punktiert eingetragen und mit 2 bezeichnet. Für große Werte von ϱ lautete unsere erste Näherung $p = \pi^2 C/h^2$, d. h. in unseren Koordinaten P und ϱ geschrieben:

$$P = pl = \frac{\pi^2 Cl}{h^2} = \frac{4\pi C}{h} \cdot \frac{\varrho}{2}.$$

Unsere erste Näherung für große ϱ ist also eine Gerade, nämlich die in der Figur ebenfalls mit 1 bezeichnete aufsteigende Gerade. Die zweite Näherung liefert Gleichung (17); sie lautet in unseren Koordinaten

$$P = \frac{4\pi C}{h} \frac{\varrho}{2}\left(1 + \frac{\pi^2}{2\varrho^2} + \cdots\right),$$

und ist in Fig. 12 wieder mit 2 bezeichnet. Den wirklichen Verlauf der durch unsere transzendente Gleichung definierten Kurve zeigt die verstärkt ausgezogene Linie. Ihrer Konstruktion liegen die folgenden Zahlenwerte zugrunde:

$$\varrho = 0 \quad \pi/4 \quad \pi/2 \quad \pi \quad 2\pi$$

$$P = \frac{4\pi C}{h}(1 \quad 1{,}13 \quad 1{,}38 \quad 2{,}00 \quad 3{,}33),$$

die durch direkte numerische Behandlung der Gleichung (13) (wiederholtes Einsetzen von Näherungswerten und Interpolation zwischen diesen) gewonnen sind.

Alles dieses bezieht sich auf den Fall freier Drehbarkeit der Ränder, welcher hiermit als vollständig erledigt gelten kann. Den Fall der Einspannung habe ich wegen seiner erheblich größeren Komplikation nicht so weit geführt. Ich glaube aber nicht fehl zu gehen in der Annahme, daß sich bei kleinen Werte von ϱ die soeben gefundenen Resultate auch auf diesen Fall mit guter Annäherung übertragen lassen. Ein Beispiel möge die Art dieser Übertragung erläutern.

Es sei $l = h/3$, also $\varrho = \pi/6$. Sind die Ränder drehbar befestigt, so finden wir aus der vorangehenden Zahlentabelle, indem wir zwischen $\varrho = 0$ und $\varrho = \pi/4$ linear interpolieren:

$$P = \frac{4\pi C}{h} 1{,}09\,,$$

wenn wir dagegen, was bei dem anfänglichen Verlauf der Kurve in Fig. 12 angemessener erscheint, parabolische Interpolation anwenden:

$$P = \frac{4\pi C}{h} 1{,}05\,.$$

Nun betrug bei Einspannung der Ränder der Anfangswert von P für $l = 0$ nach Gleichung (1) in § 4: $P = 2{,}3 \cdot 4\pi C/h$. Danach setzen wir für $l = h/3$, indem wir den soeben gefundenen Korrektionsfaktor 1,05 hinzufügen:

$$P = 2{,}3 \frac{4\pi C}{h} 1{,}05\,.$$

§ 7. Versuchsergebnisse.

Das ursprüngliche Ziel dieser Arbeit war, die in der Einleitung S. 115 genannten und in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure l. c. veröffentlichten Versuche zu klären. Namentlich handelte es sich um folgende Punkte: 1) die in unserer Fig. 5 wiedergegebene stark schematische Gestalt der Ausbiegungsfläche, wie sie in jener Veröffentlichung abgedruckt ist, zu berichtigen, 2) die Versuche für den Fall freier Drehbarkeit der Ränder zu ergänzen, 3) die experimentellen Knicklasten mit den theoretischen zu vergleichen.

Zu 1). Durch das freundliche Entgegenkommen des Hütten-Aktien-Vereins Rothe Erde bei Aachen wurde es mir ermöglicht, mit derselben hydraulischen Presse, mit der auch die oben genannten Versuche gemacht waren, einige I-Profile bis zur Knickgrenze auf Druck zu beanspruchen. Fig. 13 ist die photographische Wiedergabe eines durch punktförmig konzentrierte Last beanspruchten Trägers von 300 mm Höhe (Abstand der oberen von der unteren Flanschkante) und 16 mm Stegdicke. Beim allmählichen Anwachsen der Last, wie es durch die Ar-

beitsweise der hydraulischen Presse gegeben war, zeigte der Träger zunächst gar keine Veränderungen, bis bei einer deutlich ausgeprägten Belastung die Ausbiegung begann und dann sehr schnell zunahm. Die Presse wurde darauf sofort außer Tätigkeit gesetzt, die Ausbiegung

Fig. 13.



hatte an der Stelle größter Erhebung bereits den Betrag von einigen cm erreicht; die Knicklast betrug 125000 kg. Nach welcher Seite die Ausbiegung erfolgen würde, war bei diesem und den anderen Versuchen nicht vorauszubestimmen. Dagegen ließ die Gesetzmäßigkeit der entstehenden Ausbiegungsfläche in allen Fällen erkennen, daß es sich um ein wohl-definiertes geometrisches Gebilde handelte.

Die Photographie zeigt deutlich, daß von einer geradlinigen scharfen Begrenzung der Ausbeulungs-Figur nicht die Rede ist. Vielmehr läuft die in der Mitte durch einen helleren Ton sich markierende größte Erhebung völlig allmählich aus.

Ähnliches gilt von Fig. 14: Blech von der Höhe 350 mm, Stärke 15,9 mm, Knicklast zufällig ebenfalls 125000 kg. Die Last wurde von

Fig. 14.



der Presse durch je einen Klotz von der Breite 200 mm auf den oberen und unteren Rand des Bleches übertragen. Der Klotz hat sich, worauf wir noch zurückkommen, in den Rand des Bleches scharfkantig eingedrückt.

Der Vergleich von 14 und 13 zeigt deutlich den Einfluß der Randbedingung (Drehbarkeit oder Einspannung) in der Art der Wölbung des Bleches an seinen Rädern.

Zu 2). Da die in der Ingenieur-Zeitschrift veröffentlichten Versuche sämtlich mit I-Trägern, also unter Einspannung der Ränder des Steges ausgeführt waren, so war eine Reihe weiterer Versuche erwünscht, bei denen gewöhnliche Bleche ohne Flansche (wie in der letzten Figur) ausgeknickt wurden unter der theoretisch einfacheren Bedingung einer Festhaltung der Ränder bei Gewährleistung freier Drehharkeit. Letztere Bedingungen waren durch einen geeigneten schweren Rahmen gesichert, in den die Bleche eingeschoben wurden. Der Rahmen war in der oberen und unteren Mitte ausgespart, so daß hier Druck und Gegendruck auf die Ränder des Bleches mittels eines Klotzes von der Presse übertragen werden konnten. Der Klotz war bei allen folgenden Versuchen $l = 20$ cm breit. Auch diese Versuche wurden durch das Entgegenkommen des Hütten-Aktien-Vereins Rothe Erde unterstützt und ermöglicht:

Abmessungen in cm		Spez. Druck in kg/cm	Knicklast P_k in kg	
h	s	$P_k \mid ls$	beob.	theor.
35	1,59	3 930	125 000	297 000
35	1,48	4 250	125 000	240 000
35	1,49	4 350	129 000	246 000
35	1,03	3 160	65 000	79 000
25	1,49	5 000	150 000	385 000
25	1,03	3 150	65 000	124 000
14,5	0,95	3 800	72 500	210 000

Die theoretischen Knicklasten in der letzten Spalte sind nach der Formel

$$P_k = 4\pi \frac{C}{h} \eta = \frac{\pi}{3} \frac{\eta}{1 - \mu^2} \frac{s^3}{h} E \tag{1}$$

gerechnet, wo der Korrektionsfaktor η aus Fig. 12 oder der Tabelle von S. 148 zu entnehmen ist und dem Umstande Rechnung trägt, daß bei unseren Versuchen die Last über die Länge $l = 20$ cm gleichmäßig verteilt war. Für den Elastizitätsmodul E wurde $2 \cdot 10^6$ kg/cm² angenommen, für μ der Poissonsche Wert 1/4 eingesetzt.

Die theoretischen Knicklasten sind durchweg erheblich größer als die beobachteten, im Durchschnitt doppelt so groß. Den Grund dafür deckt die mittelste Spalte unserer Tabelle auf. Verteilen wir

die Gesamtlast P_k im Augenblicke der Knickung gleichmäßig auf die Druckfläche von der Größe sl, so ergibt sich ein spezifischer Druck pro cm^2, welcher durchweg oberhalb der sog. Fließgrenze für Flußeisen liegt. Letztere schätzt man zwischen 2500 und 3000 kg/cm^2, während der kleinste der obigen Drucke bei 3150 liegt. An der Fließgrenze ändern sich aber die Eigenschaften des Materials von Grund aus. Will man hier überhaupt noch von einem Elastizitätsmodul sprechen (gegeben durch die Tangentenneigung an die hier erheblich abbiegende Spannungs-Dehnungs-Kurve), so ist derselbe sicher nicht gleich $2 \cdot 10^6$ kg/cm^2 zu setzen, wie bei kleinen Spannungen, sondern erheblich kleiner. Unsere theoretische Formel muß also mit diesem Wert von E erheblich zu große Knicklasten liefern.

Eine experimentelle Bestätigung dafür, daß bei unseren Versuchen die Fließgrenze überschritten wurde, liefert der Anblick von Fig. 14. Der die Last übertragende Klotz hat sich hier scharfkantig in das Material des Bleches eingegraben, wie es einem durch übermäßige Beanspruchung erweichten Zustande desselben entspricht.

Ganz dasselbe gilt von den in der Ingenieur-Zeitschrift veröffentlichten Versuchen mit I-Trägern. Auch hier liegen die spezifischen Drucke durchweg oberhalb 3000 kg/cm^2 und steigen sogar bis 6000 kg/cm^2 an. Die zugehörige theoretische Formel, die wir nach Analogie von Gl. (1) dieses § mit Rücksicht auf den Schluß des vorigen § schreiben können:

$$P_k = 2{,}3 \frac{\pi}{8} \frac{\eta}{1-\mu^2} \frac{s^3}{h} E, \tag{2}$$

muß daher auch hier erheblich zu hohe Knicklasten liefern, wenn wir für E den regulären Wert bei kleinen Beanspruchungen eintragen. Die wirkliche Ausrechnung bestätigt dieses.

Man kann sich die Aufgabe stellen, diesen und den vorangehenden Versuchen dadurch gerecht zu werden, daß man die Veränderlichkeit des Elastizitätsmoduls mit wachsendem spezifischem Druck berücksichtigt. Das mathematische Problem würde dann im Anschluß an Fig. 6 folgendermaßen umzumodeln sein: Im Gebiete II haben wir einen anderen Elastizitätsmodul wie in den Gebieten I und III; jener geht in die Differentialgl. (II) des § 1 ein und die beiden letzten Übergangsbedingungen (9) sind dahin abzuändern, daß nicht $\partial^2 u/\partial x^2$ und $\partial^3 u/\partial x^3$, sondern die Produkte dieser Größen in den sprungweise veränderlichen Elastizitätsmodul sich beim Durchgange durch $x = \pm l/2$ stetig verhalten sollen. Die Lösung dieses Problems führt naturgemäß auf eine transzendente Gleichung, welche ähnlich wie Gl. (13) des vorigen §

gebaut ist, aber noch das Verhältnis der beiden verschiedenen Werte des Elastizitätsmoduls enthält. Aus dieser Gleichung ließ sich erkennen, daß die Knicklast durch eine Veränderung des Elastizitätsmoduls in empfindlicher Weise beeinflußt wird. Jedoch schien es nicht der Mühe wert, die numerischen Rechnungen unter diesen komplizierten Verhältnissen durchzuführen, weil die Annahme eines sprungweisen Wechsels des Elastizitätsmoduls der Wirklichkeit doch nur schlecht entspricht.

Überblicken wir die vorliegenden Versuchsergebnisse, so werden wir zusammenfassend feststellen können, daß dieselben den theoretischen Ergebnissen in keiner Weise widersprechen, daß sie sie aber auch nicht zahlenmäßig bestätigen können, weil die Versuchsbedingungen nicht der theoretischen Voraussetzung eines einheitlichen wohldefinierten Elastizitätsmoduls entsprechen. Eine wirkliche Bestätigung der Theorie ist nur von Laboratoriumsversuchen kleinen Maßstabes mit sehr viel dünneren Blechen zu erwarten, bei denen die Knicklasten erheblich niedriger liegen und die spezifischen Drucke die Fließgrenze nicht überschreiten. Solche Versuche werden vorbereitet. Es unterliegt wohl keinem Zweifel, daß sie die Voraussagen der Theorie in vollem Umfange erhärten werden.

Für die Praxis ergibt sich aus diesem Sachverhalt die sehr bequeme Folgerung[1]), daß auf die Knickgefahr bei den Stegen der Walzwerksprofile keine besondere Rücksicht genommen zu werden braucht. Denn es zeigen sowohl die Versuchswerte wie die theoretischen Erörterungen, daß unter den in der Praxis vorliegenden Abmessungen die zulässige Grenze der Druckspannungen im Steg früher als die Knickgrenze überschritten wird. Wenn man also die Belastung innerhalb derjenigen Grenzen hält, welche der Druckspannung ohnehin gezogen sind, so schließt man damit zugleich jede Knickgefahr aus.

---

1) Vgl. hierzu auch meine Zusammenfassung der vorstehenden Arbeit in der Zeitschr. des Vereins Deutscher Ingenieure 1906, S. 1104.

Darstellung der Mannheim-Darbouxschen Umschwungs-bewegung eines starren Körpers.

Von Anton Grünwald in Bubentsch bei Prag.

Die einfachste Form der Bewegungsgleichungen.

Die allgemeinste Bewegung eines starren Körpers C, dessen Punkte p sich *alle* in Ebenen Π_1 eines fest gedachten starren Körpers C_1 bewegen, nennen wir einen

Darbouxschen Umschwung.

[G. Darboux: Sur les mouvements algébriques, Note III p. 352 in G. Koenigs: Leçons de Cinématique professées à la Sorbonne. Paris 1897.]

Durch jede solche Bewegung ist umgekehrt eine andere, die sog. „inverse" Bewegung bestimmt, welche denselben relativen Vorgang beschreibt, wobei aber der Körper C als fest, dagegen C_1 als beweglich anzusehen ist. *Alle* Ebenen Π_1 von C_1 gehen hierbei durch die Punkte p von C; wir nennen die letzte Bewegung einen

Mannheimschen Umschwung.

[M. A. Mannheim: Sur le déplacement d'une figure de forme invariable, dont tous les plans passent par des points fixes, Journal de l'École Polytechnique 60. Heft. Jahrg. 1890.][1])

Wir gehen aus von den Bewegungsgleichungen, welche Darboux (in Koenigs Cinématique p. 558) abgeleitet hat. Um Verwechslungen vorzubeugen, schreiben wir alle dortigen Größen mit Akzenten, so daß diese (dort mit 4) bezeichneten Gleichungen die Form

$$\left|\begin{array}{l} x_1' = \frac{a'^2+b'^2}{b'}\sin\vartheta' + x'\cos\vartheta' - y'\sin\vartheta' \\ y_1' = \qquad\qquad\qquad x'\sin\vartheta' + y'\cos\vartheta' \\ z_1' = k[a'\sin\vartheta' - b'(1-\cos\vartheta')] + z' \end{array}\right|$$

oder nach Einführung der neuen Konstantenbezeichnungen

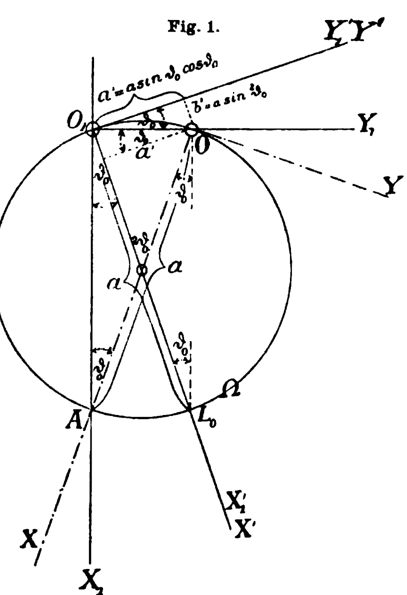
$$\left\{\begin{array}{r|c|l} \frac{a'^2+b'^2}{b'} = a & \frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} = \cos\vartheta_0 & a' = a\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 \\ k\sqrt{a'^2+b'^2} = b & \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2}} = \sin\vartheta_0 & b' = a\sin^2\vartheta_0 \end{array}\right\}$$

1) Durch diese algebraische Bewegung werden überraschend viele algebraische Kurven in einen einfachen Zusammenhang gebracht, wie die Untersuchung zeigt.

und Tausch der Benennung von x_1' mit y_1' und von x' mit y' die Gestalt

$$x_1' = x'\cos\vartheta' + y'\sin\vartheta'$$
$$y_1' = a\sin\vartheta' - x'\sin\vartheta' + y'\cos\vartheta'$$
$$z_1' = b\sin(\vartheta_0 + \vartheta') - b\sin\vartheta_0 + z'$$

erhalten.



Es wäre irrig, aus diesen Darbouxschen Gleichungen zu schließen, daß zur phoronomischen Kennzeichnung eines Umschwunges drei Konstante $ka'b'$, bzw. $ab\vartheta_0$ nötig seien; vielmehr brauchen wir bei angemesseuer Wahl beider rechtwinkeliger Koordinatentriëder nur die *zwei* wesentlichen Konstanten a und b zu behalten, wodurch wir die Gleichungen der Bewegung vereinfachen.

Wir transformieren einerseits das in C_1 gelagerte Koordinatensystem $(x_1' y_1' z_1')$, indem wir es um den Winkel ϑ_0 um die y_1'-Achse drehen und um die Strecke $b \sin\vartheta_0$ in der Richtung dieser Achse verschieben.

So erhalten wir

$$*)\qquad \begin{Bmatrix} x_1' = x_1\cos\vartheta_0 + y_1\sin\vartheta_0 \\ y_1' = x_1\sin\vartheta_0 + y_1\cos\vartheta_0 \\ z_1' = z_1 - b\sin\vartheta_0 \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} x_1 = x_1'\cos\vartheta_0 - y_1'\sin\vartheta_0 \\ y_1 = x_1'\sin\vartheta_0 + y_1'\cos\vartheta_0 \\ z_1 = z_1' + b\sin\vartheta_0 \end{Bmatrix}$$

und

$$\begin{Bmatrix} x_1 = -a\sin\vartheta'\sin\vartheta_0 + x'\cos(\vartheta' - \vartheta_0) + y'\sin(\vartheta' - \vartheta_0) \\ y_1 = a\sin\vartheta'\cos\vartheta_0 - x'\sin(\vartheta' - \vartheta_0) + y'\cos(\vartheta' - \vartheta_0) \\ z_1 = b\sin(\vartheta_0 + \vartheta') + z' \end{Bmatrix},$$

wobei die Figur 1 bei den Transformationen *)**) zur Versinnlichung dienen kann.

Andererseits geben wir auch in C dem Koordinatensystem $(x'y'z')$ die neue, durch die Gleichungen

$$**)\qquad \begin{Bmatrix} x' = a\sin^2\vartheta_0 + x\cos 2\vartheta_0 + y\sin 2\vartheta_0 \\ y' = a\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 - x\sin 2\vartheta_0 + y\cos 2\vartheta_0 \\ z' = z \end{Bmatrix}$$

bestimmte Lage (xyz) und ziehen statt des alten Parameters ϑ' den neuen

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'$$

heran. So ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$1)\qquad \begin{cases} x_1 = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \\ y_1 = a\sin\vartheta - x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \\ z_1 = b\sin\vartheta + z \end{cases}$$

in ihrer einfachsten Gestalt, in welcher wir sie zur Grundlage unserer Betrachtungen machen.

Der Umschwung ist *periodisch*, d. h. wenn ϑ sich um 2π ändert, so kehren dieselben gegenseitigen Lagen von C_1 und C wieder. In der Ausgangslage ($\vartheta = 0$) fallen beide Koordinatentriëder *zusammen*. Die z_1-Achse in C_1 und die z-Achse in C bleiben stets zueinander parallel und verschieben sich hierbei — dies sei zwecks der Hervorhebung der geometrischen Bedeutung der Konstanten a und b gleich hier bemerkt — in der zu diesen Achsen senkrechten Richtung höchstens um a $\left(\pm a \text{ für } \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ und in der Richtung dieser Achsen selbst höchstens um b $\left(\pm b \text{ für } \vartheta = \pm\frac{\pi}{2}\right)$.

Ist

I) $b = a$, so soll der Umschwung ein mittlerer,

II) $b > a$, „ „ „ „ „ steiler,

II') $b < a$, „ „ „ „ „ flacher

heißen. Wir können voraussetzen, daß a und b positiv seien, da sich dies nötigenfalls durch entsprechende Achsenbezeichnung immer herbeiführen läßt.

Spezialfälle.

$a = 0$ und $b = 0$ führt eine einfache Umdrehung herbei,

$a = 0$ allein ($b > 0$) einen „vollkommen steilen" Umschwung.

Im Gegensatze zum Verhalten beim allgemeinen Umschwunge ($a > 0$, $b > 0$) ist bei diesem die Mannheimsche von der Darbouxschen Bewegung geometrisch nicht verschieden, d. h. die von den Punkten p_1 (des Körpers C_1) in C beschriebenen Bahnen haben die gleiche Gestalt wie die von den Punkten p (des Körpers C) in C_1 gezeichneten, *beide* sind elliptisch; und die Ebenen jedes der beiden Körper, C und C_1, umhüllen im anderen Umdrehungskegel.

Dieser Fall ist besonders leicht durch ein *kinematisches Modell* zu veranschaulichen. Man nehme einen sog.[1]) „Muff am Stift", d. h. einen Körper mit zylindrischer Bohrung, welcher mit der Fläche der letzteren eine kongruentzylindrische Laufstange, den „Stift", derart umschließt, daß er um letzteren gleiten und sich drehen kann, wie ein Ring am Finger. Wird nun ein Punkt des Muffes, d. h. bei der wirklichen Ausführung des Modelles etwa ein an der Innenfläche der Muffenbohrung befestigter Nagel, gezwungen sich in einer elliptischen in die Laufstangenoberfläche eingeritzten Nut zu bewegen, so beschreibt der Muff (oder bei festem Muffe der Stift) einen „vollkommen steilen" Umschwung.

Dieser spielt eine Rolle bei der Anwendung der dualen Zahlen Studys auf die Liniengeometrie.[2])

$b = 0$ allein $(a > 0)$ führt zum „vollkommen flachen" oder „steigungslosen" Umschwunge, d. h. zur zykloidalen Bewegung des ebenen Ellipsographen (Koenigs Cinématique p. 165), identisch mit der Projektionsbewegung in der $x_1 y_1$ Ebene beim allgemeinen Darbouxschen Umschwunge.

Bezüglich der Ellipsographenmodelle vgl. die Literaturangaben in Reuleaux' Kinematik II. Bd. (Braunschweig 1900) S. 283. Daselbst ist in der Figur 224 (Figur 248 S. 318 des I. Bandes, Braunschweig 1875) Dr. Rieflers Ellipsenzirkel abgebildet.

Aus dieser Ellipsographenbewegung entsteht der allgemeine Mannheim-Darbouxsche Umschwung durch Hinzutritt einer harmonischen Sinusschwingung mit der Amplitude b in der zur Ebene der Ellipsographenbewegung senkrechten Richtung z_1 (z).

---

1) Vgl. die „Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad" im 52. Band dieser Zeitschrift, Heft 3 S. 229.

2) Vgl. den Vortrag Dr. Josef Grünwalds bei der Naturforscherversammlung in Meran Sept. 1905 „Gewisse geometrische Anwendungen der dualen Zahlen", veröffentlicht im 2. Hefte des Jahrganges 1906 der „Wiener Monatshefte für Mathematik und Physik" unter dem Titel: „Über duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie." Insbesondere S. 134.

Eine orientierte reelle Gerade (Speer) erzeugt, wenn sie einem „vollkommen flachen" Umschwunge unterworfen wird, eine Regelfläche 4. Grades, bei welcher alle Tangentialebenen, die auch den absoluten Kugelkreis berühren, durch einen festen imaginären Punkt gehen und also die zu diesem gehörigen Minimalkegel berühren.

Die zu vier beliebigen reellen Erzeugenden einer solchen Umschwungsfläche gehörigen Tangentialebenen an den absoluten Kugelkreis bestimmen auf diesem Kegel (im Sinne der gewöhnlichen projektiven Geometrie) ein reelles Doppelverhältnis.

Wir stellen den Bewegungsgleichungen 1 ($=1_D$) des allgemeinen Darbouxschen Umschwunges ihre nach xyz aufgelöste Form (1_M) an die Seite

$$(1_D)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 = \qquad\qquad x\cos\vartheta + y\sin\vartheta \\ y_1 = a\sin\vartheta - x\sin\vartheta + y\cos\vartheta \\ z_1 = b\sin\vartheta \qquad\qquad + z \end{array}\right\}$$

$$(1_M)\qquad \left\{\begin{array}{l} x = \quad a\sin^2\vartheta \qquad\quad + x_1\cos\vartheta - y_1\sin\vartheta \\ y = -a\sin\vartheta\cos\vartheta + x_1\sin\vartheta + y_1\cos\vartheta \\ z = -b\sin\vartheta \qquad\qquad\qquad + z_1 \end{array}\right\}$$

weil dies für die Mannheimsche Auffassungsweise der Bewegung gebraucht wird und bemerken, daß unser Winkel ϑ positiv ist, wenn die Drehung von C_1 gegen C im Sinne des Überganges von der $+x$- zur $+y$-Achse, oder was dasselbe ist, wenn die Drehung von C gegen C_1 im umgekehrten Sinne, im Sinne des Überganges von $(-x_1)$ zu $(+y_1)$ stattfindet.

Ferner fügen wir die Gleichungen I_D (I_M) bei, welche aus den obigen beim Übergange von Punktkoordinaten $\begin{pmatrix} x\ y\ z \\ x_1 y_1 z_1 \end{pmatrix}$ zu homogenen Plückerschen Ebenenkoordinaten $\begin{pmatrix} u\ v\ w\ \varpi \\ u_1 v_1 w_1 \varpi_1 \end{pmatrix}$ — gemäß der Bedingung $\begin{pmatrix} x\,u + y\,v + z\,w + \varpi = 0 \\ x_1 u_1 + y_1 v_1 + z_1 w_1 + \varpi_1 = 0 \end{pmatrix}$ für die vereinigte Lage von Punkt und Ebene — hervorgehen:

$$(\mathrm{I}=\mathrm{I}_D)\qquad \left\{\begin{array}{l} u_1 = \quad u\cos\vartheta + v\sin\vartheta \\ v_1 = -u\sin\vartheta + v\cos\vartheta \\ w_1 = \quad w \\ \varpi_1 = \quad ua\sin^2\vartheta - va\sin\vartheta\cos\vartheta - wb\sin\vartheta + \varpi \end{array}\right\}$$

$$(\mathrm{I}_M)\qquad \left\{\begin{array}{l} u = u_1\cos\vartheta - v_1\sin\vartheta \\ v = u_1\sin\vartheta + v_1\cos\vartheta \\ w = \qquad\qquad w_1 \\ \varpi = \qquad\qquad v_1 a\sin\vartheta + w_1 b\sin\vartheta + \varpi_1 \end{array}\right\},$$

weil diese für die Betrachtung der von den Ebenen $\begin{Bmatrix} \Pi\,(u\ v\ w\ \varpi) \\ \Pi_1(u_1 v_1 w_1 \varpi_1) \end{Bmatrix}$ des Körpers $\begin{Bmatrix} C \\ C_1 \end{Bmatrix}$ im (jeweilig festgedachten) Körper

$$\begin{Bmatrix} C_1(\text{Bezugstetraeder } u_1 v_1 w_1 \varpi_1) \\ C\,(\qquad\text{"}\qquad u\ v\ w\ \varpi) \end{Bmatrix}$$

eingehüllten {sogenannten „olisthoidalen"[1]) Developpablen (S. 187) / Umdrehungskegel (S. 161)}
benötigt werden.

Wir untersuchen die Punkt- und Ebenenbahnen des Darbouxschen Umschwunges zugleich mit den durch inverse Bewegungsauffassung verbundenen Ebenen- bzw. Punktbahnen des Mannheimschen Umschwunges und geben dabei Apparate an, welche in mechanisch bequem ausführbarer Weise die Umschwungsbewegung der Körper C_1 und C gegen einander erzwingen. Diese kinematischen Modelle zur Darstellung eines zwangläufigen allgemeinen Umschwunges können selbstverständlich auf zweierlei Weise in Gang gesetzt werden;

entweder, wenn auf C_1 gestellt,[2]) um den Darbouxschen Umschwung von C
oder, „ „ C „ „ „ Mannheimschen „ „ C_1

zu verwirklichen. Willkürlich ist der von uns hier eingehaltene Vorgang, daß wir den von uns gefundenen Hauptapparat (Figur 3) bei Zugrundelegung der Darbouxschen Auffassung, dagegen einen für sehr flache Umschwungsbewegungen (b klein gegen a) nötigen Nebenapparat (Figur 5) unter Annahme der Mannheimschen Auffassung vorführen werden.

Die Bahnellipsen der Punkte beim Darbouxschen und die Kegel-Hüllflächen der Ebenen beim Mannheimschen Umschwunge.

Jede Auskunft über die ersteren geben die Parametergleichungen (1_D) der Bahnlinie eines beliebigen Punktes $p(xyz)$. Wenn wir dort statt

1) Gino Loria: „Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven", Leipzig 1902 schlägt im 1. Bd. S. 224 für die ebenen Parastroiden (Parallelkurven einer regulären Astrois, 2. Bd. S. 651) diese Bezeichnung vor, da sie als Hüllkurven einer vom gewöhnlichen ebenen Ellipsographen C mitgenommenen Geraden seiner Ebene betrachtet werden können. (Vgl. S. 189.) Das Wort „olisthoidal" ist vom griechischen „ὀλισθάνω, gleite" hergenommen, da alle Punkte eines gewissen Kreises Ω des Ellipsographen — und daher auch dessen zwei (nicht notwendig reelle) Schnittpunkte mit der Geraden selbst — auf Strahlen eines Büschels der festen Unterlagsebene *gleiten*. (Der Kreis Ω mit dem Durchmesser a geht hierbei stets durch das Zentrum O_1 dieses Büschels und rollt am Kreise Ω_1, welcher um O_1 mit dem Radius a beschrieben ist, ohne zu gleiten.)

Es liegt nahe, diese Bezeichnung auch für die Einhüllenden der Ebenen eines Körpers C beizubehalten, dessen Punkte auf Ebenen zu *gleiten* gezwungen werden, wie es im allgemeinsten Falle beim Darbouxschen Umschwunge (vgl. S. 187) geschieht.

2) Hier nehmen wir den treffenden Ausdruck Reuleaux' (Kinematik 1. Bd. Braunschweig 1875, 2. Bd. 1900) an, um anzuzeigen, daß wir C_1 als fest, C als beweglich betrachten, obgleich in unseren Figuren 3 und 5 die jeweilig als fest vorgeführten Körper (in Plattenform) sich oben befinden.

$\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ etwa $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$ als Parameter einführen wollten, erhielten wir $x_1 y_1 z_1$, die Koordinaten der Lage p_ϑ des anfänglichen Punktes $p = p_{(\vartheta=0)}$, rational und vom 2. Grade durch diesen Parameter ausgedrückt.

Die Mittelpunkte aller Bahnellipsen liegen auf der Achse z_1. Die Ebene $\Pi_1(u_1 v_1 w_1 \varpi_1)$ der von p beschriebenen Ellipse, auf welcher der beliebige Pnnkt p zu gleiten gezwungen ist, hat eine Cartesische Gleichung und Ebenenkoordinaten, welche wir sogleich angeben:

Die Gleichung ist in laufenden Punktkoordinaten ($\xi_1 \eta_1 \zeta_1$, entsprechend auf der $x_1 y_1 z_1$-Achse)

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - x_1, & \eta_1 - y_1, & \zeta_1 - z_1 \\ \frac{dx_1}{d\vartheta}, & \frac{dy_1}{d\vartheta}, & \frac{dz_1}{d\vartheta} \\ \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2}, & \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2}, & \frac{d^2z_1}{d\vartheta^2} \end{vmatrix} = 0,$$

daher finden wir mit Rücksicht auf

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_1}{d\vartheta}, & \frac{dy_1}{d\vartheta}, & \frac{dz_1}{d\vartheta} \\ \frac{d^2x_1}{d\vartheta^2}, & \frac{d^2y_1}{d\vartheta^2}, & \frac{d^2z_1}{d\vartheta^2} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (-x\sin\vartheta + y\cos\vartheta), & (a\cos\vartheta - x\cos\vartheta - y\sin\vartheta), & b\cos\vartheta \\ (-x\cos\vartheta - y\sin\vartheta), & (-a\sin\vartheta + x\sin\vartheta + y\sin\vartheta), & -b\sin\vartheta \end{vmatrix}$$

$$= |\, yb,\ -xb,\ (ax - [x^2 + y^2])\, |$$

die Ebenenkoordinaten von Π_1:

$$(2-2_D) \quad u_1 = by, \quad v_1 = -bx, \quad w_1 = -(x^2+y^2-ax), \quad \varpi_1 = z(x^2+y^2-ax)$$

wirklich von ϑ ganz unabhängig, ebenso wie die obige Gleichung

$$(\xi_1 - x_1)by - (\eta_1 - y_1)bx - (\zeta_1 - z_1)(x^2 + y^2 - ax) = 0.$$

Π_1 bleibt *dieselbe* Ebene für alle p_ϑ wie für die Ausgangslage p ($x_1 = x$, $y_1 = y$, $z_1 = z$ entsprechend $\vartheta = 0$), daher ist ihre Gleichung für $p_{(\vartheta=0)}$

$$(\xi_1 - x)by - (\eta_1 - y)bx - (\zeta_1 - z)(x^2 + y^2 - ax) = 0.$$

Um die so analytisch bestimmte Zuordnung der Punkte p und der Ebenen Π_1 für die Ausgangslage ($\vartheta = 0$) der beiden Körper C und C_1 geometrisch zu deuten, beachten wir, daß die Ebene Π_1 stets das aus p auf die z_1-Achse gefällte Lot $po = \mathfrak{D}$ enthält; $o(\zeta_1 = \eta_1 = 0,\ \xi_1 = z)$ ist der Ellipsenmittelpunkt; um das Lot $\mathfrak{D}$ dreht sich Π_1, wenn man p auf diesem Lote anderswo annimmt, und zwar berührt Π_1 hierbei stets

ein gleichseitiges hyperbolisches Paraboloid $\mathfrak{P}$ mit der einen Scheitelgeraden $\mathfrak{D}$, dem Scheitel (Zentralpunkt) auf dem Zylinder Ω

$$\Omega(x^2 + y^2 - ax = 0)$$

und der, neben der z_1-Achse (Δ^0) noch von $\mathfrak{D}$ getroffenen Kante Δ $\left(\xi_1 = \frac{ax^2}{x^2+y^2},\ \eta_1 = \frac{axy}{x^2+y^2}\right)$ dieses Zylinders als Scheitelgeraden; die Verteilungskonstante aller dieser Paraboloide ist b, d. h. $\mathfrak{P}$ ist kongruent mit dem Paraboloide $\mathfrak{P}_0$:

$$(\xi_1 - a)\zeta_1 + b\eta_1 = 0,$$

welches für die Punkte p_0 der x_1-Achse ($\mathfrak{D}_0$) dieselbe Rolle spielt, wie $\mathfrak{P}$ für die Punkte p von $\mathfrak{D}$, und außer $\mathfrak{D}_0$ die zu Δ^0 diametral gegenüberliegende Kante $\Delta_0(\xi_1 = a,\ \eta_1 = 0)$ zur Scheitelgeraden hat. (In der später nötigen Figur (2_D) ist Ω durch die Spur $\Omega_{(\vartheta=0)}$, ferner $z_1 = \Delta^0$ und Δ_0 angedeutet.) Um das Behauptete einzusehen, erwäge man, daß C (und damit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}_0$) aus der Anfangslage ($\vartheta = 0$) in die Nachbarlage übergeführt wird durch eine Schraubung mit Achse Δ_0 und dem Parameter $\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)_{\vartheta=0} = b(\cos\vartheta)_{\vartheta=0} = b$ und daß die Ebenen Π_1 der Punkte p von $\mathfrak{D}$ jene Ebenen sind, welche $\mathfrak{D}$ mit dem Translationsstrahle des betreffenden Punktes p verbinden.

Um also zu einem beliebigen Punkte p der Ausgangslage ($\vartheta = 0$) die Ebene Π_1, auf welcher er beim Darbouxschen Umschwung zu gleiten hat, zu bestimmen, schaffe man $\mathfrak{P}_0(\mathfrak{D}_0, \Delta_0)$ nach der durch ($\mathfrak{D}$, Δ) bestimmten Lage $\mathfrak{P}$, für p wie für jeden andern Punkt von $\mathfrak{D}$ gibt dann die Tangentialebene von $\mathfrak{P}$ auch die zugehörige Ellipsenebene Π_1 an.

Durch Umkehrung der Gleichungen (2_D) ist zu jeder Ebene $\Pi_1(u_1 v_1 w_1 \varpi_1)$ der Punkt $p(xyz)$ gemäß

$$(2_M) \qquad \left\{x = \frac{v_1(av_1 + bw_1)}{u_1^2 + v_1^2},\quad y = -\frac{u_1(av_1 + bw_1)}{u_1^2 + v_1^2},\quad z = -\frac{\varpi_1}{w_1}\right\}$$

ebensogut bestimmbar als analog unserem oben eingehaltenen Wege direkt aus den Gleichungen (I_M). Letztere geben in Parameterform bei Ebenenkoordinaten die Gleichungen des bei der Mannheimschen Bewegung von einer beliebigen Ebene Π_1 eingehüllten Umdrehungskegels in C mit dem Scheitel p und einer zur w-Ebene senkrechten, d. h. stets zur z-Achse parallelen Drehachse. Die Gleichungen (2_M) beantworten die Frage nach dem Scheitel p des von Π_1 umhüllten Kegels.

Sei $\mathfrak{D}$ die in Π_1 gelegene senkrechte Transversale von Δ^0 (z_1-Achse) und Δ die, außer von Δ^0 noch von $\mathfrak{D}$ getroffene Kante des Zylinders Ω, so braucht man nur das Paraboloid $\mathfrak{P}_0$ in die durch ($\mathfrak{D}$, Δ) bestimmte

Lage $\mathfrak{P}$ zu bringen, um im Berührungspunkte von Π_1 mit $\mathfrak{P}$ schon den Scheitel p des von Π_1 umhüllten Kegels zu sehen und zu erkennen, wie p auf $\mathfrak{D}$ wandert, wenn sich Π_1 um p dreht. —

Alle Punkte p führen beim Darbouxschen Umschwunge auf ihren Ellipsen harmonische Schwingungen aus, d. h. solche, die sich als Parallelprojektionen von gleichförmigen Kreisbewegungen auffassen lassen, wenn man ϑ als Zeit ansieht. Den Ellipsenmittelpunkt, welcher die Projektion des Punktes $p_{(\vartheta=0)}$ auf die z_1-Achse ist, nannten wir o; zu jedem Ellipsenhalbmesser $op_{(\vartheta)}$ ist der konjugierte einfach $op_{\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}$. Er gibt in Größe und Richtung die *Geschwindigkeit des Punktes* $p_{(\vartheta)}$ an; $op_{(\vartheta+\pi)} = -op_\vartheta$ stellt dann ebenso die Beschleunigung des Punktes p_ϑ vor. Es gilt nämlich zufolge den Gleichungen (1_D)

$$\frac{dx_1}{d\vartheta} = x_{1\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \frac{dy_1}{d\vartheta} = y_{1\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \frac{dz_1}{d\vartheta} = z_{1\left(\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)} - z,$$

wenn wir durch die Ausdrücke in den Klammern andeuten, was in den dabeistehenden Größen statt ϑ einzusetzen ist.

Anm. Bezüglich der Bestimmung von $p_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ zu $p = p_{(\vartheta=0)}$ und damit der *Bahnellipse* jedes Punktes p aus *konjugierten Halbmessern* s. auch S. 165 Anm.

Übergang zur kinematischen Bestimmung eines Umschwunges.

In der Figur (2_D) skizzieren wir einige, verschiedenen ϑ-Werten $\left(\text{z. B. } 0,\ \vartheta,\ \underline{\vartheta},\ \underline{\underline{\vartheta}},\ \frac{\pi}{2}\right)$ entsprechende Lagen des in C eingelagerten und beim Darbouxschen Umschwunge mit C bewegten Bezugstrieders $O(xyz)$ gegen das in C_1 angebrachte feste System $O_1(x_1y_1z_1)$. Die Übersicht dieser Lagen gewinnen wir durch Beachtung der Bahnlinie $\underline{\varDelta_1}$ des Anfanges $O(0, 0, 0)$ und der Ellipse $\mathfrak{A}$ des Punktes $A(a, 0, 0)$ der x-Achse. Letztere hat zufolge den Gleichungen (1_D)

$$\mathfrak{A}\{x_1 = a\cos\vartheta, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = b\sin\vartheta\}$$

den Mittelpunkt O_1 und die Scheitel $A_1 = A_{(\vartheta=0)}(a, 0, 0)$ und $B_1(0, b, 0)$, während die Bahnellipse des ersteren zum Durchmesser $\underline{\varDelta_1}$

$$\underline{\varDelta_1}(x_1 = 0, \quad y_1 = a\sin\vartheta, \quad z_1 = b\sin\vartheta) \text{ d. h. } (x_1 = 0, \quad by_1 - az_1 = 0)$$

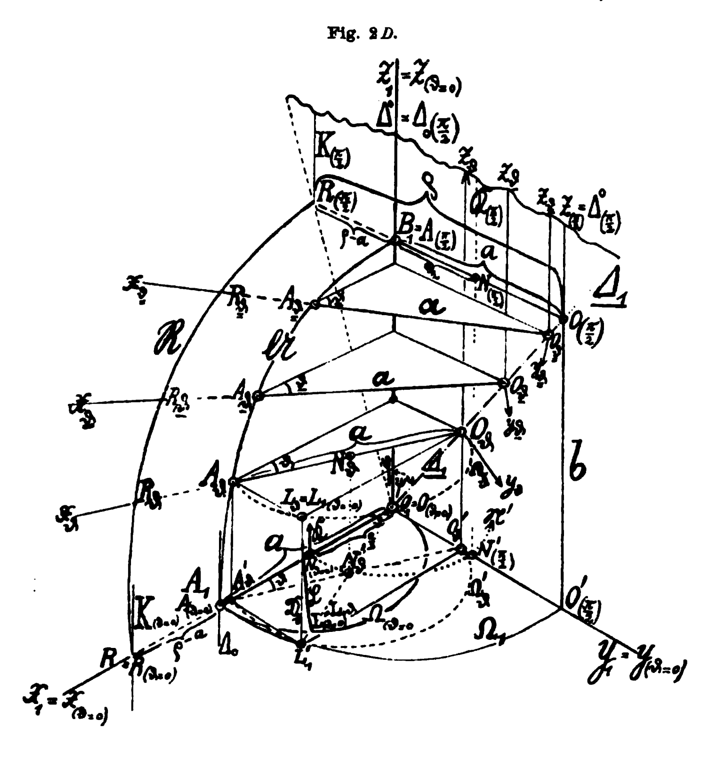
in der y_1z_1-Ebene zusammengeschnürt ist, wobei die Gerade $\underline{\varDelta_1}$ mit der z_1-Achse den durch

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a}{b} \tag{3}$$

bestimmten Winkel ψ einschließt. Für jeden Wert von ϑ ist nun die Lage $O_\vartheta A_\vartheta$ der Strecke OA, welche sich dort auf der $x_1 y_1$-Ebene orthogonal nach $O'_\vartheta A'_\vartheta$ projiziert, unmittelbar zu erkennen und damit auch die Lage der auf $O_\vartheta A_\vartheta$ fallenden Achse x_ϑ, der durch O_ϑ zu z_1 parallelen Achse z_ϑ, sowie der zu den beiden letzten senkrechten Achse y_ϑ.

Aus der Bewegung der Projektion $O'_\vartheta A'_\vartheta$ ist zu entnehmen, daß der Kreis Ω der xy-Ebene über OA als Durchmesser, wenn wir ihn

Fig. 2 D.



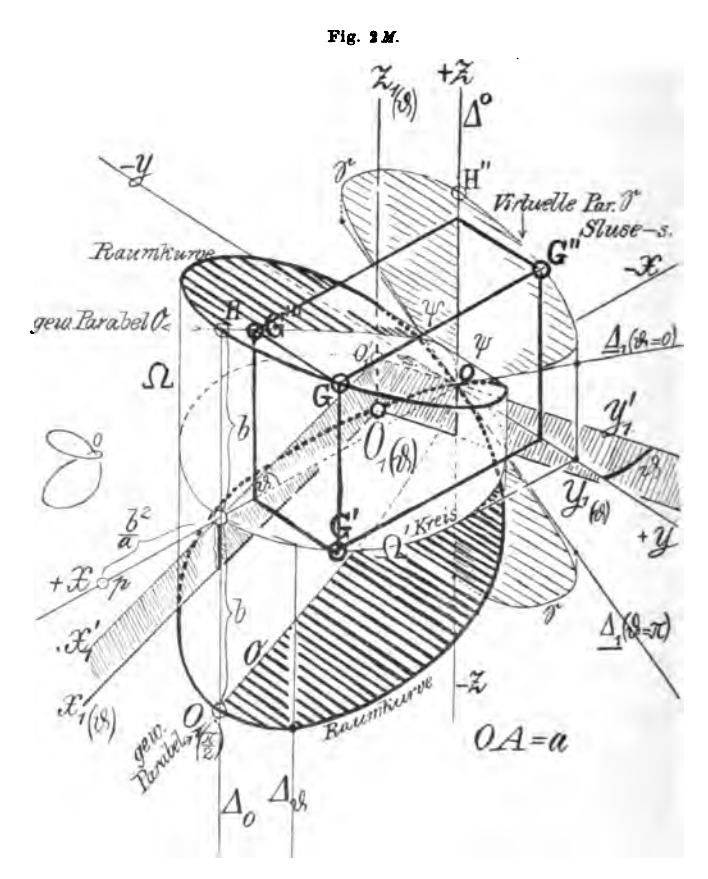
von OA in die $O_\vartheta A_\vartheta$ entsprechende Lage Ω_ϑ mitgeführt denken, eine Projektion Ω'_ϑ auf die $x_1 y_1$-Ebene hat, welche ohne zu gleiten am Kreise

$$\Omega_1 (x_1^2 + y_1^2 = a^2)$$

der $x_1 y_1$-Ebene mit dem Mittelpunkte O_1 und dem Radius $O\,A_1 = a$ abrollt; der Punkt $L_{(\vartheta=0)}(x = a\cos^2\alpha,\ y = a\cos\alpha\sin\alpha,\ z = 0)$ der Ausgangslage $\Omega_{(\vartheta=0)}$ gelangt nämlich bei seinem Umschwunge um ϑ auf seiner Ellipse $\mathfrak{L}$ zufolge Gleichung (1_D) nach $L_\vartheta(x_1 = a\cos\vartheta,$ $y_1 = a\sin\vartheta,\ z_1 = b\sin\vartheta)$, falls der auf Ω veränderliche Parameter α gleich dem nachher gewünschten ϑ gesetzt wird, so daß sich L_ϑ nach L'_1, dem nachherigen Berührungspunkt von Ω'_ϑ mit Ω_1 projiziert. Die

Bogen AL auf Ω einerseits und $A_1 L_1'$ auf Ω_1 andererseits sind gleich, weil die zugehörigen Zentriwinkel sich wie $2:1$, also umgekehrt wie die Radien verhalten. Wenn wir von jetzt ab mit Ω und Ω_1 die senkrechten Kreiszylinder selbst bezeichnen, welche über der betreffenden Basis sich erheben, und sich anfänglich, für $\vartheta = 0$, entlang der Kante Δ_0

Fig. 2 M.



Bewegung des Koordinaten-Trieders beim Mannheimschen Umschwunge.

berührten, so sehen wir die Darboux-Mannheimsche Umschwungsbestimmung vor uns, nämlich die Zwangsführung von C an C_1 (oder umgekehrt) durch das Aneinanderabrollen zweier Umdrehungszylinder Ω $\left(\text{von } C, \text{ mit dem Radius } \frac{a}{2}\right)$ und Ω_1 (von C_1, mit dem Radius a), welche sich von innen stets entlang irgend einer Kante berühren, wenn hierbei ein Punkt (etwa O) der Peripherie des inneren Zylinders Ω auf einem schiefen (gegen die Zylinderachse unter dem Winkel ψ geneigten) Durchmesser des äußeren Zylinders Ω_1 (O auf $\underline{\Delta_1}$) zu bleiben

gezwungen wird und ein Gleiten der Zylinder an einander nur in der Richtung ihrer Erzeugenden gestattet wird.

Alle Punkte L der Peripherie von Ω beschreiben beim Darbouxschen Umschwunge in C_1 Ellipsen in Ebenen durch die Drehachse z_1 von Ω_1 und zwar die auf einer Erzeugenden Δ von Ω gelegenen gegen einander parallel verschobene Ellipsen; von all diesen sind *nur* die von Punkten der Kante Δ^0 (anfänglich auf z_1) beschriebenen zu (gleichlaufenden) *Durchmessern* Δ_1 der Ebene $y_1 z_1$ zusammengeschnürt. Außerdem bleiben allerdings auch die unendlich fernen Punkte aller zu z_1 senkrechten Geraden auf einem Strahle. In der inversen Auffassung ergibt sich:

Beim Mannheimschen Umschwunge hüllen alle Durchmesserebenen von Ω_1 Kanten Δ des Zylinders Ω ein, alle übrigen zu diesen, d. h. zur Zylinderachse parallelen Ebenen infolgedessen Kegel, die zu Zylindern um die betreffenden Kanten Δ von Ω als Umdrehungsachsen geworden sind. Diese Δ sind als die einzigen Zusammenschnürungen der Mannheimschen Hüllkegel (hier eben Hüllzylinder) anzusehen, analog wie bei der Darbouxschen Bewegung sich nur die zu $\underline{\Delta_1}$ parallelen Durchmesser Δ_1 der $y_1 z_1$-Ebene als Zusammenschnürungen von Ellipsen ergaben.

Die *zusammengeschnürten* $\begin{array}{l}\text{Ellipsen } \Delta_1 \\ \text{Hüllkegel } \Delta\end{array}$ des $\begin{array}{l}\text{Darbouxschen} \\ \text{Mannheimschen}\end{array}$ Umschwunges gehören als Bahnen zu den $\begin{array}{l}\text{Punkten} \\ \text{Ebenen}\end{array}$ der $\begin{array}{l}\text{als Kante } \Delta \\ \text{Achse}\end{array}$ des Zylinders $\begin{array}{l}\Omega \\ \Omega_1\text{, der anfänglich}\end{array}$ $\begin{array}{r}\text{auch} \\ \text{auf}\end{array}$ Δ^0 $\begin{array}{l}\text{genannten } z \\ \text{fallenden } z_1\end{array}$ / Achse.

Anm. Wie aus dem Abrollvorgang folgt, hat der oben (S. 162 Anm.) erwähnte Punkt $p_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ von den Kanten $\Delta_{0\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ und $\Delta^0_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, d. h. von den Geraden $Z_{(\vartheta=0)}$ (z_1-Achse) und $Z_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ genau die gleichen, nur um $\frac{\pi}{2}$ gedrehten Entfernungen, wie $p_{(\vartheta=0)}$ beziehungsweise von Δ_0 und Δ^0 (z_1-Achse); im Sinne der z_1-Achse gemessen, ist $p_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ um b höher als $p_{(\vartheta=0)}$.

Die Instantan-Schrauben des Umschwunges.

Denken wir uns ϑ als Zeit, so werden beim Darbouxschen Umschwunge in jedem durch ϑ fixierten Augenblicke alle Punkte p_ϑ des bewegten Körpers C um die auf dem Zylinder Ω_1 gelegene Achse

D_ϑ (in der Figur 2_D durch $L_{1(\vartheta=0)} = L_\vartheta$; $x_1 = a \cos\vartheta$, $y_1 = a \sin\vartheta$)

der instantanen Schraube Λ_ϑ mit dem Parameter, der „Steigung" (nach Zindler, s. dessen Liniengeometrie in der Sammlung Schubert, 1901)

$$\frac{dz_1}{d\vartheta} = b \cos\vartheta$$

und der Winkelgeschwindigkeit 1 geschraubt.

Bei der Mannheimschen Bewegung dagegen die Punkte $p_{1\vartheta}$ des Körpers C_1 um die auf Ω gelegene Achse

$$\Delta_\vartheta \text{ (durch } L_{(\vartheta=0)} = L_{1\vartheta};\quad x = a\cos^2\vartheta;\quad y = a\cos\vartheta\sin\vartheta)$$

der Instantanschraube $\Lambda_{1\vartheta}$ von der Steigung

$$\frac{dz}{d\vartheta} = -b\cos\vartheta.$$

Die *Geschwindigkeiten* $\left\{\begin{matrix}\left(\frac{dx_1}{d\vartheta}, \frac{dy_1}{d\vartheta}, \frac{dz_1}{d\vartheta}\right)\\ \left(\frac{dx}{d\vartheta}, \frac{dy}{d\vartheta}, \frac{dz}{d\vartheta}\right)\end{matrix}\right\}$ *aller* Punkte $\begin{matrix}p_\vartheta\\ p_{1\vartheta}\end{matrix}$ von $\begin{matrix}C\\ C_1\end{matrix}$

beim $\begin{matrix}\text{Darbouxschen}^{1)}\\ \text{Mannheimschen}\end{matrix}$ Umschwunge (auf den Tangenten ihrer Bahnlinien) in diesem Augenblick *sind* — als Ergänzungsstrecken der Nullblätter, der Graßmannschen äußeren Produkte $\left\{\begin{matrix}p_\vartheta \cdot \Lambda_\vartheta\\ p_{1\vartheta}\cdot \Lambda_{1\vartheta}\end{matrix}\right\}$ von $\left\{\begin{matrix}p_\vartheta\\ p_{1\vartheta}\end{matrix}\right\}$ bezüglich $\left\{\begin{matrix}\Lambda_\vartheta\\ \Lambda_{1\vartheta}\end{matrix}\right\}$ — *senkrecht zum Lote* aus dem betreffenden Punkte auf die Instantanachse $\left\{\begin{matrix}D_\vartheta\\ \Delta_\vartheta\end{matrix}\right\}$.

Alle *Punkte dieses Lotes* haben *Geschwindigkeitsstrecken*, welche auf Translationsstrahlen der augenblicklichen Schraubung liegen, also *die Regelschar* eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides mit der Instantanachse als der Scheitelgeraden unter dieser Schar und der Verteilungskonstante $\pm b\cos\vartheta$ erfüllen.

In jedem Augenblicke liegen also jene Punkte, deren Geschwindigkeitsrichtungen einen bestimmten beliebig anzugebenden Winkel χ mit der Achse $z_1(z)$ einschließen, auf einem Umdrehungszylinder um die Instantanachse, welcher den Radius

$$b\cos\vartheta\,\mathrm{tg}\,\chi$$

und dementsprechend beim $\begin{matrix}\text{Darbouxschen}\\ \text{Mannheimschen}\end{matrix}$ Umschwunge die Gleichung

$$\left\{\begin{matrix}(x_1 - a\cos\vartheta)^2 + (y_1 - a\sin\vartheta)^2 = b^2\cos^2\vartheta\,\mathrm{tg}^2\chi\\ (x - a\cos^2\vartheta)^2 + (y - a\cos\vartheta\sin\vartheta)^2 = b^2\cos^2\vartheta\,\mathrm{tg}^2\chi\end{matrix}\right\}$$

1) Vgl. S. 162.

hat.[1]) Jene Punkte $\overset{p_\vartheta}{p_{1\vartheta}}$ z. B., welche im Augenblick ϑ auf die $\overset{z_1}{z}$-Achse kommen, haben dort die gemäß

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg}\chi = \pm \frac{a}{b} \sec\vartheta \\ \operatorname{tg}\chi = \pm \frac{a}{b}, \text{ d. h. zuf. Gleichung (3)} = \pm \operatorname{tg}\psi,\ \chi \text{ konstant} = \pm\psi \end{array}\right\}$$

geneigten Geschwindigkeitsrichtungen. Daß beim Mannheimschen Umschwunge für die auf die z-Achse, z. B. nach O, gelangenden Punkte *stets* $\chi = \pm\psi$ bleibt, kann uns nicht wundern, da wir wissen, daß dort stets die schiefen Durchmesser $\varDelta_1$ von $\mathfrak{L}_1$ hindurchgehen, z. B. $\underline{\varDelta_1}$ durch den Anfang O unter stets ϑ gemäßer Drehung um die z-Achse, was wir bei unserem Nebenapparate (Figur 5) ausnützen werden.

Direkt nach der oben erwähnten Vorschrift zur Bewegung der Zylinder $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}_1$ ein kinematisches Modell zu bauen, wäre ebenso unbequem als überflüssig. Wir gründen vielmehr die Konstruktion bei unserem

Hauptapparat, Figur 3,

auf die Beobachtung, daß beim Darbouxschen Umschwunge, den wir jetzt bevorzugen,

1. Die Achse $\mathfrak{K}$ $\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0 \text{ für } \vartheta = 0\right)$ des Zylinders $\mathfrak{L}$ den *Umdrehungszylinder* $\underline{\mathfrak{R}}$ $\left(x_1^2 + y_1^2 = \frac{a^2}{4}\right)$ um die z_1-Achse mit dem Radius $\frac{a}{2}$ beschreibt, wobei die Bahn z. B. ihres Punktes $N\left(\frac{a}{2},\ 0,\ 0 \text{ für } \vartheta = 0\right)$ die Ellipse $\mathfrak{N}\left(x_1 = \frac{a}{2}\cos\vartheta,\ y_1 = \frac{a}{2}\sin\vartheta,\right.$ $\left.z_1 = b\sin\vartheta \text{ zufolge den Gleichungen } (1_D)\right)$ ist und

2. alle Punkte einer zu $\mathfrak{K}$ parallelen Geraden $K\left(x = \frac{a^2+b^2}{2a} = \varrho,\right.$ $\left.y = 0 \text{ für } \vartheta = 0\right)$, gelegen in der Durchmesserebene $\varDelta^0\varDelta_0$ von $\mathfrak{L}$, *Kreise* zeichnen, z. B. der Punkt $R\left(\frac{a^2+b^2}{2a} = \varrho,\ 0,\ 0 \text{ für } \vartheta = 0\right)$, welcher auf dem Durchmesser OA von $\mathfrak{L}$ unter dem Abstande ϱ von

---

1) Von der Richtigkeit dieser Angaben z. B. beim Darbouxschen Umschwunge kann man sich auch direkt aus $\operatorname{tg}^2\chi = \frac{\left(\frac{dx_1}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{d\vartheta}\right)^2}{\left(\frac{dz}{d\vartheta}\right)^2}$ überzeugen, wenn man die Gleichungen (1) berücksichtigt.



O liegt, nach den Gleichungen (1_D) den Kreis $\mathfrak{R}\left(x_1 = \frac{a^2+b^2}{2a}\cos\vartheta,\right.$ $\left.y_1 = \frac{a^2-b^2}{2a}\sin\vartheta,\ z_1 = b\sin\vartheta\right)$ mit dem Radius

$$\varrho = \frac{a^2+b^2}{2a}. \tag{4}$$

Wir haben gerade den Umdrehungszylinder $\underline{\mathfrak{R}}$ und die Kreisbahn $\mathfrak{R}$ aufgesucht, weil Führungen im Kreise am leichtesten mechanisch anzubringen sind. In die Figur 3, wo die $y_1 z_1$-Ebene durch O_1 als Zeichenebene gewählt ist, so daß wir die x_1-Achse durch O_1 zu ihr senkrecht denken müssen, haben wir alle Bestandteile nicht in ihrer Stellung für $\vartheta = 0$, sondern für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ eingetragen, da sie dann in dieser Ebene zu finden sind: Der Punkt $N_{\left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)}\left(0, \frac{a}{2}, b\right)$, kurz $N_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ genannt, und mit ihm die Achse $\mathfrak{R}_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ des Zylinders $\Omega_{\left(\vartheta=\frac{\pi}{2}\right)}$; ebenso der Punkt $R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left(0, \frac{a^2-b^2}{2a} = -(\varrho - a), b\right)$ und mit ihm K. Vgl. die Figur (2_D) mit der Figur 3, wo $b = a\sqrt{2}$ gewählt wurde.

Ein bestimmtes Verhältnis von a und b für die Figur 3 anzunehmen war nötig. Wir wollten nicht den Grenzfall I des mittleren Umschwunges ($b = a$, vgl. S. 156) annehmen, da er sich durch Spezialisierung ohnedies ergibt; auch wollten wir nicht gleich an erster Stelle einen flachen Umschwung II′ ($b < a$), weil wir für sehr flache Umschwungsformen ohnedies später einen Nebenapparat (Figur 5) anzugeben haben; so ergab sich die Wahl eines steilen Umschwunges II für die Figur 3. Entsprechend $b = a\sqrt{2}$ ist dort $\varrho = \frac{3}{2}a$.

Der Winkel φ der Ebene $\left(y_1 = z_1 \frac{a^2-b^2}{2ab}\right)$ des von R beschriebenen Kreises mit der xz-Ebene ist durch

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a^2-b^2}{2ab} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) \tag{5}$$

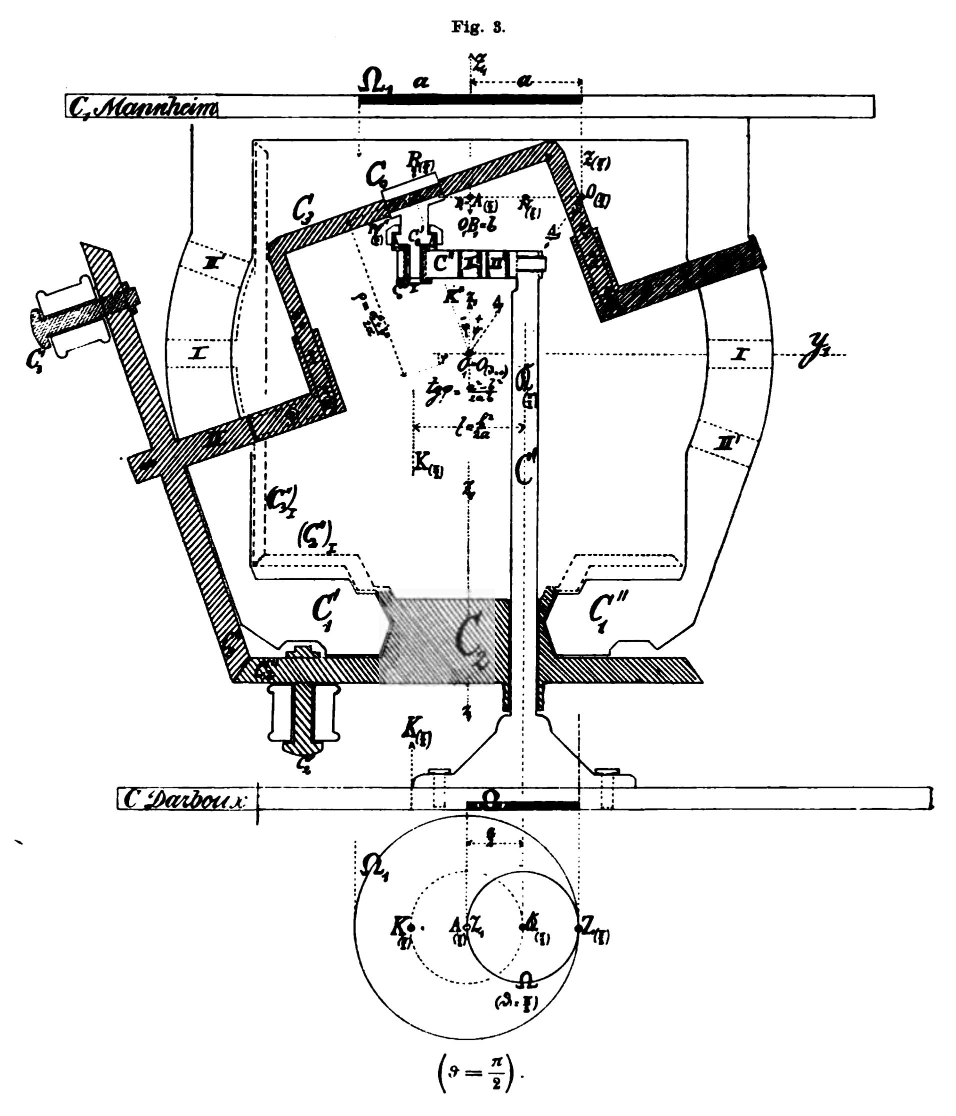
bestimmt; sein negatives Zeichen beim steilen Umschwunge steht damit in Zusammenhang, daß die Ebenenspur in der Zeichnung von der dort ersichtlichen Geraden $\underline{\Delta_1}$ (Schnürellipse, Bahn von O) durch die z_1-Achse getrennt ist.

Dies ist beim flachen Umschwunge keineswegs der Fall, während beim mittleren R mit A, die Kreisbahn von R mit dem sich für $b = a$ ergebenden Kreise $\mathfrak{A}$ (S. 162) zusammenfällt, so daß die Kreisebenenspur zur z_1-Achse selbst, φ aber zu Null wird.

φ behält die Größe und ändert nur das Zeichen beim Übergange zu einem flachen Umschwunge mit dem reziproken Verhältnisse der Konstanten a und b. In der Figur 3 ist gemäß $b = a\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{4}\sqrt{2}$ und $\sin\varphi = -\frac{1}{3}$.

Wir geben unserem Apparate die Gestalt eines Doppeltischchens mit den zwei parallelen Tischplatten, oben C_1, unten C, um ihn bequem auf den ersteren oder den letzteren Körper stellen zu können, je nach-

Fig. 3.



$\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$.

dem die **Darbouxsche** Bewegung von C oder die **Mannheimsche** von C_1 vollführt werden soll. Bei der Beschreibung des Hauptapparates bevorzugen wir die erstere Auffassung.

Um vor allem der obigen Forderung (1) (S. 167) zu genügen, stecken wir an C die zylindrische Laufstange C' — mit der Achse $\mathfrak{K}$

— fest, welche in einer entsprechenden glatten Bohrung der *Trommel* C_2 sich um $\mathfrak{K}$ drehen und längs $\mathfrak{K}$ verschieben kann, während diese die Stange C' muffartig umschließende Trommel C_2 selbst ein Körper in Form eines Doppelkegels um die z_1-Achse ist. Diesen betten wir in einem *Doppelkonuslager von* C_1 — genauer gesagt, in den von C_1 herabhängenden Seitenstücken $C_1' C_1''$, die unten den Doppelkegel der Trommel ringförmig umschließen — derart ein, daß er seinerseits sich gegen $C_1(C_1' C_1'')$ ausschließlich um die im Parallelabstand $\frac{a}{2}$ von $\mathfrak{K}$ befindliche Trommelachse z_1 drehen kann. Bisher hätte $C(C')$ gegen C_1 den Freiheitsgrad III durch Vermittlung der dazwischen gelagerten Trommel C_2 allein; *der Geraden* $\mathfrak{K}$ aber ist unbeschadet der noch anbringlichen Einschränkungen die *Bewegung auf dem Zylinder* $\underline{\mathfrak{R}}$ um die z_1-Achse mit dem Radius $\frac{a}{2}$ (Exzentrizität der Trommelbohrung) *gesichert.*

Um noch der Forderung (2) gerecht zu werden, bringen wir an der Stange C' in einem Abstande von der Platte C, welcher $2b$ um mehr als die (in der z_1-Richtung gemessene) Trommelhöhe übersteigt, einen Seitenarm C'' an, welcher bis zu einem Punkte R von K reichen, sich also in einem der Entfernung von $\mathfrak{K}$ bis K, der sog.

$$\text{(6)} \qquad \text{Armlänge } l = NR = \varrho - \frac{a}{2} = \frac{b^2}{2a}$$

entsprechenden Maße in der zu $\mathfrak{K}$ senkrechten Richtung seitwärts ausstrecken muß.

{In der Figur 3 ist gemäß $b = a\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{3}{2}a$ und $l = a$.}

Wenn wir nun den von $\mathfrak{K}$ um die Armlänge $l = \frac{b^2}{2a}$ abstehenden Punkt R des Armes C'' mit Hilfe einer *Kurbel* C_3 um den Mittelpunkt O_1 auf einer Kreisbahn mit dem Radius $\varrho = \frac{a^2 + b^2}{2a}$ in der Ebene $y_1 = z_1 \operatorname{tg} \varphi$ herumführen, wobei $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 - b^2}{2ab}$ genommen werden muß, so ist C gegen C_1 zwangläufig im Darbouxschen Umschwung beweglich gemacht.

Es ist nützlich, von der in der Figur 3 dargestellten Lage $\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$ aus die Stellungen des Armes NR (auf der Geraden OA, $ONAR$ sind mit $[C'' C' C]$ starr verbunden zu denken) an der Hand der Figur 2_D durch die Zwischenlagen bis zur Stellung $\vartheta = 0$ zurückzuverfolgen.

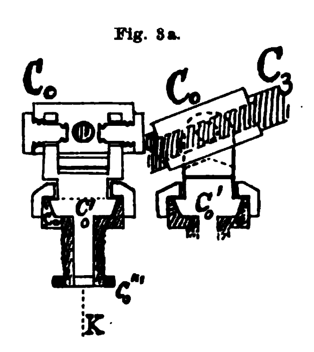
Die Trommel C_2 dreht sich um denselben Winkel ϑ um die z_1-Achse wie die den Punkt R in Kreisbahn führende Kurbel C_3, wenn letztere etwa beim Knopfe C_3' gefaßt und in ihren bei II in C_1' und C_1'

angebrachten Lagern gedreht wird; deshalb kann man diese Körper C_2 und C_3 mit entsprechenden konischen Friktions- oder besser *Zahnrädern* C_2' bzw. C_3' versehen, welche an- bzw. ineinandergreifen und die Brauchbarkeit des Apparates auch bei erheblicher Reibung an den Gleitflächen verläßlich wahren, was bei derartigen kinematischen Modellen sehr in Betracht kommt. Statt C_3 kann man auch die Trommel C_2 etwa beim Knopfe C_2' fassen und drehen.

Die Kreisführung des Punktes R durch die Kurbel C_3 könnte durch ein Kugelgelenk um den Punkt R (am Arme C'') als Gelenkkopf geleistet werden, wenn eine mit der Kurbel C_3 verbundene und R passend umschließende Gelenkpfanne im Kreise $\mathfrak{R}$ mitgeführt würde. Da aber diese Pfanne, damit sich der Apparat während der ganzen Periode und deren Wiederholungen nicht spreize, doch um die in der Figur 3 angedeutete Achse c drehbar an C_3 gelagert werden müßte, was doch schließlich auf die Einfügung eines Hilfskörpers C_0 zwischen $C''(C'C)$ und C_3 hinauskäme, wählen wir diesen vermittelnden Körper lieber als schiefen

Cardanischen Kreuzkörper C_0,

Fig. 3a.



wie ihn etwa die Figur 3a von verschiedenen Seiten darstellt, d. h. als Körper in Spulenform, dem erstens eine in ihm angebrachte zylindrische Bohrung, welche c umschließt und enger als der benachbarte Teil von C_3 ist (um ein Gleiten in der Richtung von c zu verwehren) die Drehung um die Achse c gestattet, während zweitens der konische Teil C_0' von C_0 im Seitenarme C'' (C'' ist fest an C' und C!) derart eingelagert wird, daß dem Kreuzkörper C_0 (sammt C_0') auch gegen C'' die Drehung um die Achse K ermöglicht wird, aber keine andere Bewegung.

Nebenstellungen.

Für die in der Figur 3 gezeichnete Stellung des Apparates für einen *steilen* Darbouxschen Umschwung

$$\text{(II)} \qquad \left(b = a\sqrt{2}, \quad \varrho = \tfrac{3}{4}a, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\tfrac{1}{4}\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = -\tfrac{1}{3}, \quad l = a\right)$$

würde es genügen, den konischen Ansatz C_0' starr mit C_0 verbunden zu lassen; um aber mit demselben Apparate auch einen *mittleren* Umschwung

$$\text{(I)} \qquad \left(b = a = \varrho, \quad \varphi = 0, \quad l = \frac{a}{2}\right),$$

ja auch noch einen *flachen* in einem Beispiele veranschaulichen zu können, etwa

(II') $\left(b = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad \varrho = \frac{3}{4}a, \quad \operatorname{tg}\varphi = +\frac{1}{4}\sqrt{2}, \quad \sin\varphi = +\frac{1}{3}, \quad l = \frac{a}{4}, \right.$
aus a und b zufolge Gleichung (4), (5), (6))

kann man C_0' (Figur 3 und 3a) von C_0 abtrennen und mit Seitenbacken versehen, welche in entsprechenden Ausnehmungen an der Spule C_0 eingelegt und durch zwei seitliche Schrauben in verschiedenen Stellungen befestigt werden können. Diese Ausnehmungen sind derart erweitert zu denken, daß C_0' an C_0 auch in den für I und II' passenden Lagen festgeschraubt werden kann. Die erstere hiervon ist in der Figur 3a links dargestellt, wo c senkrecht zur Zeichenebene zu denken ist.

Damit auch die Einstellung der übrigen Bestandteile des Apparates für I und II' ausgeführt werden könne, versehe man den Konus C_0' mit einer ihn unmittelbar umfassenden Hülse C_0'', welche samt dem in ihr steckenden Kreuzkörper auch (statt bei II) an den mit I bzw. II' bezeichneten Stellen des Seitenarmes C'' eingeschraubt und dort durch die Gegenmutter C''' befestigt werden kann, falls man nicht C'' selbst in verschiedenen Lagen an C' anschraubbar gestalten will.

Der Kurbelkörper C_3 muß bei diesen beiden Nebenstellungen I und II' aus den mit II bezeichneten Lagern an C_1' und C_1'' herausgenommen und in die Nebenlager I und II' daselbst eingelegt werden (Letzteres Lagerpaar, II', könnte wohl durch Annahme einer um π gedrehten Trommelstellung in der Anfangslage überflüssig gemacht werden, wir tun dies aber der Übersichtlichkeit wegen nicht.)

Ferner ist es für diese Nebenstellungen nötig, auch die Länge ϱ, die Entfernung der Spulachse c von O_1, anders einstellen zu können. Zu diesem Behufe braucht nur der Π-förmige Teil der Kurbel C_3 als in verschiedenen Lagen gegen den übrigen Kurbelkörper einschiebbar konstruiert zu werden, so daß die mit I, bzw. II' bezeichneten Punkte des Π-förmigen Kurbelteiles an die dort mit II bezeichnete Stelle rücken, wo man sie am übrigen Kurbelkörper festzuschrauben hat.

Auch sind bei den Nebenstellungen andere Zahnräder statt C_2' und C_3' zu verwenden. Bei I, wo die obigen Räder außer Wirksamkeit gesetzt sind, aber belassen werden können, wären als eigentlich wirksame Zahnräder $(C_2'')_{\mathrm{I}}$ und $(C_3)_{\mathrm{I}}''$ — in der Figur 3 durch gestrichelte Linien angedeutet — anzubringen. Bei II', wo die obere Platte von C_1 etwas emporrücken mußte, was wir der Raumersparnis wegen in der Figur unterließen, würden allerdings die statt C_2'' und C_3'' anzubringenden Räder etwas groß geraten; es könnten aber die alten dennoch belassen werden, falls man etwa an C_1' zwei neue konische Hilfsrädchen passend einfügen wollte.

Der Hauptapparat für andere Werte von a, bei der gleichen Konstanten b.

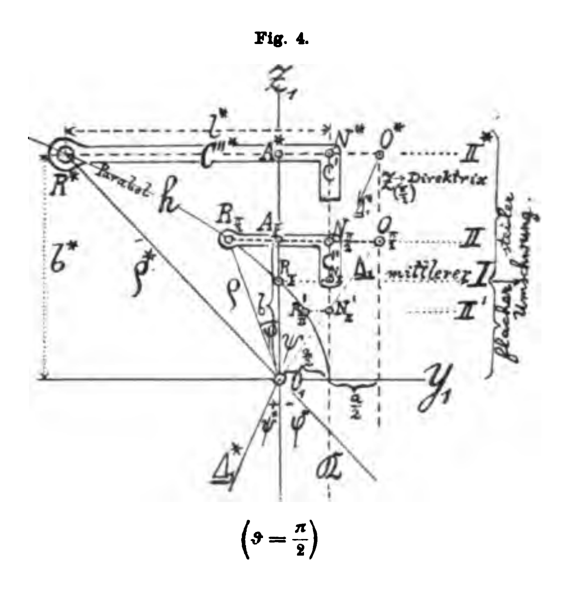
Für *sehr* flache Umschwungsbewegungen (b klein) versagt unser Konstruktionsprinzip, da die Armlänge $l = \frac{b^2}{2a}$ zu klein wird; deshalb werden wir später unsern Nebenapparat (Figur 5) nach einem anderen Plane aufbauen.[1]) Vorher wollen wir aber noch die Veränderungen

1) Den Ersatz für $a = 0$ haben wir schon S. 157 als „Muff am Stift mit Nagel in Ellipsenführung" angegeben.



von l, ϱ und φ auch graphisch verfolgen, welche bei demselben a, d. h. bei gleicher Exzentrizität der Trommel C_2 unseres Hauptapparates die *Annahme eines geänderten Wertes* b^* *statt* b im Gefolge hat und so den geometrischen Inhalt der Formeln (3) bis (6) überblicken; deshalb legen wir unsere Figur 4 an, welche die verschiedenen, aber stets für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ genommenen Stellungen $N^* R^*$ des Seitenarmes $N_{\left(\frac{\pi}{2}\right)} R_{\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ (von der Länge l, auf dem Seitenarme C'' der Stange C' gedacht) bei anderen Werten b^* von b angibt.

Fig. 4.



$\left(\vartheta = \frac{\pi}{2}\right)$

Auch für unsere obigen Nebenstellungen I und II′ sollen die entsprechenden Armlagen NR eingezeichnet werden.

Diese gegen die Figur 3 im halben Maßstabe gehaltene Figur 4 ist einfach, da hierbei $N_{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{a}{2}, b\right)$ auf der Parallelen $\mathfrak{K}\left(y_1 = \frac{a}{2}\right)$ zur z_1-Achse, $R_{\frac{\pi}{2}}$ aber auf einer Parabel $h\left(l = \frac{b^2}{2a}\right)$ mit dem Brennpunkte O_1 und der Scheiteltangente $\mathfrak{K}\left(y_1 = \frac{a}{2}\right)$, der Direktrix $Z_{\frac{\pi}{2}}$ (Ort der in Geraden zu führenden Punkte $O_{\frac{\pi}{2}}$, $y_1 = a$) bleibt. $A_{\frac{\pi}{2}}$ rückt mit wachsendem Werte von b auf der z_1-Achse empor.

Für jeden beliebigen Wert b^* von b haben wir bei konstantem a, d. h. mit Beibehaltung der Trommel C_2 — von der Exzentrizität $\frac{a}{2}$ — den Hauptapparat derart aufzubauen:

Wenn wir die — nötigenfalls zu verlängernde — Stange C' (welche wir uns der Einfachheit wegen jetzt als bis zum Punkte $N_{\frac{\pi}{2}}$ reichend vorstellen wollen, so daß der Seitenarm C'' dort rechtwinkelig nach $R_{\frac{\pi}{2}}$ hin abbiegt) in der Trommelbohrung so weit emporschieben,

daß $N_{\frac{\pi}{2}}$ nach N^* gelangt, wo N^* über y_1 um die gewünschte Konstante b^* emporragt, haben wir den Seitenarm C''^* stets *bis zum Punkte* R^* *der Parabel* h rechtwinkelig von C' abbiegen zu lassen: $l^* = \frac{b^{*2}}{aa}$. Führen wir nun R^* im Kreise um O_1 in der zur Zeichenebene senkrechten durch $O_1 R^*$ gelegten Ebene, so führt C (mit C', woran C unten angebracht ist, und mit C'') — unter schon erzwungener zum selben Winkel ϑ gehöriger Zwangsdrehung der Trommel[1]), in deren Bohrung sich C' unter Drehung auch hebt oder senkt — einen zu den Konstanten a, b^* gehörigen Darbouxschen Umschwung aus. Der Leitstrahl $O_1 R^*$ der Parabel erhält nämlich hierbei die ihm zukommende Länge

$$\varrho^* = \frac{a}{2} + \frac{b^{*2}}{2a} = \frac{a^2 + b^{*2}}{2a},$$

und er schließt mit der z_1-Achse den gehörigen Winkel φ^* ein, dessen

$$\operatorname{tg} \varphi^* = \frac{a - \varrho^*}{b^*} = \frac{a^2 - b^{*2}}{2ab^*}$$

ist. Der Punkt O^*, wo der — in der Figur nach rechts über N^* hinaus verlängert gedachte — Arm C'' die Direktrix der Parabel h trifft, ist die extreme Lage O^* des (für $\vartheta = 0$ mit O_1 zusammenfallenden) Punktes O auf seiner geraden Bahn $\underline{\Delta_1^*}$, welche mit der z_1-Achse den Winkel ψ^* einschließt, dessen

$$\operatorname{tg} \psi^* = \frac{b^*}{a}$$

ist.

A^* ist jener Punkt des Armes, welcher die Ellipse $\mathfrak{A}^*$ um O_1 in der $x_1 z_1$-Ebene mit den Halbachsen a, b^* zeichnet.

Jedem Falle II entspricht ein Fall II′ mit entgegengesetzt gleichem φ und dem umgekehrten Verhältnisse der Konstanten a und b. Für II* (a, b^*) wurde der so zugeordnete Umschwung II*′ $\left(a, b^{*\prime} = \frac{a^2}{b^*}\right)$ wegen Raummangel in der Figur 4 nicht angedeutet.

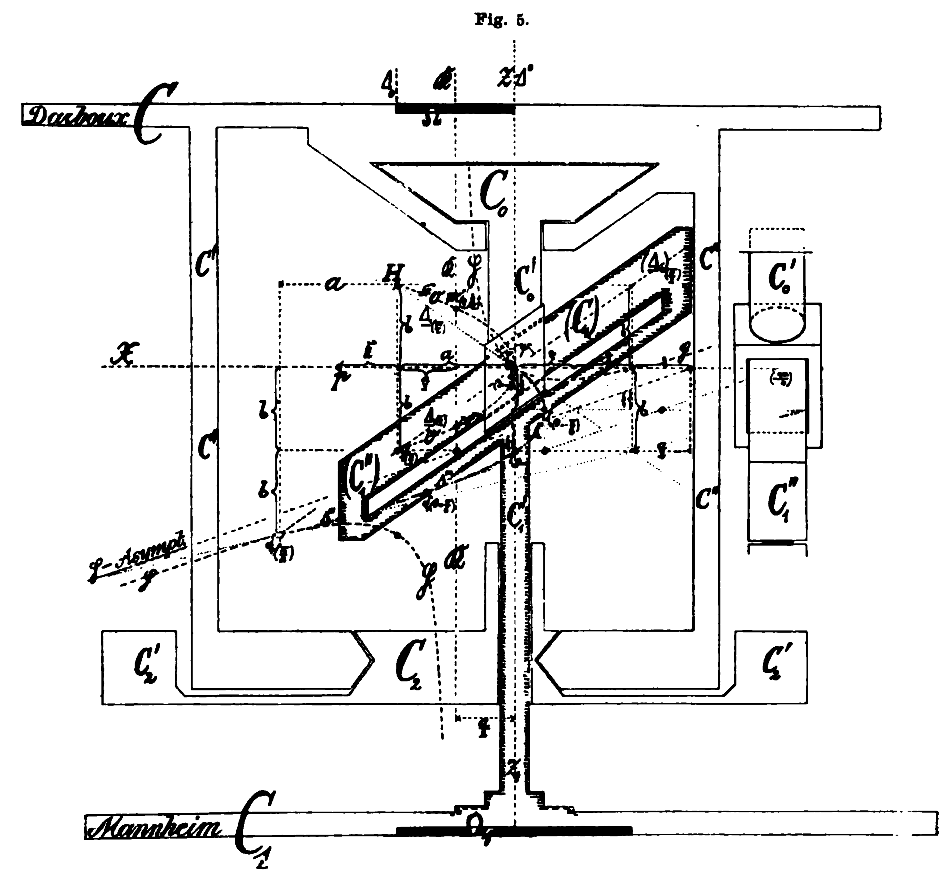
1) Trotzdem der Zwanglauf auch ohne die Zahnräder theoretisch gegeben ist, wäre es der Reibung wegen nicht rätlich, einen Apparat ohne diese oder ein Äquivalent, z. B. nachhelfenden Trommeltrieb durch Transmissionsriemen vom Kurbelkörper her zu bauen.

Der Nebenapparat (Figur 5),

vorgeführt bei Darstellung des Mannheimschen Umschwunges.

Schon oben (S. 165) haben wir die Analogie der Rolle der Geraden Δ_1 — in der $y_1 z_1$-Ebene (u_1) unter dem Winkel $\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ gegen die z_1-Achse — beim Darbouxschen und der Kanten Δ des

Fig. 5.



Zylinders Ω beim Mannheimschen Umschwunge hervorgehoben. Die $\infty^2 \left\{\begin{matrix}\text{Punkte der Kanten } \Delta \text{ des Zylinders } \Omega \\ \text{Ebenen durch die Geraden } \Delta_1\ (av_1 + bw_1 = 0)\end{matrix}\right\}$ gehören beim $\left\{\begin{matrix}\text{Darbouxschen} \\ \text{Mannheimschen}\end{matrix}\right\}$ Umschwunge zu nur $\infty^1 \left\{\begin{matrix}\text{Ellipsenebenen } \Pi_1 \\ \text{Kegelscheiteln } p\end{matrix}\right\}$, da $\left\{\begin{matrix}\text{jeder} \\ \text{jede}\end{matrix}\right\}$ der $\infty^1 \left\{\begin{matrix}\text{Punkte} \\ \text{Ebenen}\end{matrix}\right\}$ einer solchen Geraden $\left\{\begin{matrix}\Delta \text{ die Ellipse einer} \\ \Delta_1 \text{ einen Kegel mit einem}\end{matrix}\right\}$ einzigen $\left\{\begin{matrix}\text{Durchmesserebene von } \Omega \\ \text{Scheitel auf der } z\text{-Achse } (\Delta^0 \text{ von } \Omega)\end{matrix}\right\}$ beschreibt.

O z. B. ist der gemeinsame Scheitel aller Mannheimschen Hüllkegel der durch $\underline{\Delta_1}$ gelegten Ebenen; diese Kegel durch O haben alle die gleiche Drehachse Δ^0 (z-Achse) und unterscheiden sich nur durch den Winkel ihrer Tangentialebenen mit dieser Achse, welcher alle Werte zwischen ψ — für die durch Δ_1 zur Ebene u_1 der Anfangslage senkrechten Ebenen — bis zu Null — für die durch Δ_1 gehende Ebene u_1 selbst — annimmt; bei dieser letzteren Lage ist der Kegel zu Δ^0 selbst zusammengeschnürt.

Zur Übersicht der Lagen des bei dem Mannheimschen Umschwunge mit C_1 beweglichen rechtwinkeligen Koordinatentrieders $O_1(x_1 y_1 z_1)$ gegen das feste System $O(xyz)$ in C (Figur 2_M) und damit zum Verständnisse des Konstruktionsprinzipes beim Nebenapparate beachten wir, daß

1) die z_1-Achse — anfänglich, für $\vartheta = 0$, auf der z-Achse Δ^0 — auf dem durch Δ^0 gehenden Umdrehungszylinder Ω herumgeführt wird, und zwar derart, daß der Winkel der durchgelegten $y_1 z_1$-Ebene (u_1) mit der yz-Ebene (u) eben ϑ ist und daß

2) die Gerade $\underline{\Delta_1}$ von u_1, welche die z_1-Achse unter dem Winkel ψ schneidet, hierbei stets durch O geht, daher auf dem so bestimmten Kegel $O(\underline{\Delta_1})$ bleibt.

Die $y_1 z_1$-Ebene (u_1) umhüllt Δ_0 $(x = y = 0)$, die $x_1 z_1$-Ebene (v_1) die ihr auf Ω diametral gegenüberliegende Kante Δ_0 $(x = a,\ y = 0)$, daher die übrigen durch z_1 gelegten Ebenen, wie nötig, andere Kanten Δ des Zylinders Ω.

Haben wir in der Figur (2_M) erst die Bahnkurve von O_1 kennen gelernt, so ist für jede, einem beliebigen ϑ entsprechende Lage $O_{1(\vartheta)}$ des Anfanges das zugehörige Trieder $x_{1(\vartheta)} y_{1(\vartheta)} z_{1(\vartheta)}$ bestimmt:

Die Achse $z_{1(\vartheta)}$ ist die durch $O_{1(\vartheta)}$ gehende Kante Δ von Ω, während dann der (Ω umfassende) Zylinder Ω_1 von C_1 gerade entlang der diametral gegenüberliegenden Kante Δ_ϑ den Zylinder Ω berührt; $y_{1(\vartheta)}$ wird das von $O_{1(\vartheta)}$ auf die Kante Δ^0 und $x_{1(\vartheta)}$ das auf Δ_0 gefällte Lot.

Die Bahn des Anfanges O_1 (Figur 2_M)

wollen wir deshalb gleich hier untersuchen, während wir uns die Besprechung der Bahnen aller übrigen Punkte bei der Mannheimschen Bewegung für später vorbehalten. Sie ist die zufolge den Gleichungen (1_M) durch

$$\text{(7)} \qquad \begin{cases} x = a \sin^2 \vartheta \\ y = -a \sin \vartheta \cos \vartheta \\ z = -b \sin \vartheta \end{cases}$$

gekennzeichnete Durchdringung des Umdrehunszylinders $\mathfrak{Q}$ mit dem Umdrehungskegel $O(\underline{\varDelta}_1)$, dessen Drehachse die Kante $\varDelta^0$ von $\mathfrak{Q}$, und dessen Kanten $\underline{\varDelta}_{1(\vartheta)}$ mit $\varDelta^0$ den Winkel ψ einschließen. Sie ist rational von der 4. Ordnung, geht durch die Kreispunkte IJ der xy-Ebene und hat dort die Verbindungsgeraden dieser Punkte mit dem unendlich fernen Punkte der z-Achse zu Tangenten, während die zugehörigen Schmiegungsebenen durch die Achse $\mathfrak{K}$ $\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$ des Zylinders $\mathfrak{Q}$ gehen; sie berührt hiernach die unendlich ferne Ebene doppelt, in I und J, woraus folgt, daß alle Parallelprojektionen von ihr auf die durch IJ gehenden Ebenen, d. h. auf die Kreisschnittebenen von $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_1$ wie die xy-Ebene, die *unendlich ferne Gerade* dieser Ebene in *deren Kreispunkten*, also doppelt berühren.

Sie hat die Gestalt einer bezüglich der xy- und xz-Ebene, also auch der x-Achse selbst, symmetrischen „gleichteiligen Doppelschleife“[1]) und besitzt im Anfange

$$O = O_{1(\vartheta=0)} = O_{1(\vartheta=\pi)}$$

einen Doppelpunkt mit den Tangenten

(8) $\underline{\varDelta}_{1(\vartheta=0)}(x = 0,\ by - az = 0)$ und $\underline{\varDelta}_{1(\vartheta=\pi)}(x = 0,\ by + az = 0)$

Im Sinne der z-Achse gemessen, hat sie ihren höchsten Punkt H in $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ $(a,\ 0,\ b)$, ihren tiefsten Punkt in $O_{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ $(a,\ 0,\ -b)$, wo die Tangenten zur y-Achse parallel laufen; sie ist leicht durch ein Drahtmodell zu versinnlichen, da sie mit der Zylinderfläche $\mathfrak{Q}$ in eine Ebene abgewickelt, dort die in der Figur 6 angedeutete Gestalt einer halben

1) Cayleys charakteristische Zahlen für diesen Kurventypus 4. Ordnung, rational von der I. Spezies (vgl. Pascal II S. 225, 255) sind:

$r = 6$	
$n = 4$	$m = 6$
$h = 2$	$g = 6$
$y = 4$	$z = 6$
$\beta = 0$	$\alpha = 4$
$H = 1$	$G = 0$
$v = 0 = \omega$	
$\lambda = 0$	$\lambda' = 0$

also *dual* zu jenen der als Ebenenhüllbahn beim Darbouxschen Umschwunge auftretenden „Raumastrois“ vgl. S. 197, 198, wo auch die Bedeutung dieser Symbole angegeben ist.

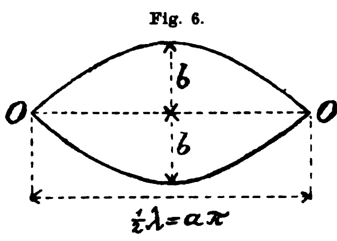
Sinuswelle von der Amplitude b und der Länge $\frac{\lambda}{2} = a\pi$ samt dem symmetrischen halben Wellenzuge zeigt.

Ihre Projektion auf die xy-Ebene ist der doppelt zu zählende Kreis Ω' von Ω $(x^2 + y^2 = ax)$,

Ihre Projektion auf die xz-Ebene ist die gewöhnliche Parabel $\mathfrak{D}$ $\left(z^2 = \frac{b^2}{a} x\right)$ mit dem Brennpunktsabstand $l = \frac{b^2}{2a}$ (Gleichung 6) von der Direktrix,

Ihre Projektion auf die yz-Ebene ist hingegen eine durch die beiden letzten Gleichungen von (7) oder durch $(b^2 - z^2)z^2 = \frac{b^4}{a^2}y^2$ dargestellte virtuelle Parabel Sluses $\mathfrak{S}$; vgl. in Gino Lorias „Ebene Kurven" (Leipzig 1902) 1. Bd. S. 174 (Gleichungen 6, 6′ u. d. folg.) und die Figur 37 der dortigen Tafel V, welche ein affines (sich übrigens auch für $b = a$ selbst als Projektion ergebendes) Bild zeigt, nämlich eine der virtuellen Parabeln (ebenda S. 173 Gleichung 5) des Paters Gregorius a Sancto Vincentio, in Pascals „Repertorium der höheren Mathematik" (Leipzig 1902) II, S. 535 als Lemniskate Geronos angeführt. In der Figur (2_M) sind die 3 Projektionen eines Punktes G angedeutet. Man verfolge die Bahnlinie von O über $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ nach O und über HG weiter, wieder nach O zurück.

Fig. 6.



Netz der gleichteiligen Doppelschleife.

Unsere gleichteilige Doppelschleife ist auch die *Fußpunktskurve* des Punktes $p\left(\frac{a^2 + b^2}{a}, 0, 0\right)$ bezüglich der Kanten $\underline{\Delta_1}$ des Umdrehungskegels $O(\Delta_1)$, d. h. sie ist der Ort der Fußpunkte aller aus p auf diese Kanten gefällten Lote, wie man direkt aus (7) ablesen oder auch daraus erkennen kann, daß beim Mannheimschen Umschwunge die durch O_1 gelegte Normalebene Π_1 zu $\underline{\Delta_1}$ einen Umdrehungskegel mit diesem Punkte p als Scheitel einhüllt. Aus der Fußpunktskurveneigenschaft folgt auch, daß unsere Anfangsbahn *sphärisch*, nämlich auf der über Op als Durchmesser bestimmten Kugel gelegen ist.

Andere *Projektionen* der von O_1 durchlaufenen gleichteiligen *Doppelschleife.*

Von den Schattenkurven unsere Schleife auf die xy-Ebene sind jene besonders bemerkenswert, welche bei einer zu den Kanten des Kegels $O(\underline{\Delta_1})$ parallelen Strahlenrichtung gewonnen werden, d. h. wenn

die Lichtstrahlen unter $\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ gegen die z-Achse geneigt sind; es fällt dann mit dem Schatten des Doppelpunktes O der eines anderen Punktes zusammen, während überdies die unendlich ferne Gerade von der Schattenlinie in den Kreispunkten IJ berührt wird; wie wir schon oben bemerkten, und die Projektion ist ein schiefes Dreiblatt.

[Vgl. G. Loria, Ebene Kurven I. Bd. Figur 31 der Tafel IV, wo Ω' als Kreis PRD, die Richtung des Schattens der z-Achse als jene von r anzusehen ist; sowie die dort auf S. 156 angegebene Konstruktion und Gleichung.[1])]

Sind die Lichtstrahlen hierbei insbesondere zu einer der beiden in die xz-Ebene fallenden Kanten dieses Kegels parallel $\left(\text{zu } \underline{\Delta}_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)} = O O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right.$ unserer Figur (2_M) oder zu $\left.\underline{\Delta}_{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = O O_{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = OH\right)$, so ist der Schatten in der xy-Ebene ein

gerades Dreiblatt [G. Loria, Figur 32 der Tafel IV und S. 157].

Dieser Schatten wird andererseits bei Strahlen, welche zu den Doppelpunktstangenten $\Delta_{1(0)}$ oder $\Delta_{1(\pi)}$ (Gleichung 8), den in die yz-Ebene fallenden Kegelkanten, parallel sind, ein

gerades Zweiblatt [G. Loria, Figur 34 der Tafel V und S. 159].

Alle übrigen Parallelprojektionen auf die xy-Ebene könnte man durch Abänderung der von G. Loria S. 156 gemäß der Longchampschen Definition für das schiefe Dreiblatt gegebenen Konstruktion erhalten, indem man in der zugehörigen Figur 31 RM und RM' nicht gleich, sondern nur proportional zu PR von R aus in der Richtung r abtragen würde. — In unserer Figur (2_M) ist das Bahnbild analog unter Benutzung der Projektionsellipse von Ω', statt dieses Kreises selbst, bestimmbar; es zeigt außer dem in O befindlichen noch zwei Doppelpunkte. —

Die Schatten der Tangenten im „wahren" Doppelpunkte O auf die xy-Ebene bleiben zu einander *senkrecht*, wenn die Doppelschleife aus einem Punkte des Umdrehungskegels $O(\Delta_1)$ projiziert wird, welcher über den Tangenten (8) in O als diametral gegenüberliegenden Kanten ausgespannt ist. Es gilt dies also sowohl bei den obigen mit dem dreifachen Punkte versehenen „Blättern" als auch bei den Schattenkurven 3. Ordnung, welche bei Zentralbeleuchtung aus

1) Links fehlt dort der Potenzexponent 2 infolge eines Druckfehlers.

irgend einem Punkte G der Raumkurve selbst geworfen werden. Diese sind

schiefe Strophoiden von Quetelet

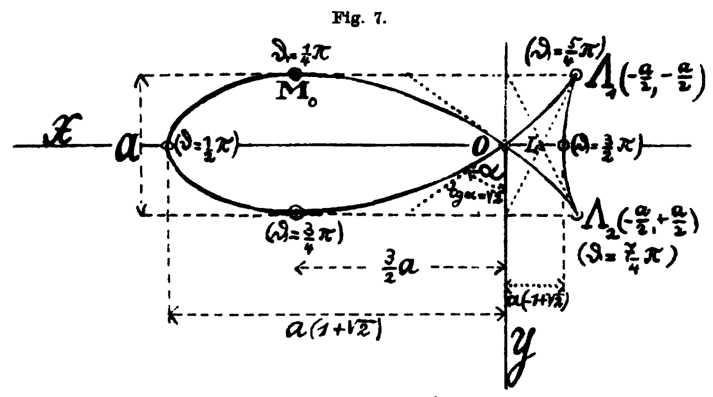
[Fokalen, vgl. G. Loria, Figur 7 der Tafel I und S. 62] und speziell, wenn als Zentrum $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ oder $O_{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)} = H$, einer der beiden reellen Punkte mit stationärer Schmiegungsebene, gelegen in der Symmetrieebene xz, gewählt wird, eine

gerade Strophoide

[G. Lorias Figur 8 der Tafel I und S. 63. Vgl. auch E. Pascals Literaturangaben im „Repertorium der höheren Mathematik" II, Leipzig 1902 S. 530, 531.].

Eine recht bemerkenswerte rationale Schattenkurve 4. Ordnung in der xy-Ebene, welche außer einem *nicht isolierten* Doppelpunkte (wie z. B. beim typischen Bilde G. Lorias Figur 29 der Tafel IV, Cocked hat „Kremphut" S. 141) noch zwei Spitzen hat und von der unendlich fernen Geraden in den Kreispunkten berührt wird, stellen wir in der Figur 7 in kleinem Maßstabe dar; sie wird durch Strahlen

Fig. 7.



Eine rationale zyklische Zweispitzkurve 4. Ordnung $\left(\text{Spitzentangenten } \pm y = \frac{a}{2} + 2x\right)$.

gewonnen, welche zur xz-Ebene parallel sind und mit der z-Achse einen Winkel einschließen, dessen Tangente $\frac{a\sqrt{2}}{b}$ ist. Sie bildet den Übergang von Schattenformen, die sich dem (geraden) Dreiblatt nähern, zu den „achter"-förmigen. Bei diesem Übergange könnte man eigentlich noch eine Zwischenform mit Undulationspunkt $K(a, 0)$ einschalten, für welche die obige Winkeltangente den Wert $\frac{2a}{b}$ hat, so daß sich H nach K abschattet, wir wollen uns jedoch mit ihr

nicht aufhalten. Unsere in der Figur 7 dargestellte ebene *Zweispitzkurve* vierter Ordnung (und Klasse[1]), *zu sich selbst dual*) welche auch ein Paar von (imaginären) Wendetangenten hat und durch die Gleichungen $\begin{cases} x = a \sin \vartheta + a\sqrt{2} \sin \vartheta \\ y = -a \sin \vartheta \cos \vartheta \end{cases}$ in Parameterform gegeben ist, zeigt den Schatten von $O_{1(\vartheta)}$ für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ im Anfange O, welcher Doppelpunkt mit den Tangenten $x = \mp y\sqrt{2}$ wird, für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ im Punkte $M_0\left(\frac{3a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ der größten Ordinate, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ im Hauptscheitel $[a(1+\sqrt{2}), 0]$, für $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ im Nebenscheitel $[a(1-\sqrt{2}), 0]$ und für $\vartheta = \frac{5\pi}{4}$ in einer Spitze $A_1\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$, für $\vartheta = \frac{7\pi}{4}$ in der anderen Spitze $A_2\left(-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right)$. Die Spitzentangenten laufen im Punkte $L\left(-\frac{a}{4}, 0\right)$ zusammen. Ihre Cartesische Gleichung lautet

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 - 3y^2) - a^2(x^2 - 2y^2) = 0.$$

Anm. Ihre beiden Wendepunkte sind *nicht* reell wie z. B. beim projektiv gleichwertigen „Kremphut" (Loria S. 141), dessen Doppelpunkt dafür isoliert ist. Es ist eine Erscheinung, die bei allen rationalen Zweispitzkurven 4. Ordnung wiederkehrt, z. B. bei den projektiv ebenfalls gleichwertigen Pascalschen Schnecken (Loria S. 157, wo $A_1 A_2$ die Rollen mit den Kreispunkten IJ vertauscht haben), daß das *Tangentenpaar* im Doppelpunkt und das *Wendepunktepaar nicht zugleich reell* (wohl aber zugleich imaginär) sein können. — Cayley hat auch bei den Doppelpunktskurven 3. Ordnung auf den analogen, für die Anschauung wichtigen Umstand hingewiesen, daß dort (wo ein weiterer reeller Wendepunkt stets übrig bleibt) das (andere) Wendepunktepaar mit dem Tangentenpaar im Doppelpunkt *ebenfalls nicht zugleich reell* (noch auch *zugleich* imaginär) sein kann, was entsprechend in dualer Weise für die Doppeltangentenkurven 3. Klasse[2]) ausdrückbar ist. The collected papers of A. Caylay, Cambridge 1902—3. Von ihm könnte man die Bezeichnung auch für die Zweispitzkurven 4. Ordnung als „crunodal" oder „acnodal" annehmen.

Die Tangenten und Schmiegungsebenen der gleichteiligen Doppelschleifenbahn des Ursprunges O_1 beim Mannheimschen Umschwunge.

Die Bitangentialdeveloppable der gleichteiligen Doppelschleife zerfällt in den Zylinder $\Omega(x^2 + y^2 = ax)$ und den parabolischen Zylinder über $\mathfrak{D}\left(z^2 = \frac{b^2}{a}x\right)$[3]), und

1) Typus der vorletzten Zeile in E. Pascals Tabelle auf S. 192 im oben angeführten Rep. II.

2) 3. Kl. 4. Ordnung, wie die Cardioide und Steiners Hypozykloide.

3) Deshalb erscheinen z. B. in der Figur (2_M) neben der unendlich fernen isolierten Doppeltangente des Schleifenbildes noch die $(1 + 2)$ Spuren der zur Zeichenebene senkrechten Tangentialebenen dieser Zylinder $\mathfrak{D}$ und Ω als nichtisolierte Doppeltangenten.

zwar fällt für jeden beliebigen Wert von ϑ die Tangente $t_{(\vartheta)}$ des Punktes $O_{1(\vartheta)}$ in die Tangentialebene

$$y + a \sin\vartheta \cos\vartheta = -\operatorname{cotg} 2\vartheta\,(x - a\sin^2\vartheta)$$

von $\mathfrak{Q}$ und zugleich in die Tangentialebene

$$z + b\sin\vartheta = -\frac{b}{2a\sin\vartheta}(x - a\sin^2\vartheta)$$

des parabolischen Zylinders $\mathfrak{O}$.

t_ϑ durchstößt die Symmetralebenen der Doppelschleife, die xy- und xz-Ebene, in je einem Punkte der Knotenlinie. Diese Knotenlinie 6. Ordnung der zu unserer Raumkurve gehörigen abwickelbaren Tangentenfläche zerfällt ebenfalls, und zwar erstens in die (gerade) Cissoide des Diokles der xy-Ebene mit der Parameterdarstellung

$$\left\{\begin{array}{l} x = -a\sin^2\vartheta \\ y = -a\dfrac{\sin^3\vartheta}{\cos\vartheta} \\ z = \quad 0 \end{array}\right\}, \text{ den Cartesischen Gleichungen } \left\{\begin{array}{l} x(x^2+y^2)+ay^2=0 \\ z=0 \end{array}\right\}, \text{ (Figur 8a)}$$

mit der Spitze im Anfange O, dem Mittelpunkte N von $\mathfrak{Q}'$ als Brennpunkt und der Wendetangente $w\,(x + a = 0,\ z = 0)$

[vgl. G. Loria, Eb. Kurven Figur 1 der Tafel I und S. 37]

und zweitens in die andere Spitzkurve 3. Ordnung der xz-Ebene

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{a(1-\cos 2\vartheta)}{2\cos 2\vartheta} \\ y = 0 \\ z = b\sin\vartheta \end{array}\right\} \text{ mit den Cartesischen Gleichungen } \left\{\begin{array}{r} a^2z^2(2x-a) = b^2x^3 \\ y = 0 \end{array}\right\},$$

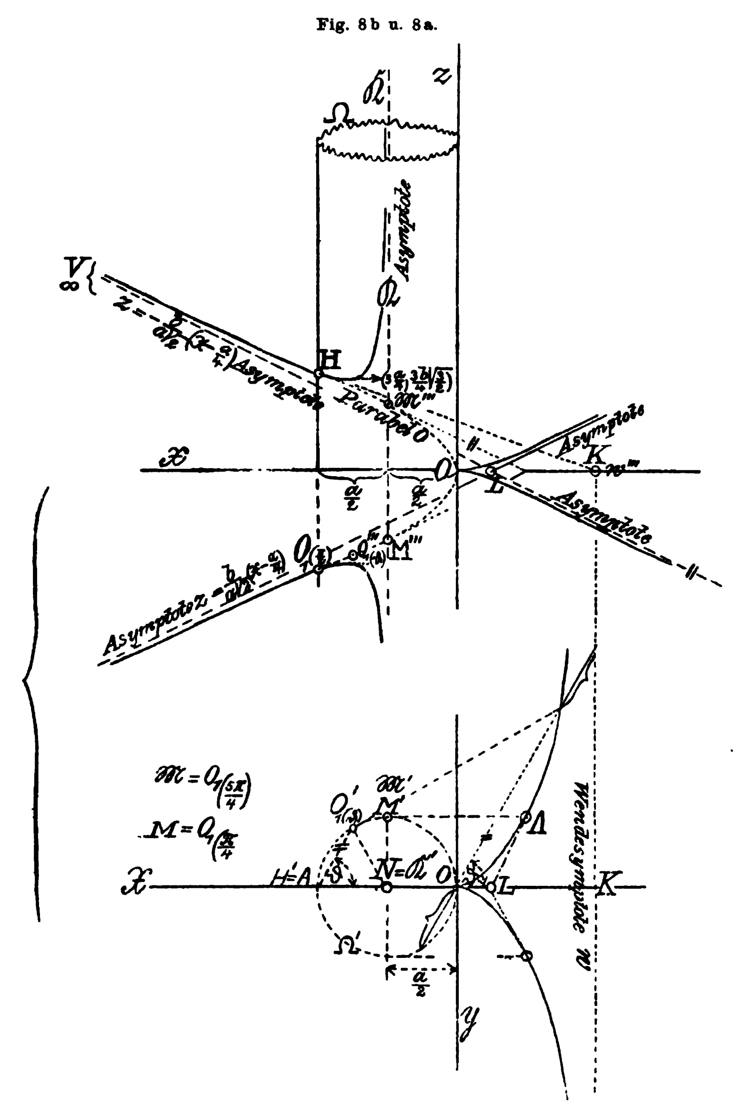
(Figur 8b)

welche ebenfalls zur x-Achse, der Spitzentangente, symmetrisch ist und die Parabel $\mathfrak{O}$ in $H = O_{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ und $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ berührt, so daß sich die betreffenden gemeinsamen Tangenten im Punkte $K(-a,\ 0,\ 0)$ von w schneiden. Nur ihr außerhalb des Zylinders $\mathfrak{Q}$ befindlicher Teil $\left(x > \frac{a}{2}\right.$ oder $\left. x < 0\right)$ gehört zu reellen Tangenten der Doppelschleife; zu *diesem* Teile gehören die Asymptoten $z = \pm \frac{b}{a\sqrt{2}}\left(x - \frac{a}{4}\right)$, zum *anderen* die dritte Asymptote, die Drehachse $\mathfrak{R}\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$ von $\mathfrak{Q}$, durch welche die (Tangentialebenen der Oskulationsdeveloppablen, d. h. die) Schmiegungsebenen gehen, welche in den Kreispunkten IJ der xy-Ebene auch den absoluten Kugelkreis berühren. Auf diesem anderen Teile liegen auch die Punkte $\left(\frac{3a}{2},\ \pm\frac{3b}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, welche der x-Achse näher kommen als ihre benachbarten.

Da die Knotenkurve in so einfache Teile zerfällt, kann man mit deren Hilfe sich leicht ein Bild von der Lage der Schmiegungsebenen der Doppelschleife machen, welche die developpable Tangentenfläche einhüllen. Letztere kann nämlich selbst als Bitangentialdeveloppable *ihrer eigenen Knotenlinie* konstruiert werden:

In jedem Punkte L der x-Achse — Figur 8a, b, wobei für reelle Schmiegungsebenen nur die Punkte L zwischen O und K in Betracht kommen — schneiden sich zwei Tangenten der Cissoide (Figur 8a) und zwei Tangenten des anderen

Fig. 8b u. 8a.



Zerfallende Knotenlinie der Tangentenfläche einer gleichteiligen Doppelschleife.

gespitzten Teiles der Knotenlinie (Figur 8b). Durch jeden Punkt L gehen — außer den für alle Punkte der x-Achse festen zwei, zum Doppelpunkte O gehörigen $(b^2y^2 - a^2x^2 = 0)$ — noch vier Schmiegungsebenen; es sind dies jene, welche eine Tangente des ersteren Paares mit einer des letzteren verbinden. Die in jede solche Ebene fallende Tangente der Doppelschleife selbst führt vom

Berührungspunkte A der Schmiegungsebene mit der Cissoide zum Berührungspunkte V mit dem anderen gespitzten Teil der Knotenlinie.

In unseren Figuren 8a, b ist L gerade so $\left(x = -\frac{a}{2}\right)$ auf OK, der x-Achse, gewählt worden, daß der letztere Berührungspunkt V unendlich fern wird V_∞, so daß er bei der kleinsten Bewegung von L auf OK entweder auf die eine oder auf die andere Seite des Kurvenzuges (Figur 8b) wandert, entweder jene, wo die Spitze ist, oder die andere, wo sie nicht ist. $L V_\infty$ gehört so als Spur in der xz-Ebene zu jener Schmiegungsebene, deren Tangente zur Asymptotenrichtung V parallel ist und ihren Oskulationspunkt $\mathfrak{M}_0$ $\left(= O_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ oder } O_1\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ bei Parallelbeleuchtung in ihrer Richtung als eine Spitze $\mathfrak{M}_0 = A$ (A_1 oder A_2) der Figur 7 (zu S. 181) abschattet.

Die 6 *Schmiegungsebenen* der Doppelschleife, welche *durch einen beliebigen Raumpunkt* gehen, sind identisch mit den 6 Doppeltangentialebenen des die obige *Knotenlinie* aus diesem Punkte projizierenden Kegels, der in zwei Kegel 3. Klasse (und Ordnung) zerfällt, welche die durch O gehende Spitzenkante und die durch die x-Achse gehende Ebene als Spitzenkantentangentialebene gemeinsam haben, so daß von den 9 gemeinsamen Tangentialebenen beider Kegel 3. Klasse drei Ebenen in Wegfall kommen.

Nach dieser Orientierung bezüglich der Anfangsbahn kehren wir zurück zum Aufbau unseres Nebenapparates und zeigen, wie wir die oben auf S. 176 angegebenen Forderungen erfüllen (Figur 5).

1. Um die z_1-Achse auf Ω herumzuführen, benutzen wir wie beim Hauptapparate eine um die Achse $\mathfrak{K}$ von Ω (in C) drehbare *Trommel* C_2, welche in einem passenden Doppelkreislager durch die von C herabreichenden Seitenstücke C' und C'' gehalten wird und im Parallelabstande $\frac{a}{2}$ von $\mathfrak{K}$ eine exzentrische Bohrung hat, in der die zylindrische Stange C_1' des bei dem Mannheimschen Umschwunge beweglichen Körpers C_1 sich samt den letzteren sowohl im Sinne der Bohrungsachse z_1 verschieben, als auch um letztere drehen kann.

Von der Trommel C_2 kann bei ihrer Drehung um $\mathfrak{K}$ ein Schwungrad C_2' mitgenommen werden.

Bisher wäre die Erfüllung der Forderung 1 gesichert und dem Körper C_1 noch der Freiheitsgrad III belassen.

2. Oben an C_1' bringen wir einen *Bügel* C_1'' an, d. h. einen von der Seite durch C_1' gehaltenen prismatischen Körper, dessen Kanten mit z_1 den Winkel $\psi = \operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}$ einschließen, und den wir, um seine Gestalt zu zeigen, einstweilen zu der durch $\mathfrak{K}$ und z_1 gedachten Zeichenebene mit seinen Prismenkanten parallel legen. Das obere prismatische Hauptstück dieses Bügels lagern wir in die kongruent-prismatische Ausnehmung eines *Hilfskörpers* C_0 ein, welchen wir in C derart betten, daß er gegen C um die in der Anfangslage ($\vartheta = 0$) mit z_1 zusammen-

fallende Achse Δ^0, die z-Achse des mit C verbunden gedachten Koordinatensystems, drehbar wird, während ihm jede andere Bewegung verwehrt ist.

Zum Anfange O_1 des mit C_1 beweglichen Koordinatensystems machen wir nun einen Punkt auf z_1, etwa im Bügel C_1'' (der mit C_1' und C_1 selbst starr verbunden ist), zum Anfange O des festen, mit C verbundenen Koordinatensystems den anfänglich mit O_1 vereinigt zu denkenden Punkt O von z in C; die Achse $+x$ sei in der Zeichenebene, also als senkrechte Transversale von z und $\mathfrak{K}$ angenommen, die y-Achse durch O senkrecht dazu, etwa mit ihrem positiven Teile vor der Zeichenebene.

Wenn wir nun vorerst den Körper C_1 (mit C_1' und C_1'') um z_1 soweit $\left(\text{d. h. um } \frac{\pi}{2}\right)$ drehen, daß die durch O_1 unter dem Winkel ψ gegen z_1 in C_1 gedachte Gerade $\underline{\Delta_1}$ sich auf die Zeichenebene nach z orthogonal projiziert, so haben wir dem Körper C_1 gegen C jene Anfangslage gegeben, welche wir mit $(\vartheta = 0)$ bezeichnen.

In C_1 legen wir die x_1- und y_1-Achse so durch O_1, daß sie in der Anfangslage $(\vartheta = 0)$ mit der x-, bezw. y-Achse zusammenfallen.

Im Augenblick des Antrittes der Bewegung sorgen wir[1]) nun dafür, daß C_1 sich nicht etwa *bloß* um z zu drehen anfängt, wobei die Trommel unnütz würde, sondern sich auch sogleich mit dem prismatischen Bügelkörper C_1'' im Prismenlager von C_0, also anfänglich in der Richtung von $\underline{\Delta_1}$ verschiebt; dann ist für den weiteren Verlauf *dem Körper C_1 gegen C der Mannheimsche Umschwung gesichert*, wie er durch die Gleichungen (1_M) beschrieben wird.[2])

Der Deutlichkeit wegen ist in der Figur 5a die Ansicht des Bügels C_1'' in der Anfangslage $(\vartheta = 0)$ derart angegeben, wie sie von der y-Achsenrichtung erscheint.

Aus der Anfangslage dreht sich der Hilfskörper C_0 um die z-Achse (Δ^0) im Ausmaße ϑ, während der Bügel C_1'' und mit ihm der

1) Dies könnte etwa auch durch Anbringung eines Zapfens am obersten Bügelteile und durch Herabstellung einer der Zapfenbahn entsprechend auszunehmenden, von C herabstellbaren Gabel geschehen. —

2) Die Anfangslage kann man passend als eine „Verzweigungsstellung" bezeichnen, da (nur) von ihr aus dem Körper C_1 außer der gewünschten Mannheimschen noch eine *andere* Bewegung (Drehung um z) gestattet ist, falls nämlich der Eintritt der letzteren nicht eigens verhindert wird. Viele kinematische Apparate zeigen derartige Verzweigungsstellungen, ohne daß dies für gewöhnlich beachtet wird, so z. B. die ebenen symmetrischen Gelenksvierecke, das Antiparallelogramm und das Deltoid. Vgl. die Abhandlung des Verfassers: „Betrachtung von Fußpunktskurven in der Ebene und im Raume" im 1906-Programm der II. Deutschen Staatsrealschule in Prag.

durch die Stange C_1' starr verbundene — unten etwa, ähnlich wie oben C, mit einer Platte versehene — Körper C_1 sich im Prismenlager von C_0 (anfänglich nach abwärts und mit z_1 hinter die Zeichenebene) verschiebt, nicht ohne gleichzeitige Drehung der Trommel C_2 im Ausmaße 2ϑ um $\mathfrak{R}$, sodaß für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ die Gerade $\underline{\varDelta_1}$ nach der in der Zeichenebene dargestellten Lage $\varDelta_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ gelangt, wobei indessen O_1 nach $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}(a, 0, -b)$ in die Zeichenebene xz, d. h. in den tiefsten Punkt der Doppelschleifenbahn von O_1 herabgerückt ist, von wo an sich C_1 wieder zu heben anfängt, usf. Der Bewegungsantrieb kann passend vom Schwungrade C_2' der Trommel C_2 aus erfolgen. Die durch $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ in C gedachte Gerade $\varDelta$, welche von $z_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$, d. h. von der z_1-Achse für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ bedeckt wird, nennen wir $\varDelta_0$; dann haben wir den Zylinder Ω in C über $\varDelta^0$ und $\varDelta_0$ als diametral gegenüberliegenden Kanten ausgespannt zu denken, während Ω_1 um z_1 mit dem doppelt so großen Radius a beschrieben ist. Die y_1z_1-Ebene (u_1) umhüllt zwangläufig die z-Achse, wenn der Apparat in Gang gesetzt wird, die x_1z_1-Ebene v_1 umhüllt zwangläufig die Achse $\varDelta_0$, beide mit dem Drehungswinkel ϑ; während zugleich damit C_1 gegen C im Sinne der Richtung z eine harmonische Sinusschwingung mit der Amplitude b auszuführen gezwungen ist; es könnte kaum durch einen andern Apparat deutlicher versinnlicht werden, wie die Gerade $\underline{\varDelta_1}$ von C_1 ihren Rotationskegel $O(\underline{\varDelta_1})$ in C beschreibt, und damit alle zu ihr parallelen Transversalen von z_1 die Parallelkegel um die betreffenden Schnittpunkte mit z als Scheitel usw. Der Hauptvorteil des Nebenapparates besteht indessen, wie schon hervorgehoben wurde, darin, daß er auch für flache Umschwungsbewegungen brauchbar ist, ja sogar für die vollkommen flache gewöhnliche Ellipsographenbewegung verwendbar wäre, wo unser Hauptapparat versagt.

In der Figur 5 ist auch die parabolische Bahnprojektion $\mathfrak{O}$ von O_1 auf die xz-Ebene eingezeichnet, um durch Vergleichung mit Fig. 8 die Verfolgung der von O_1 selbst beschriebenen Doppelschleife von $O_{(\vartheta=0)}$ über $M_{\left(\vartheta=\frac{\pi}{4}\right)}$ und $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ nach $O_{(\vartheta=\pi)}$ und weiter über $\mathfrak{M}_{\left(\vartheta=\frac{5\pi}{4}\right)}$ und $H = O_{1\left(\frac{3\pi}{2}\right)}$ nach $O_{(\vartheta=2\pi)}$ zurück zu erleichtern.

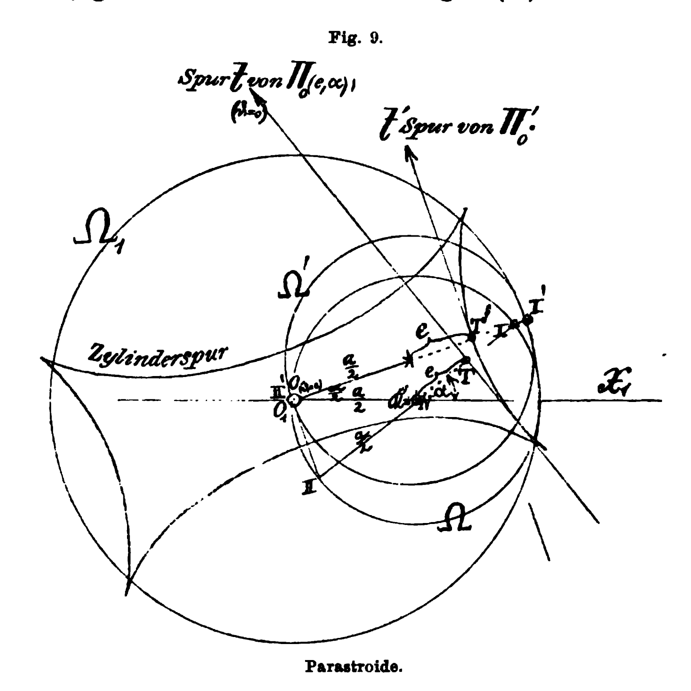
Auch die Projektion $\varLambda'''$ der Bahn $\varLambda$ eines Punktes δ_1 $(x_1 = 0,\ y_1 = a,\ z_1 = -b)$ von $\underline{\varDelta_1}$ im unteren Bügelteile, der bei bloßer Drehung um z in die

Zeichenebene nach $O_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}$ gelangen würde, ist in der Figur 5 eingetragen; die zugehörige Bahnlinie im Raume (Gl. 1_M) ist eine Kurve 4. Ordn. auf dem Kegel $O(\underline{\Delta}_1)$ mit einer Spitze in O, welche erst später (S. 214) besprochen werden soll, da wir unserem Arbeitsplane (S. 159) gemäß die Ebenenbahnen des Darbouxschen noch vor den übrigen Punktbahnen des Mannheimschen Umschwunges untersuchen. Die Untersuchung der Bahn des Punktes O_1 war uns für das Verständnis des Nebenapparates nützlich und wurde nur deshalb vorweggenommen.

Die Hüllbahnen der Ebenen beim Darbouxschen Umschwunge.

Jede Ebene Π des beweglichen Körpers C beschreibt eine der einfachsten olisthoidalen[1]) Developpablen. Um deren Beschaffenheit zu erkennen, gehen wir von den Gleichungen (I_D) der S. 158 aus und

Fig. 9.



Parastroide.

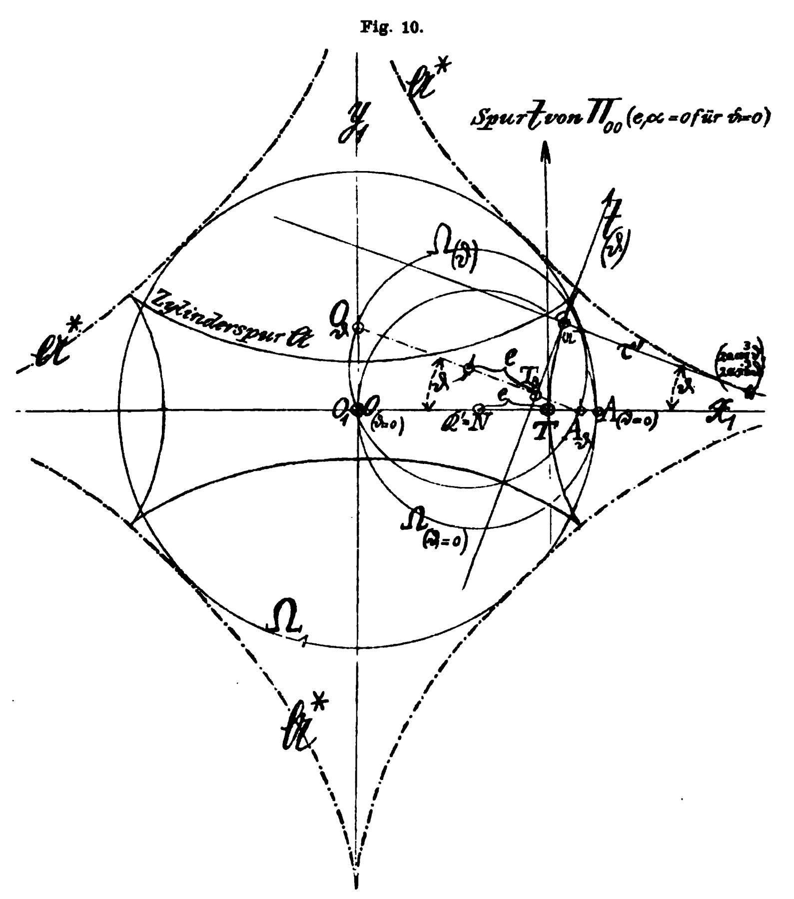
betrachten vorerst die zylindrischen Hüllbahnen jener Ebenen Π_0, welche zur xy-Ebene senkrecht stehen ($w = 0$) und deshalb *dieselben* sind wie beim vollkommen flachen Umschwunge ($b = 0$), der gewöhnlichen Bewegung des ebenen Ellipsographen. Diese Ebenen Π_0 mit der Spur $t_{(\vartheta=0)}$ in der x_1y_1-Ebene (Figur 9) ordnen wir nach Parallelebenenbüscheln durch Angabe jenes Winkels α, welchen das aus

1) Vgl. S. 159 Anm. 1.

einem Punkte der Achse $\mathfrak{K}$ $\left(\frac{\alpha}{2},\ 0 \text{ für } \vartheta = 0\right)$ von Ω, etwa aus N $\left(\frac{\alpha}{2},\ 0,\ 0 \text{ für } \vartheta = 0\right)$ auf dieselben oder auf t gefällte Lot NT von der Länge e anfänglich (d. h. für $\vartheta = 0$) mit der x_1-Achse einschließt.

Jede Ebene Π_0 $(e,\ \alpha)$ beschreibt nun eine Zylinderbahn, welche kongruent, nur im Ausmaße $\frac{\alpha}{2}$ um die z_1-Achse gedreht ist, verglichen mit der von der Ebene Π_{00} $(e,\ \alpha = 0)$ eingehüllten. — Statt dies

Fig. 10.



Astrois $\mathfrak{A}^*$, die gemeinsame Evolute der $\mathfrak{A}$.

durch Koordinatentransformationen rechnerisch nachzuweisen und in (I_D) rechts bei ϖ_1 das zweite Glied verschwinden zu lassen, beachten wir, daß für $\vartheta = \frac{\alpha}{2}$ der Durchmesser I II von Ω in der Figur 9, welcher zu Π_0 und deren Spur $t_{(\vartheta = 0)}$ genau dieselbe senkrechte Lage hat wie der Durchmesser AO von $\Omega_{(\vartheta = 0)}$ bezüglich Π_{00} in der Figur 10, Be-

rührungshalbmesser $I'\,II'$ von $\mathfrak{Q}_1$ wird: Π_0 (mit der Spur t) gelangt hierbei nach einer Lage Π_0' (mit der Spur t'), von welcher aus ein kongruenter Zylinder umhüllt werden muß, wie der von Π_{00} (mit der anfänglichen Spur t in der Figur 10) von $\vartheta = 0$ an beschriebene. —

Die von einer Ebene Π_{00}, welche zur x-Achse senkrecht steht und auf ihr ein Stück

$$x_0 = \frac{a}{2} + e$$

abschneidet, eingehüllte Zylinderfläche hat aber zur Basis in der xy-Ebene eine

Parastroide $\mathfrak{A}$

d. h. die Parallelkurve einer regulären Astrois[1]) $\mathfrak{A}_R$, und alle Parallelebenen Π_{00} (e beliebig) hüllen mit ihren Spuren in der xy-Ebene Evolventen $\mathfrak{A}$ derselben regulären Astrois $\mathfrak{A}^*$ (Figur 10) mit den Gleichungen

$$(9) \qquad \mathfrak{A}^* \left| \begin{array}{c} x_1 = 2a\cos^3\vartheta, \quad y_1 = 2a\sin^3\vartheta; \\ (x_1^2 + y_1^2 - 4a^2)^3 + 27(2ax_1y_1)^2 = 0 \\ x_1^{\frac{2}{3}} + y_1^{\frac{2}{3}} = 2a^{\frac{2}{3}} \\ \text{in Punktkoordinaten} \end{array} \right|$$

---

1) Man nennt sie auch oft vierspitzige Hypozykloide, trotzdem sie außer den vier reellen Spitzen noch zwei andere in den Kreispunkten hat. Wir folgen dem Bezeichnungsvorschlage G. Lorias bezüglich ihrer Parallelkurven $\mathfrak{A}$, um für dieselben nicht den leider auch eingebürgerten Namen „Tetrakuspidale" gebrauchen zu müssen.

In Reuleaux' Kinematik II. Bd. S. 63 zeigt die Figur 53 einige Parastroidenformen. Bezüglich der umfangreichen Literatur vgl. E. Pascal, Repert. d. höh. Math. II S. 552—544 und G. Loria, Eb. Kurven I. Bd. S. 224 und Fig. 57, und im II. Bd. S. 651 und Fig. 136. G. Loria bemerkt dort, daß eine olisthoidale Konstruktion nicht für alle Parallelkurven von $\mathfrak{A}_R$ in reeller Weise möglich ist, da er an der Beschränkung festhält, welche wir fallen lassen wollen, daß Punkte der Tangente t *selbst* auf Geraden gleiten sollen. Wir behalten den Namen „olisthoidale Hüllkurven" auch dann bei, wenn *nicht* auf t gelegene, aber mit t starr verbundene Punkte auf Geraden gleiten. Siehe S. 159 Anm. 1.

Die Parastroiden $\mathfrak{A}$ treten auch auf als Hauptschnitte der Hydeschen Brennfläche der Achsenkongruenz eines linearen Schraubenbündels. Vgl. die Figuren XII bis XV in des Verfassers „Veranschaulichung des Schraubenbündels" im 49. Bd. dieser Zeitschrift (1903) S. 211. Dort wurde schon im Wesen die kinematische Olisthoidenkonstruktion der $\mathfrak{A}$ (als Gleitstückkonstruktion der Hauptschnitte S. 238) angegeben, welche ebenso wie die Konstruktion als Parallelkurven einer $\mathfrak{A}_R$ *stets in reeller Weise* möglich ist und die wir jetzt so ausdrücken können:

„Bewegt sich die Strecke OA von der Länge a mit ihren Endpunkten auf zwei zu einander senkrechten Geraden, der y_1-, bezw. x_1-Achse, so umhüllt jede von OA starr mitgenommene zu OA senkrechte Gerade in der x_1y_1-Ebene eine der Parastroiden unserer Schar $\mathfrak{A}$." (Die mitgenommenen *nicht* zu OA senkrechten Geraden umhüllen gedreht gelegene ebensolche Parastroiden dieser Ebene.)

oder

$$\left|\begin{array}{c} u_1 : v_1 : \varpi_1 = \sin\vartheta : \cos\vartheta : -a\sin 2\vartheta; \\ 4a^2 u_1^2 v_1^2 = \varpi_1^2(u_1^2 + v_1^2) \\ \text{in dualen Plückerschen Koordinaten} \end{array}\right|$$

ein.

Aus den Gleichungen (I_D) ergibt sich nämlich als Hüllbahn von $\Pi_{00}(e, 0)$ der senkrechte Zylinder über der Linie

$$(10)\quad \begin{cases} u_1 = u\cos\vartheta \\ v_1 = -u\sin\vartheta \\ \varpi_1 = ua\sin^2\vartheta + \varpi = u(a\sin^2\vartheta - x_0) = u\left(a\sin^2\vartheta - \left[\frac{a}{2} + e\right]\right), \end{cases}$$

welche sich als Parastroide $\mathfrak{A}$ durch die Koordinaten ihrer Normalen $\mathfrak{r}'$ im Berührungspunkte $\mathfrak{a}$, d. h. durch die Tangentialkoordinaten der Evolute

$$\begin{cases} u_1' = \frac{du_1}{d\vartheta} = -u\sin\vartheta \\ v_1' = \frac{dv_1}{d\vartheta} = -u\cos\vartheta \\ \varpi_1' = \frac{d\varpi_1}{d\vartheta} = au\sin 2\vartheta \end{cases}$$

erkennen läßt, da diese Koordinaten der Gleichung (9) von $\mathfrak{A}^*$ genügen. Man könnte hiernach auch alle von den Spuren der Π_{00} eingehüllten Parastroiden $\mathfrak{A}$ als Bahnlinien der Punkte der x-Achse (Abszisse $x_0 = \frac{a}{2} + e$ beliebig) erhalten, wenn diese Achse ohne zu gleiten an der regulären Astrois $\mathfrak{A}^*$ abrollt, was ein besonders anschauliches Bild ihrer Gestalten gibt: Figur 11a, in kleinerem Maßstabe.

Anm. $\mathfrak{A}^*$ ist bezüglich des Anfanges ähnlich gelegen und doppelt so groß als die von dem Ω-Durchmesser OA (in der Projektion auf die $x_1 y_1$-Ebene) eingehüllte reguläre Astrois. Wie wir uns später überzeugen können, erscheint die letztere um $\frac{\pi}{4}$ gedreht gegen die $\mathfrak{A}_R$ der Fig. 11, welche von der $e = 0$ entsprechenden Ebene Π_{00} eingehüllt wird.

Es hat genügt, die gemeinsame Evolute aller $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{A}^*$ nachzuweisen, da hieraus die Parallelkurveneigenschaft jeder $\mathfrak{A}$ zu jeder anderen der gleichen Evolventenschar, beispielsweise also auch zu der darin enthaltenen und sich für $e = 0$ ergebenden regulären Astrois $\mathfrak{A}_R$ folgt.

Die Parastroide $\mathfrak{A}$ mit den Parametergleichungen (10) ist in den Plückerschen Koordinaten durch die Gleichung

$$(10') \qquad ([2e + a]u_1^2 + [2e - a]v_1^2)^2 = 4\varpi_1^2(u_1^2 + v_1^2)$$

darstellbar; sie hat in gewöhnlichen Punktkoordinaten die Parametergleichungen

Fig. 11 b.
Raumastrois und dev. Parastroidenfläche A^*.

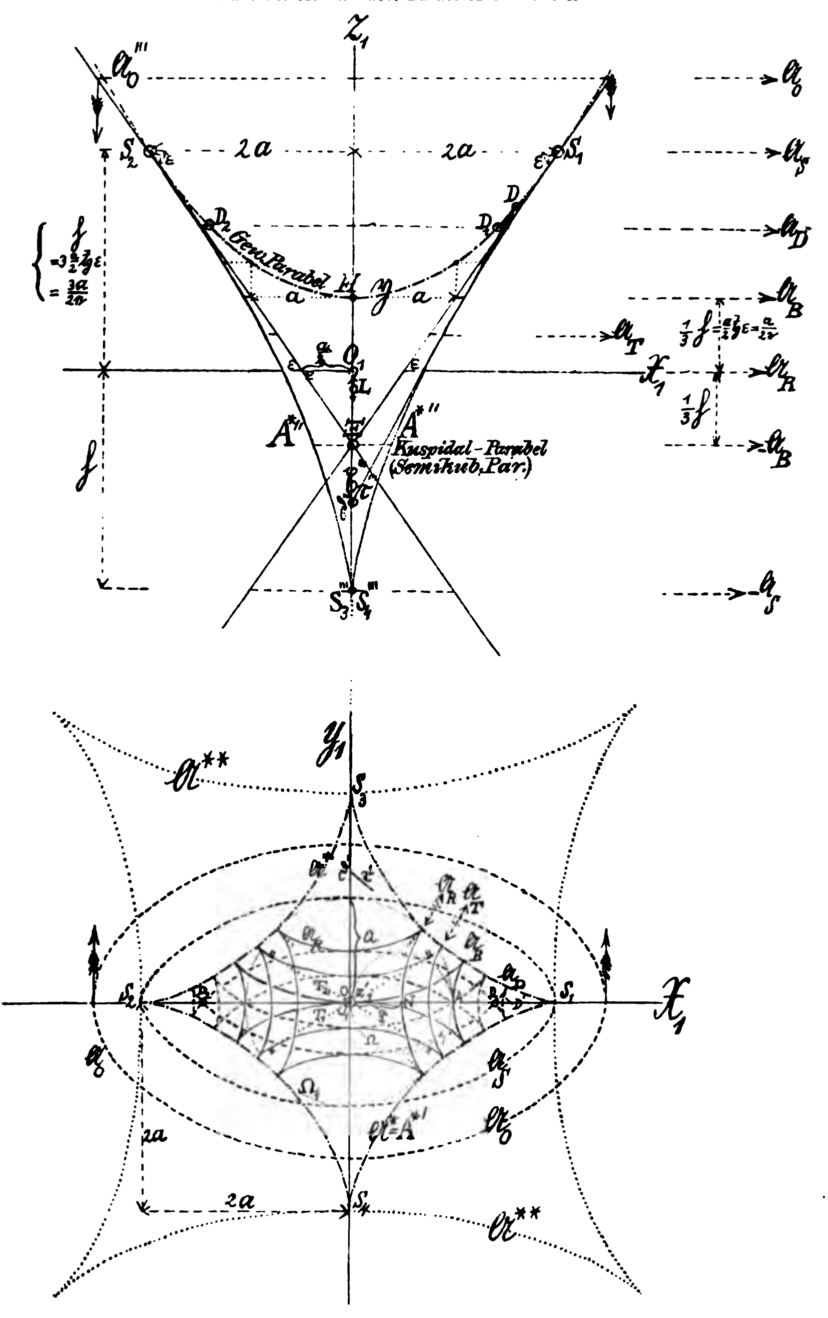


Fig. 11 a.
Parastroiden 𝔄 (Niveaulinien von A^*).

$$(10'') \quad \begin{cases} x_1 = a\cos\vartheta - \left(\left[\frac{a}{2} - e\right]\cos^2\vartheta - \left[\frac{a}{2} + e\right]\sin^2\vartheta\right)\cos\vartheta \\ y_1 = a\sin\vartheta + \left(\left[\frac{a}{2} - e\right]\cos^2\vartheta - \left[\frac{a}{2} + e\right]\sin^2\vartheta\right)\sin\vartheta \end{cases}$$

und die Cartesische Gleichung

$$(10''') \quad \begin{cases} 4(x_1^2 + y_1^2 + 4e^2 - a^2)^3 - 16e^2(x_1^2 + y_1^2 + 4e^2 - a^2)^2 \\ - 72e(x_1^2 + y_1^2 + 4e^2 - a^2)([2e - a]x_1^2 + [2e + a]y_1^2) \\ + 27([2e - a]x_1^2 + [2e + a]y_1^2)^2 \\ + 256e^3([2e - a]x_1^2 + [2e + a]y_1^2) = 0. \end{cases}$$

Wir geben nun die Besonderheiten dieser interessanten Linien an und bemerken nur vorher, daß es in der Figur 11a genügt, die Formen für *positive Werte von* e einzuzeichnen. Die zu $+e$ und $-e$ gehörigen Parastroidengestalten sind nämlich zueinander symmetrisch bezüglich der Winkelhalbierenden der Koordinatenachsen, (10′) und (10″) bleiben unverändert, wenn man $+e$ mit $-e$ und zugleich u_1 mit v_1, x_1 mit y_1 vertauscht. Dies steht in Einklang mit unserer obigen Bemerkung, daß die Gestalt nicht bloß der von unseren Π_{00}, sondern auch von allen zur z-Achse parallelen Ebenen Π_0 eingehüllten Parastroidenzylinder nur von dem Abstande e dieser Ebenen von der Achse $\mathfrak{K}$ des Drehzylinders Ω abhängt.

In der Figur 11 sehen wir

für $e = 0$ die reguläre Astrois $\mathfrak{A}_R$, welche mit der gemeinsamen Evolute $\mathfrak{A}^*$ aller $\mathfrak{A}$ verglichen, die halbe Größe und eine bezüglich des Ursprunges O_1 um $\frac{\pi}{4}$ gedrehte Lage aufweist:

$$(\mathfrak{A}_R) \quad \begin{Bmatrix} u_1 = u\cos\vartheta,\ v_1 = -u\sin\vartheta,\ \varpi_1 = -\frac{a}{2}u\cos 2\vartheta; \\ a^2(u_1^2 - v_1^2)^2 = 4\varpi_1^2(u_1^2 + v_1^2) \end{Bmatrix},$$

„ $0 < e < \frac{a}{2}$ zeigen sich Gestalten $\mathfrak{A}_T$ mit zwei reellen Doppeltangenten $T_{1,2}$ durch den Ursprung, welche beide

„ $e = \frac{a}{2}$ in die x_1-Achse als Tangente des im Anfange O_1 auftretenden Berührungsknotens zusammenrücken,

$$(\mathfrak{A}_B)^1) \quad \begin{Bmatrix} u_1 = u\cos\vartheta,\ v_1 = -u\sin\vartheta,\ \varpi_1 = -au\cos^2\vartheta; \\ a^2u_1^4 = \varpi_1^2(u_1^2 + v_1^2) \end{Bmatrix}$$

und von da ab imaginär sind.

---

1) Die Figur XV der oben angeführten Abhandlung des Verfassers im 49. Bde. dieser Zeitschrift zeigt eine solche Gestalt $\mathfrak{A}_B$ als Meridianschnitt einer Hydeschen Drehfläche.

Für $\frac{a}{2} < e < \frac{3a}{2}$ werden auf der x_1-Achse reelle und nicht isolierte Doppelpunkte D der sich ergebenden Gestalten $\mathfrak{A}_D$ sichtbar. Diese D rücken erst

„ $e = \frac{3a}{2}$ in je einem der beiden singulären dreifachen Punkte $S_{1,2}(\pm 2a, 0)$ zusammen, wohin sich auch die bisher stets reell gewesenen zwei Spitzenpaare zusammenziehen,

$$(\mathfrak{A}_S) \quad \left\{ \begin{array}{c} u_1 = u \cos \vartheta, \; v_1 = -u \sin \vartheta, \; \varpi_1 = au(\sin^2 \vartheta - 2); \\ a^2(2u_1^2 + v_1^2)^2 = \varpi_1^2(u_1^2 + v_1^2) \end{array} \right\},$$

welch letztere von da ab

„ $\frac{3a}{2} < e < \infty$ imaginär werden, während die Doppelpunkte $D_{1,2}$ auf der x_1-Achse bei den nun hervortretenden ovalen Gestalten $\mathfrak{A}_O$ isoliert erscheinen. Diese ovalen Formen nähern sich endlich bei wachsendem e ungeheueren Kreisen.

Wir bestimmen nun genau die Lage der reellen oder imaginären *Plückerschen Singularitäten* der mit e veränderlichen Parastroiden $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}_T$, $\mathfrak{A}_D$, $\mathfrak{A}_O$ samt den Grenzformen $\mathfrak{A}_R$, $\mathfrak{A}_B$, $\mathfrak{A}_S$), wobei wir *nicht mehr* wie bei der Figur 11 negative e-Werte ausschließen, sodaß die Schar vollständig wird.

Jede Parastroide $\mathfrak{A}$ mit den Gleichungen (10) ist eine Kurve 6. Ordnung und 4. Klasse ohne Wendepunkte, von der unendlich fernen Geraden wird sie in den Kreispunkten IJ berührt, welche Spitzen sind; neben dieser Doppeltangente gehen noch die beiden anderen

$$(T_{1,2}) \qquad [2e - a]x_1^2 + [2e + a]y_1^2 = 0$$

durch den Anfang, berühren die Kurve in Punkten des Kreises $(x_1^2 + y_1^2 = a^2 - e^2)$ und durchsetzen sie außerdem noch in den beiden auf dem Kreise $\Omega_1(x_1^2 + y_1^2 = a^2)$ gelegenen. Die erstere Kreisgleichung ist nicht wie jene des Ω_1 von e frei, wir können aber den zugehörigen Kreis, indem wir e eliminieren, durch die von e ganz unabhängige Rosenkurve

$$(x_1^2 + y_1^2)^3 = 4a^2 x_1^2 y_1^2$$

[G. Loria, Eb. Kurven Fig. 76 der Tafel XI und S. 304 und 231] ersetzen, die *Fußpunkts*kurve der regulären Astrois $\mathfrak{A}^*$ (Gleichung (9)) und daher gemeinsame *Gegenfußpunktskurve* aller $\mathfrak{A}$ der Parallelkurvenschar (G. Loria II S. 673) in bezug auf den Ursprung O_1 als Pol: Auf dieser Rosenkurve liegen die Berührungspunkte aller Parastroiden $\mathfrak{A}$

der Schar mit ihren Doppeltangenten; sind letztere, welche auf allen Tangenten der betreffenden $\mathfrak{A}$ gleiche Stücke abschneiden, *reell*, ($\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_T$), so kann die am längsten bekannte Konstruktion der $\mathfrak{A}_T$ durch Gleiten dieser Stücke an den Doppeltangenten reell durchgeführt werden.[1])

Außer den zwei in den Kreispunkten befindlichen hat jede Parastroide $\mathfrak{A}$ noch vier andere Spitzen in den Punkten, welche zu

$$(11)\qquad \cos 2\vartheta = \frac{2e}{3a},\quad \text{d. h.}\quad \sin^2\vartheta = \frac{3a-2e}{6a},\quad \cos^2\vartheta = \frac{3a+2e}{6a}$$

gehören, auch auf der Evolute $\mathfrak{A}^*$ liegen und die Koordinaten

$$x_1 = \pm 2a\left(\frac{3a+2e}{6a}\right)^{\frac{3}{2}},\quad y_1 = \pm 2a\left(\frac{3a-2e}{6a}\right)^{\frac{3}{2}}$$

besitzen. Die zugehörigen Spitzentangenten umhüllen die Evolute $\mathfrak{A}^{**}$ von $\mathfrak{A}^*$, eine viermal so große und bezüglich O_1 ähnlich gelegene Astrois wie obige $\mathfrak{A}_R$ $(e = 0)$

$$(\mathfrak{A}^{**})\quad \left\{\begin{aligned} u_1'' &= \frac{d^2 u_1}{d\vartheta^2} = -u\cos\vartheta \\ v_1'' &= \frac{d^2 v_1}{d\vartheta^2} = u\sin\vartheta \\ \varpi_1'' &= \frac{d^2\varpi_1}{d\vartheta^2} = 2au\cos 2\vartheta \end{aligned}\right\}\quad 4a^2(u_1''^2 - v_1''^2) = \varpi_1''^2(u_1''^2 + v_1''^2);$$

sie haben in laufenden Punktkoordinaten $\xi_1\,\eta_1$ die Gleichungen

$$\xi_1\cos\vartheta - \eta_1\sin\vartheta - 2a\cos 2\vartheta = 0$$

mit den aus (11) hervorgehenden ϑ-Werten, also

$$\pm\,\xi_1\sqrt{\frac{3a+2e}{6a}} \mp \eta_1\sqrt{\frac{3a-2e}{6a}} - \frac{4e}{3} = 0$$

Die doppelten Vorzeichen sind voneinander unabhängig, die obere Zeichenkombination gehört zur Tangente der im ersten Quadranten gelegenen Spitze; die anderen drei sind symmetrisch dazu bezüglich der Koordinatenachsen.

Jede $\mathfrak{A}$ hat vier Doppelpunkte, zwei auf der x_1-Achse: $D_{1,2}$, zwei auf der y_1-Achse: $\mathfrak{D}_{1,2}$. Beide Paare können nicht zugleich reell sein. Sie werden aus (10″) für

$$(D_{1,2})\quad \begin{gathered} a + \left(\left[\frac{a}{2} - e\right]\cos^2\vartheta - \left[\frac{a}{2} + e\right]\sin^2\vartheta\right) = 0 \\ \cos 2\vartheta = \frac{2(e-a)}{a},\quad \sin^2\vartheta = \frac{3a-2e}{2a},\quad \cos^2\vartheta = \frac{-a+2e}{2a} \end{gathered}$$

---

1) Wie *alle* $\mathfrak{A}$ (auch $\mathfrak{A}_D$, $\mathfrak{A}_O$) in stets *reeller* Weise als Olisthoiden konstruiert werden, zeigt der vollkommen flache Darbouxsche Umschwung, indem er zu der auf S. 189 (Anm. 1, Schlußpassus) angeführten Erzeugung führt.

bzw. für

$$a - \left(\left[\frac{a}{2} - e\right]\cos^2\vartheta - \left[\frac{a}{2} + e\right]\sin^2\vartheta\right) = 0$$

$(\mathfrak{D}_{1,2})$

$$\cos 2\vartheta = \frac{2(e+a)}{a}, \quad \sin^2\vartheta = \frac{-a-2e}{2a}, \quad \cos^2\vartheta = \frac{3a+2e}{2a}$$

durch

$$(12) \qquad \left\{\begin{array}{l} x_{1,2} = 2a\cos\vartheta = \pm\sqrt{2a(-a+2e)}, \quad y_1 = 0 \\ \text{bzw.} \\ y_{1,2} = 2a\sin\vartheta = \pm\sqrt{2a(-a-2e)}, \quad x_1 = 0 \end{array}\right\}$$

bestimmt; ihre Tangenten, mit den Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} (\xi_1 - x_{1,2})\cos\vartheta - \eta_1\sin\vartheta = 0 \\ \xi_1\cos\vartheta - (\eta_1 - y_{1,2})\sin\vartheta = 0 \end{array}\right\}$$

d. h.

$$\left\{\begin{array}{l} \pm\xi_1\sqrt{-a+2e} \mp \eta_1\sqrt{3a-2e} = (-a+2e)\sqrt{2a} \\ \pm\xi_1\sqrt{3a+2e} \mp \eta_1\sqrt{-a-2e} = (-a-2e)\sqrt{2a} \end{array}\right\},$$

zeigen durch ihre Plückerschen Koordinaten — wir beschränken uns auf den oberen Fall, da der untere ein symmetrisches Ergebnis hat —

$$\mathfrak{u} : \mathfrak{v} : \mathfrak{o} = \pm\sqrt{-a+2e} : \mp\sqrt{3a-2e} : -(-a+2e)\sqrt{2a},$$

welche der Gleichung $\mathfrak{A}_B^*$

$$4a^2\mathfrak{u}^4 = \mathfrak{o}^2(\mathfrak{u}^2 + \mathfrak{v}^2)$$

genügen, wenn wir die letztere mit der oben für $\mathfrak{A}_B\,(e=0)$ gefundenen

$$a^2u_1^4 = \varpi_1^2(u_1^2 + v_1^2)$$

vergleichen, daß die Tangenten[1]) in allen bei den Linien $\mathfrak{A}$ unserer Schar auf die x_1-Achse fallenden Doppelpunkten $D_{1,2}$ (e beliebig) die mit dem Berührungsknoten in O_1 versehene Parastroide $\mathfrak{A}_B^*$ umhüllen, welche bezüglich O_1 ähnlich liegt und die doppelte Größe hat wie $\mathfrak{A}_B$. Die Tangenten in $\mathfrak{D}_{1,2}$ hüllen eine ebensolche ein, welche gegen $\mathfrak{A}_B^*$ bloß im Ausmaße $\frac{\pi}{2}$ um O_1 gedreht ist.

Hiermit sind alle den Plückerschen Zahlen (vgl. etwa E. Pascal Rep. II S. 192) $n = 6$ $d = 4$ $r = 6$, $\nu = 4$ $\delta = 3$ $\iota = 0$; ($p = 0$) entsprechenden Singularitäten der Parastroiden $\mathfrak{A}$ erschöpft und alle Formen der Parastroidenzylinder bekannt geworden, welche beim Darbouxschen Umschwunge von den zur z-Achse parallelen Ebenen Π_0 des Körpers C eingehüllt werden.

---

1) In jedem Punkte (z. B. D_1) der x_1-Achse stehen die Doppelpunktstangenten senkrecht zu jenen Radien des um D_1 als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $2a$ beschriebenen Kreises, deren Endpunkte auf der y_1-Achse liegen (Gl. 12). Analog bzl. der Punkte $(\mathfrak{D}_1)$ der y_1-Achse.

Alle beim Darbouxschen Umschwunge von beliebigen Ebenen Π eingehüllten Developpablen 4. Klasse, mit den Gleichungen (I_D) auf S. 158, sind

Parastroidenflächen gleichen Abhanges A^*

d. h. abwickelbare Flächen, die man auch erhalten kann, wenn man einen sogenannten „Keil“, also zwei unter einem festen Winkel ε gegeneinander geneigte Ebenen nimmt und mit einer Keilfläche in der Ebene der Parastroide so bewegt, daß die Keilkante t die Parastroide stets berührt: die andere Keilfläche Π hüllt dann unsere Abwickelbare ein.

Beim vollkommen flachen Umschwunge ($b = 0$), der gewöhnlichen Ellipsographenbewegung, ist dies nach unseren bisherigen Entwicklungen unmittelbar einzusehen und die Figur 11a kann als Darstellung sogenannter Niveaulinien $\mathfrak{A}$ auf einer derartigen Fläche gedeutet werden. Daß es allgemein ($b > 0$) gilt, beweisen wir unter Vergleich mit der Hüllbahn derselben Ebene Π beim völlig flachen Umschwunge durch den einfachen Hinweis darauf, daß in (I_D) das in der 4. Zeile erfolgende Hinzutreten des Gliedes $-wb \sin\vartheta$ eine bloße Parallelverschiebung der Parastroidenspur, wie sie für $b = 0$ aufträte, in der $x_1 y_1$-Ebene — und damit in jeder dazu parallelen — bedeutet.

Diese Verschiebung geschieht in der anfänglichen Richtung der Ebenenspur $t_{(\vartheta = 0)}$ und zwar werden alle Tangenten der Spur um das in dieser Richtung gemessene Stück $\underline{b \operatorname{cotg} \varepsilon}$ verschoben. Das Lot aus O_1 auf die Spur t von Π, dessen Länge $\frac{\varpi_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} = \frac{\varpi_1}{\sqrt{u^2 + v^2}}$ ist, ändert sich nämlich infolge des zu ϖ_1 hinzutretenden Gliedes um $-\frac{wb \sin\vartheta}{\sqrt{u^2 + v^2}} = b \operatorname{cotg} \varepsilon \sin\vartheta$, was gerade der beschriebenen Parallelverschiebung jeder Tangente t_ϑ und damit der ganzen Basis-Parastroide entspricht.

In der einhüllenden Keilebene Π denken wir uns durch einen Punkt $\mathfrak{a}$ der Keilkante t zur letzteren die Normale τ gezogen und sorgen dafür, daß bei unserer Erzeugung der Abwickelbaren der Punkt $\mathfrak{a}$ stets in den jeweiligen Berührungspunkt der Keilkante t mit der Basis-Parastroide $\mathfrak{A}$ fortgleitet: τ nimmt dann der Reihe nach die Lagen aller Charakteristiken der developpablen Parastroidenfläche, d. h. aller Tangenten der zugehörigen Gratlinie A^* (Rückkehrkante, Kuspidalkurve) derselben ein. A^* wird eine *Helix* auf dem senkrechten Zylinder über der regulären Astrois $\mathfrak{A}^*$, der Evolute von $\mathfrak{A}$, d. h. eine gewundene Kurve auf diesem Zylinder, deren Tangenten τ mit den Zylinderkanten stets den Winkel $\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)$ einschließen. Eine solche Helix ist samt der Zylinderfläche $\mathfrak{A}^*$ in eine Ebene abwickelbar, wobei

die vier reellen Spitzenkanten des Zylinders Parallele im Abstande $3a$ voneinander werden, da $12a$ die Gesamtlänge der Astrois ist. Zieht man nun von einem Punkte S_1 einer solchen Parallelen unter dem Winkel $\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)$ mit ihr eine Strecke $S_1 S_3$ bis zum Punkte S_3 der nächsten Parallelen, von S_3 weiter das Spiegelbild $S_3 S_2$ der vorigen Strecke bezüglich der letzteren Parallelen und sofort noch zweimal, so ist die erhaltene aus vier Strecken zusammengesetzte (auch fortsetzbare) Zickzacklinie $S_1 S_3 S_2 S_4 S_1' \ldots$ das Netz der Gratlinie, die wir „Raumastrois“ A^* nennen können, d. h. die Zickzacklinie wird zur Gratlinie selbst, wenn wir sie auf den Astroiszylinder $\mathfrak{A}^*$ zurückwickeln, sodaß die obigen Parallelen wieder Spitzenkanten werden: Die

Raumastrois A^* (Figur 11ab und 12)

kann samt ihrer Tangentenfläche durch gleitungsfreies Abrollen einer unter dem Winkel ε gegen die Basis geneigten Tangente τ des regulären Astroiszylinders $\mathfrak{A}^*$ an dem letzteren erzeugt werden, was deutlich die Entstehung der vier Spitzen, die Lagen der vier Spitzentangenten und die Symmetrieverhältnisse erkennen läßt.

Noch ehe wir die Gleichungen von A^* selbst hinschreiben, stellen wir die Cayleyschen Zahlen[1]) für den Developpablentypus 4. Klasse (Geschlecht 0) mit einer vierspitzigen Gratlinie 6. Ordnung (vgl. E. Pascal Rep. II S. 360 Typus 3 der Dev. 5. O. und S. 225), zu dem unser Olisthoidalgebilde A^* des Darbouxschen Umschwunges gehört, zusammen, um dann ohne Unterbrechung die sich ergebenden Besonderheiten zu besprechen. Wir gebrauchen im Wesen die Buchstabenzeichen Pascals (Rep. II S. 225), wobei wir auf dessen Vergleichstabelle (S. 228 ebendort) mit den Cayley-, Cremona- und Salmonschen Bezeichnungen verweisen können (siehe Tabelle auf folgender Seite).

Der Bogen der Astrois $\mathfrak{A}^*$, vom Punkte $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ gemessen, ist

$$s = -\frac{3a}{2}\cos 2\vartheta \quad \text{(G. Loria I S. 228)},$$

ferner haben wir

$$\underline{z_1 = -\frac{1}{\mathfrak{e}} s}$$

falls wir

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{cotg} \varepsilon = \mathfrak{e}$$

1) Diese stellen sich bei der Raumastrois A^*, verglichen mit den zur Bahnkurve 4. O. des Ursprunges O_1 beim Mannheimschen Umschwunge, der Doppelschleife (vgl. S. 177 Anm.) gehörigen, als dual heraus, indem die links und rechts in unserer Tabelle angeführten Zahlen sich vertauschen.

			r	Rang = Zahl der Charakteristiken der Developpablen, welche eine beliebige Gerade treffen = Zahl der Tangenten oder Tg.-Ebenen der Gratlinie, welche eine beliebige Gerade treffen = *Klasse der Raumkurve* = *Ordnung der developpablen Tangentenfläche*	$= 6$
n	Ordnung der Raumkurve	$= 6$	m	Klasse der dev. Tangentenfläche, Zahl der Schmiegungsebenen der Raumkurve durch einen Punkt	$= 4$
h	Zahl der von scheinbaren, d. h. nicht von den H wirklichen Doppelpunkten der Raumkurve herrührenden Doppelpunkte der allgemeinsten Zentral*projektion* der Raumkurve	$= 6$	g	Zahl der nicht von den G wirklichen Doppel-Schmiegungsebenen herrührenden Doppeltangenten des allgemeinsten ebenen Schnittes der Tangentenfläche	$= 2$
y	Zahl der Doppeltangenten dieser Projektion ohne Zählung der m von Schwingungsebenen herrührenden Wendetangenten = Klasse der Bitangentialdeveloppablen	$= 6$	x	Zahl der Doppelpunkte dieses Schnittes ohne Zählung der n von Raumkurvenpunkten herrührenden Spitzen = Ordnung der Knotenlinie	$= 4$
β	Zahl der Spitzen, stationären Punkte der Raumkurve	$= 4$	α	Zahl der stationären Schmiegungsebenen	$= 0$
H	Zahl der Doppelpunkte der Raumkurve	$= 0$	G	Zahl der Doppel-Schmiegungsebenen [1])	$= 1$
v	Zahl der Inflexionserzeugenden der dev. Tangentenfläche	$= 0$			
ω	„ „ Doppelerzeugenden „ „ „	$= 0$			
λ	Zahl der Tangenten, welche die Kurve noch anderswo, u. zw. nicht wie bei einem Doppelpunkte, schneiden	$= 0$	λ'	Zahl der Schmiegungsebenen, welche die Kurve noch anderswo, u. zw. ohne Doppelschmiegungsebenen zu sein, berühren	$= 0$

setzen und die $x_1 y_1$-Ebene durch die — als Niveaulinie auf der Parastroidenfläche A^* befindliche — reguläre Astrois $\mathfrak{A}_R$ so legen, daß

1) S. 199 stellt sich die unendlich ferne Ebene als Doppelschmiegungsebene von A^* in den Kreispunkten IJ dar. Die Knotenlinie (S. 202) hat außer den $k = 3$ scheinbaren noch 1 wirklichen Doppelpunkt unendlich ferne auf der z_1-Achse; ihre Klasse (Rang) ist $R = 4$.

(wie bei Gleichung 10 für $e = 0$) deren Zweispitzentangenten die Winkel der x_1- und y_1-Achse halbieren; so ergeben sich die Parametergleichungen der Raumastrois A^*

$$(14) \qquad A^* \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 2a \cos^3 \vartheta \\ y_1 &= 2a \sin^3 \vartheta \\ z_1 &= \frac{3a}{2e} \cos 2\vartheta = \mathfrak{h} \cos 2\vartheta \end{aligned} \right\}$$

wenn wir $\frac{3a}{2e} = \mathfrak{h}$ setzen.

In den *Figuren 11a, b und 12* sehen wir die $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ entsprechenden Spitzen S_1 und S_2

$$(15) \qquad x_1 = \pm 2a, \quad y_1 = 0, \quad z_1 = \frac{3a}{2e} = \mathfrak{h}$$

sowie das zu den Werten $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$ gehörige noch übrige Spitzenpaar S_3 und S_4

$$(15') \qquad x_1 = 0, \quad x_1 = \pm 2a, \quad z_1 = -\frac{3a}{2e} = -\mathfrak{h};$$

die Spitzentangenten $\sigma_1 \sigma_2$ des ersteren Paares laufen im Punkte

$$(16) \qquad \Xi \ (0, \quad 0, \quad -\tfrac{1}{3}\mathfrak{h}),$$

jene des letzteren $\sigma_3 \sigma_4$ in

$$(16') \qquad H \ (0, \quad 0, \quad +\tfrac{1}{3}\mathfrak{h})$$

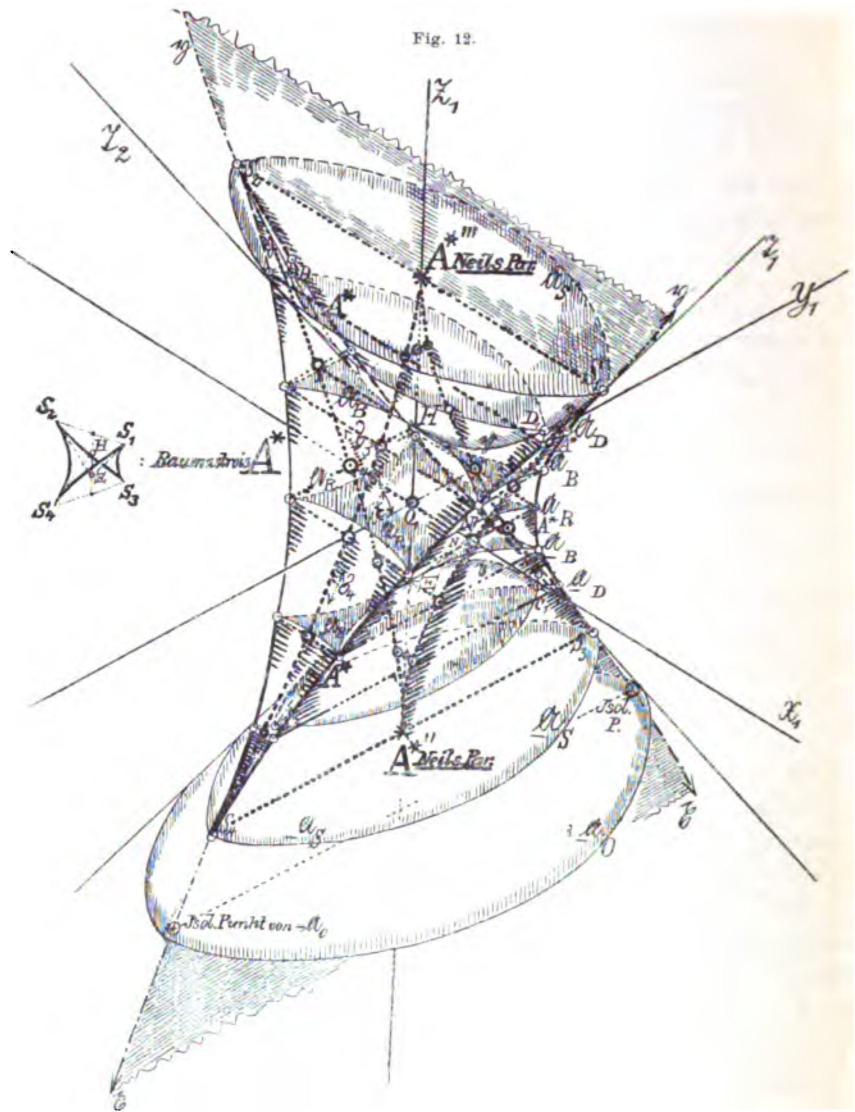
zusammen.[1]) Diese Raumastrois geht durch die *beiden* Kreispunkte IJ der $x_1 y_1$-Ebene, hat dort die unendlich fernen Geraden des Ebenenpaares $x_1^2 + y_1^2 = 0$ zu Tangenten und die *unendlich ferne Ebene* zur Schmiegungsebene (vgl. später das Glied von der Dimension 6 in der Gleichung 17‴ der Tangentenfläche); hiernach sind ihre schiefen Parallelprojektionen auf die $x_1 y_1$-Ebene zirkuläre Kurven (6. Ordnung) mit der unendlich fernen Geraden als Doppelwendetangente und bei Orthogonalprojektion ($\mathfrak{A}^* = A^{*\prime}$) als Doppelspitzentangente. Ihre orthogonalen Projektionen $A^{*\prime\prime}$ und $A^{*\prime\prime\prime}$ auf die $x_1 z_1$- und $y_1 z_1$-Ebene sind kongruente Kuspidalparabeln (semikubische oder Neïlsche Parabel,

1) E. Pascal nimmt (im Rep. II S. 360), einer (unter den dort S. 361 angegebenen) Quelle folgend an, daß die 4 *Ebenen*, welche die Developpable längs der 4 Kuspidalerzeugenden (6) berühren, durch den nämlichen Punkt gehen. Dies ist irrig, wie A^* als Beispiel zeigt. Damit in unseren Figuren 11 und 12 das von diesen 4 Ebenen gebildete *Tetraeder* ein reguläres wird, brauchten wir nur $\operatorname{tg} \varepsilon = \sqrt{2}$ anzunehmen.

G. Loria, Ebene Kurven S. 261 und 18) mit der z_1-Achse als Spitzentangente (Figur 11b und 12):

$$\begin{cases} A^{*''} \text{ mit der Spitze in } (0, 0, -\mathfrak{h}) \text{ berührt } \sigma_1\sigma_2 \text{ in } S_1, \text{ bzw. } S_2, \\ A^{*'''} \text{ „ „ „ „ } (0, 0, +\mathfrak{h}) \text{ „ } \sigma_3\sigma_4 \text{ „ } S_3, \text{ „ } S_4. \end{cases}$$

Fig. 12.



Die Raumastrois A^* mit ihrer Tangentenfläche, der Parastroidenfläche, welche beim Darbouxschen Umschwunge als Olisthoidalfläche erzeugt wird.

Beide projizierenden Zylinder $A^{*''}$ und $A^{*'''}$ zusammen bilden die *Bitangentialdeveloppable* der Raumastrois.

Die $x_1 z_1$-Ebene, worin $S_1 \sigma_1 \Xi \sigma_2 S_2$ liegen und die
$y_1 z_1$- " , " $S_3 \sigma_3 H \sigma_4 S_4$ " , sind Symmetrieebenen der Raumkurve und neben der z_1-Achse sind noch die Zweispitzentangenten $(x_1 \pm y_1 = 0,\ z_1 = 0)$ des regulären Hauptschnittes $\mathfrak{A}_R$ der Tangentenfläche Symmetrieachsen, so daß wir die Kurve A^* selbst in 8 kongruente Teile zerlegt denken können, welche immer abwechselnd in einer Spitze $S_{1,\,2,\,3,\,4}$ der A^* selbst und in einer Spitze[1] $\left(\pm \frac{a}{\sqrt{2}} \pm \frac{a}{\sqrt{2}}, 0\right)$ der regulären ebenen Astrois $\mathfrak{A}_R$ zusammenhängen; am letzteren Orte *ohne* dortselbst etwas anderes stationär zu haben, als die Krümmung. In der Figur 12 sind außer $\mathfrak{A}_R$ noch einige andere Parallelschnitte der Tangentenfläche $\mathfrak{A}$ verzeichnet, deren Spitzen sämtlich auf A^* liegen.

Die Gleichungen der Tangentenfläche von A^*, der developpablen Fläche gleichen Abhanges (ε) über $\mathfrak{A}_R$ sind zufolge (10) in Plückerschen Koordinaten

$$(17)\quad A^*\left\{\begin{aligned} u_1 &= u\cos\vartheta \\ v_1 &= -u\sin\vartheta \\ w_1 &= \mathfrak{e}u \quad \text{(Gleichung 13 und S. 196 bzl. } \mathfrak{e} \text{ und } \varepsilon \text{ zu vgl.)} \\ \varpi_1 &= u\left(a\sin^2\vartheta - \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{2}u\cos 2\vartheta \end{aligned}\right\}$$

anders geschrieben

$$(17')\qquad A^*\left\{\begin{aligned} a^2(u_1^2 - v_1^2)^2 &= 4\varpi_1^2(u_1^2+v_1^2) \\ w_1^2 &= \mathfrak{e}^2(u_1^2+v_1^2) \end{aligned}\right\},$$

in welcher letzten Form sie jedoch auch noch die bezüglich der $x_1 y_1$-Ebene (w_1) zu A^* symmetrische Fläche entgegengesetzt-gleichen Abhanges ($-\varepsilon$) über $\mathfrak{A}_R$ mit darstellen. In Punktkoordinaten ergeben sich aus (10″) und (10‴), wenn hierin $e = \mathfrak{e} z_1$ gesetzt wird, die Gleichungsformen der Tangentenfläche:

$$(17'')\quad A^*\left\{\begin{aligned} x_1 &= a\cos\vartheta - \left(\frac{a}{2}\cos 2\vartheta - \mathfrak{e}z\right)\cos\vartheta = a\cos\vartheta\left(\tfrac{3}{2} - \cos^2\vartheta\right) + \mathfrak{e}z_1\cos\vartheta \\ y_1 &= a\sin\vartheta + \left(\frac{a}{2}\cos 2\vartheta - \mathfrak{e}z\right)\sin\vartheta = a\sin\vartheta\left(\tfrac{3}{2} - \sin^2\vartheta\right) - \mathfrak{e}z_1\sin\vartheta \end{aligned}\right\}$$

---

1) Eine solche ist z. B. in der Figur 12 dicht *über* dem mit Ξ bezeichneten Punkte *abgebildet*, aber mit keinem Buchstaben bezeichnet. Ξ selbst liegt auf der z_1-Achse, also nicht in der Ebene von $\mathfrak{A}_R$, der $x_1 y_1$-Ebene.

bezw.

$$\left\{\begin{aligned} &4(x_1^2 + y_1^2 - a^2 + 4\mathfrak{e}^2 z_1^2)^3 - 16\mathfrak{e}^2 z_1^2 (x_1^2 + y_1^2 - a^2 + 4\mathfrak{e}^2 z_1^2)^2 \\ &\quad - 72\mathfrak{e} z_1 (x_1^2 + y_1^2 - a^2 + 4\mathfrak{e}^2 z_1^2)[2\mathfrak{e} z_1 (x_1^2 + y_1^2) - a(x_1^2 - y_1^2)] \\ &\quad + 27[2\mathfrak{e} z_1 (x_1^2 + y_1^2) - a(x_1^2 - y_1^2)] \\ &\quad + 256\mathfrak{e}^3 z_1^3 [2\mathfrak{e} z_1 (x_1^2 + y_1^2) - a(x_1^2 - y_1^2)] = 0 \end{aligned}\right\}$$

oder nach den Dimensionen der Glieder geordnet:

$$(17''')\quad A^*\left\{\begin{aligned} &\underline{4(x_1^2 + y_1^2)^2 (x_1^2 + y_1^2 - \mathfrak{e}^2 z_1^2)} \\ &- 4a\mathfrak{e} z_1 (x_1^2 - y_1^2)(9[x_1^2 + y_1^2] + 64\mathfrak{e}^2 z_1^2) \\ &+ 15a^2(x_1^4 + y_1^4) - 78a^2 x_1^2 y_1^2 + 80a^2\mathfrak{e}^2 z_1^2 (x_1^2 + y_1^2) - 64a^2\mathfrak{e}^4 z_1^4 \\ &- 72a^3\mathfrak{e} z_1 (x_1^2 - y_1^2) \\ &+ 4a^4(3[x_1^2 + y_1^2] + 8\mathfrak{e}^2 z_1^2) \\ &- 4a^6 \end{aligned}\right\} = 0.$$

Letztere Form eignet sich z. B. zur Feststellung des Verhaltens der Raumastrois in unendlicher Form und zur Bestätigung der ebenfalls schon oben angegebenen Symmetrieverhältnisse: Die Tangenten $x_1^2 + y_1^2 = 0$ des absoluten Kugelkreises sind in der unendlich fernen Ebene beide doppelt zu zählen, neben ihnen tritt als Spur der Tangentenfläche in dieser Ebene noch der zu ε gehörige Direktionskegelschnitt auf; die Gleichung 17''' geht ferner in sich selbst über, wenn x_1 mit y_1 und zugleich z_1 mit $-z_1$ vertauscht wird.

Die Tangentenfläche durchsetzt die $\left\{\begin{matrix} x_1 z_1\text{-} \\ y_1 z_1\text{-} \end{matrix}\right\}$Ebene außer in den zu den Spitzen $\begin{matrix} S_1 S_2 \\ S_3 S_4 \end{matrix}$ der Raumastrois gehörigen Tangenten $\begin{matrix} \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_3 \sigma_4 \end{matrix}$, welche sich in $\begin{matrix} \Xi \\ H \end{matrix}$ schneiden, noch in der doppelt zu zählenden Parabel $\begin{matrix} \mathfrak{y} \\ \mathfrak{x} \end{matrix}$, welche die Achse z_1, den Scheitel $\begin{matrix} H \\ \Xi \end{matrix}$ (16) hat und die Kuspidaltangenten $\begin{matrix} \sigma_1 \sigma_2 \\ \sigma_3 \sigma_4 \end{matrix}$ in den Spitzen $\begin{matrix} S_1 S_2 \\ S_2 S_4 \end{matrix}$ berührt. Beide Parabeln $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ bilden die Knotenlinie der Tangentenfläche. Ihre Gleichungen sind bequemer als durch 17''' schon durch (12) gegeben, wenn dort $\mathfrak{e} z_1$ statt e gesetzt wird,

$$(18)\qquad \begin{aligned} &\mathfrak{y} \ldots x_1^2 = 2a(-a + 2\mathfrak{e} z_1), \quad y_1 = 0 \\ &\mathfrak{x} \ldots y_1^2 = 2a(-a - 2\mathfrak{e} z_1), \quad x_1 = 0. \end{aligned}$$

Die *Figur 12* zeigt auch die Doppelpunkte der Parallelschnitte $\mathfrak{A}$ der Tangentenfläche mit den Ebenen $z_1 = \text{const.}$ auf diesem Parabelpaare. Der Schnitt der Fläche (gleichen Abhanges)

mit $z_1 = 0$ ist die reguläre Astrois $\mathfrak{A}_R$, ihre Doppelpunkte sind imaginär; der Schnitt

„ $z_1 = \pm \frac{\mathfrak{h}}{3} = \pm \frac{a}{2\mathfrak{e}}$ ist die Parastroide $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_B}{-\mathfrak{A}_B}$ mit dem *Berührungsknoten* im Scheitel $\genfrac{}{}{0pt}{}{H}{\Xi}$ der Parabel $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ und der Scheiteltangente von $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ als Knotentangente; von da ab werden die Doppelpunkte der Parallelschnitte reell und zwar vorläufig auch mit reellen Doppelpunktstangenten versehen, wie beispielsweise der Schnitt

„ $\left\{\begin{array}{l} \frac{\mathfrak{h}}{3} < z_1 = \text{const.} < \mathfrak{h} \\ -\frac{\mathfrak{h}}{3} > z_1 = \text{const.} > -\mathfrak{h} \end{array}\right\}$ die Parastroide $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_D}{-\mathfrak{A}_D}$ mit ihren Doppelpunkten $\genfrac{}{}{0pt}{}{D_1 D_2}{\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2}$ auf $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}}$ zeigt. Der Schnitt

„ $z_1 = \pm \mathfrak{h}$ liefert die Parastroide $\genfrac{}{}{0pt}{}{\mathfrak{A}_S}{-\mathfrak{A}_S}$ mit dem Paare dreifacher Punkte $\genfrac{}{}{0pt}{}{S_1 S_2}{S_3 S_4}$. Wenn sich die schneidende Ebene noch mehr von der $x_1 y_1$-Ebene entfernt, so daß die auf der Raumastrois A^* gelegenen Spitzen imaginär werden, so werden auch die auf der Knotenlinie $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ befindlichen Doppelpunkte isoliert, wie z. B. für den Schnitt

„ $-\mathfrak{h} > z = \text{const.} > -\infty$ welcher in der Figur 12 als $-\mathfrak{A}_0$ eingezeichnet ist, eine ovale Form von $\mathfrak{A}$ erscheint, deren isolierte Punkte auf der einen Parabel ($\mathfrak{x}$) zu sehen sind, wobei das zweite imaginäre Doppelpunktepaar (auf $\mathfrak{y}$) hinzugedacht werden möge.

Wenn man berücksichtigt, daß auf jeder Tangente τ der Raumastrois das Stück zwischen ihren beiden Scknittpunkten D mit $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{D}$ mit $\mathfrak{x}$, konstante Länge besitzt, da in der Figur 11 die Projektion $D'\mathfrak{D}'$ dieses Stückes als von den Zweispitzentangenten der $A^{*\prime} = \mathfrak{A}^*$ abgeschnitten, die Länge $2a$ behält und τ gegen die Projektionsebene $x_1 y_1$ unter dem Winkel ε geneigt bleibt,

$$D\mathfrak{D} = \frac{2a}{\cos\varepsilon} = \frac{2a}{\mathfrak{e}}\sqrt{1+\mathfrak{e}^2} = \sqrt{(2a)^2 + (\tfrac{4}{3}\mathfrak{h})^2} = \Xi S_1 = \Xi S_2 = H S_3 = H S_4,$$

erkennt man folgende tangentenweise Konstruktion der Raumastrois A^*:

„Läßt man bei einem kongruenten Parabelpaare ($\mathfrak{y}\mathfrak{x}$ mit den Scheiteln $H\Xi$) mit gemeinsamer Achse, aber in zu einander senkrechten Ebenen, *eine Strecke* ($D\mathfrak{D}$), deren Länge konstant und gleich ist der Tangente aus dem Scheitel der einen Parabel an die andere, mit dem einen Endpunkte auf der einen, und dem anderen Endpunkte auf der anderen Parabel gleiten, so beschreibt diese Strecke die Tangentenfläche einer Raumastrois."

Will man die Schmiegungsebenen der Raumastrois übersehen, so braucht man nur einen Punkt L auf der Strecke $H\Xi$ der gemeinsamen Achse beider Parabeln laufen zu lassen und aus jeder Lage von L das Tangentenpaar sowohl an die eine ($\mathfrak{y}$) als auch an die andere Parabel ($\mathfrak{x}$) zu legen. Die vier Ebenen, welche eine Tangente des ersten Paares mit einer des zweiten verbinden, sind die 4 Schmiegungsebenen durch L, da die Tangentenfläche von A^* als Bitangentialdeveloppable ihrer eigenen Knotenlinie erzeugbar ist. Die Charakteristik, d. h. die Tangente τ der Raumastrois führt hierbei vom Berührungspunkte (D) mit der einen Parabel zu einem ($\mathfrak{D}$) mit der anderen. Die 4 Schmiegungsebenen durch einen beliebigen Raumpunkt sind die Bitangentialebenen des Kegelpaares, welches $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ aus diesem Punkte projiziert.

Das isometrische Bild der Raumastrois A^* in der Figur 12 zeigt in Übereinstimmung mit den Plückerschen, bzw. Cayleyschen Formeln eine ebene Kurve 6. Ordnung und 6. Klasse mit 6 Doppelpunkten, 6 Doppeltangenten, 4 Spitzen und 4 Wendetangenten, und zwar ist von den Doppelpunkten auf der durch O_1 gelegten zu Z_1 senkrechten Symmetrieachse dieser Kurve in der Zeichenebene ein solcher auf dem reellen Kurvenzuge selbst zu sehen, ein 2ter auf dieser Symmetrieachse isoliert, während die restlichen 4 zum imaginären Teile der Linie gehören. Die 4 Spitzenbilder sind reell. Von den 4 Wendetangenten bilden 2 den Umriß $J_1 J_2$ des Tangentenflächenbildes, es sind dies die beiden im Endlichen liegenden Doppeltangenten des mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ bezeichneten Parabelpaares der Zeichenebene; die Wendepunkte auf ihnen liegen sehr nahe an S_1, bzw. S_3. Die *unendlich ferne Gerade* gilt für 2 Wendetangenten und zwar in den unendlich fernen imaginären Bildern der Kreispunkte IJ der $x_1 y_1$-Ebene (welche also selbst keineswegs die Kreispunkte der Zeichenebene sind) als Wendepunkten. Sie zählt auch für 4 Doppeltangenten. Die restlichen 2 Doppeltangenten des Astroisbildes gehören zu imaginären Berührungspunkten, sind aber selbst reell und zwar bestehen sie als Spuren der zur Zeichenebene senkrechten Tangentialebenen des Neilschen Zylinderpaares $A^{*''}A^{*'''}$ — der Bitangentialdeveloppablen von A^* (S. 200) — aus den beiden unter 60° gegen das z_1-Bild geneigten Tangenten der mit $A^{*''}$ und $A^{*'''}$ bezeichneten Neilschen Parabelbilder der Zeichenebene.

Eine besonders ausgezeichnete Projektion der Raumastrois, in der Figur 13 dargestellt, wird als orthogonale Abschattung auf eine jener beiden durch die z_1-Achse gelegten Ebenen ($x_1 \pm y_1 = 0$) gewonnen, in denen die Zweispitzentangenten der ebenen regulären Astzrois $\mathfrak{A}_{R(z_1=0)}$ liegen; wenn wir in einer dieser

Ebenen, die zu z_1 senkrechte Achse für den Augenblick mit x bezeichnen, haben wir die Paradarmeterstellung dieser ebenen Kurve aus (14) in der Form

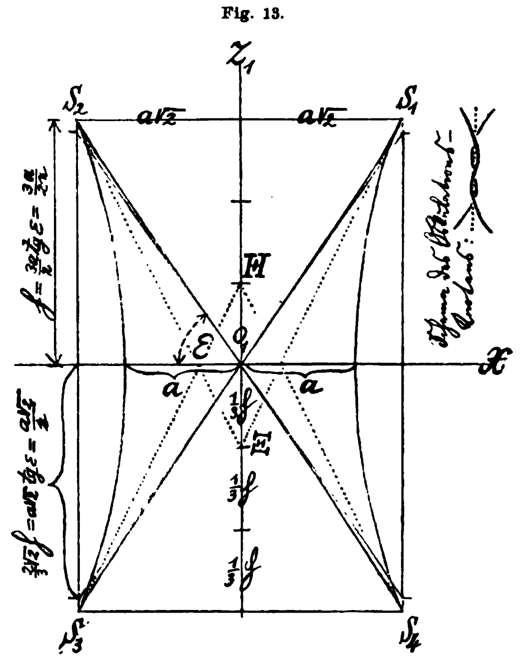
$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}(\cos^3\vartheta - \sin^3\vartheta) \\ z_1 &= \mathfrak{h}\cdot\cos 2\vartheta \end{aligned}\right\}$$

und die Cartesische Gleichung

$$a^4 z_1^6 + 2\mathfrak{h}^2(2\mathfrak{h}^4 x^4 - 6a^2\mathfrak{h}^2 x^2 z_1^2 + 3a^4 z_1^4) - a^2\mathfrak{h}^4(4\mathfrak{h}^2 x^2 - 9a^2 z_1^2) = 0.$$

Diese Projektion ist symmetrisch bezüglich ihrer Koordinatenachsen und hat im Anfange O_1 einen *Knoten* mit doppelter *Inflexion* und zwar mit den 2, unter ε $\left(\operatorname{cotg}\varepsilon = \mathfrak{e} = \frac{3a}{2\mathfrak{h}}\text{ vgl. 13, 14}\right)$ gegen die x-Achse geneigten Wendetangenten, denen die Kurve in ihrem Verlaufe bis zu den Spitzen nahe bleibt; ferner hat sie in unendlicher Ferne auf der x-Achse einen isolierten Oskulationsknoten, wohin *zwei* Wendepunkte *mit der unendlich fernen Geraden als — dementsprechend doppelter — Wendetangente* zusammengerückt sind. Wie oben ist die vierspitzige Kurve von der Ordnung und Klasse 6; von den 6 Doppelpunkten sind 3 im Oskulationsknoten, einer in O_1 und noch zwei imaginäre auf der z_1-Achse; alle 6 Doppeltangenten werden von der unendlich fernen Oskulationsknotentangente absorbiert.

Fig. 13.

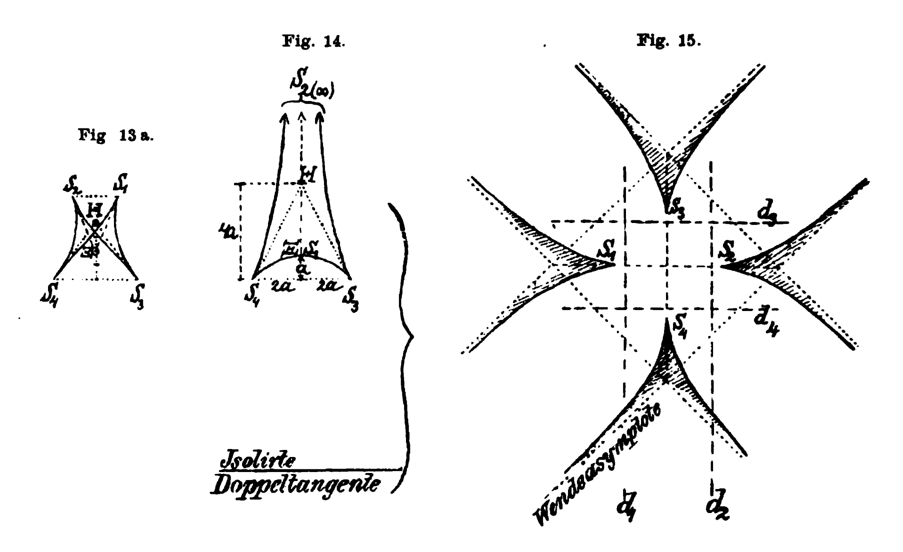


Eine Projektion der Raumastrois.

Die orthogonale Projektion der Raumastrois der Figur 13a, auf eine andere durch z_1 gelegte Ebene, hat nur die z_1-Achse selbst zur Symmetralen und auf ihr den nichtisolierten und 2 imaginäre Doppelpunkte; sie zeigt in der dazu senkrechten Richtung genau wie die Linie der Figur 13 als isolierten Oskulationsknoten den 3 Doppelpunkte absorbierenden doppelten Wendepunkt mit seinen in der unendlich fernen Geraden zusammenfallenden Oskulationstangenten, so daß gar keine im Endlichen gelegene Doppeltangente übrig bleibt.

Beachtenswert ist auch die Zentralprojektion der Raumastrois A^* aus einer ihrer Spitzen. *Jede* Zentralprojektion 6. Ordnung von A^* zeigt 6 Doppeltangenten, von welchen immer 3 als Spuren zu den 3 Tangentialebenen gehören, welche durch diesen Punkt an einen der beiden Neilschen Parabelzylinder $A^{*\prime\prime}$ und $A^{*\prime\prime\prime}$ — (S. 200, in welche die Bitangentialdeveloppable von A^* zerfällt) — gelegt werden können, und deshalb alle 3 im nämlichen Punkte zusammenlaufen, im Spurpunkte

der durchs Projektionszentrum zur Achse y_1, bzw. x_1 gelegten Parallelen. Wird nun das Zentrum speziell in einer Spitze von A^* etwa in S_1 angenommen, so artet der irreduzible Hauptbestandteil der Spur, welcher in der *Figur 14* als Projektion auf die $x_1 y_1$-Ebene gezeichnet ist, in eine nur *dreispitzige* Linie 4. Ordnung und 3. Klasse mit *einer* und zwar isolierten Doppeltangente aus, welche reell-kollinear ist zur Steinerschen dreispitzigen Hypozykloide (G. Loria S. 146), aber in *keiner* Ebene eine solche selbst werden kann; um nämlich eine zirkuläre



Projektion der A^* zu erhalten, muß man den projizierenden Kegel S_1 mit einer Ebene $z_1 = \text{const.}$ schneiden, dort aber zeigt sich als Doppeltangente eine im *Endlichen* gelegene Spur der betreffenden Tangentialebene von $A^{*''}$. Die Projektion der Spitze S_2 wird unendlich fern auf der Projektion der z_1-Achse, welche Symmetrale bleibt.

Es kann nicht unsere Aufgabe sein, die ganze Mannigfaltigkeit der Projektionsformen der Raumastrois zu besprechen; wir schließen deshalb diesen Abschnitt mit der Erwähnung der durch 4 $\left(\text{sich in einem Punkte unter } \frac{\pi}{4} \text{ schneidenden}\right)$ Symmetrieachsen ausgezeichneten zirkulären Projektionskurve 6. Ordnung, welche in einer Ebene $z_1 = \text{const.}$ erscheint, wenn man den Ursprung als Projektionszentrum wählt (Figur 15). Diese Symmetrieachsen sind abwechselnd Zweispitzentangenten und solche, auf denen sich außer einem unendlich fernen nichtisolierten Knoten mit doppelter Inflexion noch ein symmetrisches Paar imaginärer Doppelpunkte befindet. Die neben den 2 Zweispitzentangenten noch übrigen 4 Doppeltangenten $d_{1,2,3,4}$ sind isoliert, d. h. berühren die Kurve in imaginären Punkten. Man erkennt deutlich die 6 reellen Tangenten, welche an diese (in der Ebene ein „Streifenkreuz“ abgrenzende) Kurve aus einem beliebigen Punkte eines der vier Spitzenzwickel bei den Ecken und innerhalb der Fläche des Wendeasymptotenquadrates gelegt werden können.

Die Punktbahnen beim Mannheimschen Umschwunge.

Die Bahnen der Punkte der z_1-Achse sind — als kongruent zu jener des Anfanges O_1 (S. 176 u. f.) — schon erledigt. Nun betrachten wir zuerst die Bahnen der Punkte der Ebene $x_1 = 0$, wobei es natürlich genügt, auf jeder Parallelen zu z_1 in dieser Ebene nur *einen* Punkt heranzuziehen, weil die übrigen Punkte derselben Parallelen kongruente Kurven zeichnen, so daß die Untersuchung der Bahnen von Punkten δ der Geraden

$$\underline{\Delta}_{1(\vartheta=0)}$$

(Gleichung 8) ausreicht. Diese sind durch

$$(\delta) \qquad x_1 = 0, \quad y_1 = -a\lambda, \quad z_1 = -b\lambda$$

mit Hilfe des Parameters λ dargestellt. Aus den Bewegungsgleichungen (1_M) erkennen wir für diese Punkte δ, daß ihre Bahnkurven $\delta_{(\vartheta)}$

$$(19) \qquad \begin{cases} x = a \sin^2\vartheta & + a\lambda \sin\vartheta \\ y = -a \sin\vartheta \cos\vartheta & - a\lambda\cos\vartheta \\ z = -b \sin\vartheta & - b\lambda \end{cases}$$

rationale Kurven 4. Ordnung mit einem wirklichen Doppelpunkte im Anfange O sind; letzterer ergibt sich für ϑ-Werte, welche zu

$$\sin\vartheta = -\lambda$$

gehören, wie auch das Studium des Nebenapparates (Figur 5) lehrt, mit dessen Bügel die Gerade $\underline{\Delta}_1$ im Prismenlager (dessen Körper selbst um z drehbar ist) gleitet. Diese Raumkurven, bei deren Betrachtung wir, ohne ihre Formenmannigfaltigkeit einzuschränken, uns auf positive Werte von λ beschränken können[1]), sind die Durchdringungen (Figur 16abc) eines und desselben Umdrehungskegels $O(\underline{\Delta}_1)$, dessen Kanten $\underline{\Delta}_{1(\vartheta)}$ im Scheitel O mit der z-Achse den Winkel $\psi = \text{arc tg}\,\frac{a}{b}$ einschließen, mit dem auf die xz-Ebene projizierenden parabolischen Zylinder Λ''', welcher merkwürdigerweise für alle Werte von λ *kongruent* bleibt und nur verschoben liegt, verglichen mit dem (auf S. 178 und 181) kennen gelernten Zylinder $\mathfrak{D}$, welcher die gleichteilige Doppelschleife, die Bahn des Ursprunges O_1, auf die xz-Ebene senkrecht abschattet.

---

1) Die zu $+\lambda$ und $-\lambda$ gehörigen *zwei* Bahnkurven sind kongruent und bezüglich der x-Achse *symmetrisch* zu einander gelegen, sie gehen Punkt für Punkt in einander über, wenn man außer λ mit $(-\lambda)$ noch ϑ mit $(-\vartheta)$ vertauscht und (den positiven Sinn auf der y- und z-Achse entgegengesetzt annimmt, d. h.) an der x-Achse spiegelt.



Um letzteres nachzuweisen, verschiebt man den *Zylinder* A''' (mit den Gleichungen 19, erste und dritte Zeile) gemäß den Transformationsgleichungen

$$\left\{\begin{aligned} x &= x' - \frac{a}{4}\lambda^2 \\ z &= z' - \frac{b}{2}\lambda \end{aligned}\right\},$$

was zu

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \quad a \sin^2\vartheta + a\lambda \sin\vartheta + \frac{a}{4}\lambda^2 \\ z' &= -b \sin\vartheta - \frac{b}{2}\lambda \end{aligned}\right\}$$

führt, und sieht, daß der Brennpunktsabstand l' von der Direktrix bei der *Basisparabel* A''' (in der xz-Ebene)

$$l' = \frac{z'^2}{2x'} = \frac{b^2}{2a} = l$$

konstant, gleich jenem von $\mathfrak{D}$ ist. $A''' \simeq \mathfrak{D}$; die Scheitel aller Parabeln A''' (λ beliebig) in der xz-Ebene erfüllen das Spiegelbild von $\mathfrak{D}$ bezüglich $x = 0$.

Noch auf dem Umdrehungskegel $\mathfrak{S}$ mit der Gleichung

$$\left[x - \frac{a}{2}(1-\lambda^2)\right]^2 + y^2 = \frac{a^2\lambda^2}{b^2}\left[z - \frac{b}{2}\frac{1-\lambda^2}{\lambda}\right]^2, \tag{20}$$

also mit dem Scheitel Σ

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{a}{2}(1-\lambda^2) \\ \eta &= 0 \\ \zeta &= \frac{b}{2}\frac{1-\lambda^2}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

und dem ebenfalls mit λ veränderlichen Kreise

$$x^2 + y^2 = a(1-\lambda^2)\,x$$

der xy-Ebene als Basis *liegt diese Bahnkurve*, wovon man sich durch Substitution von (19) in (20) überzeugen möge. Von den beiden Konturkanten dieses Kegels in der xz-Ebene umhüllt die eine, ΣO mit der Gleichung ($bx - a\lambda z = 0$), den Ursprung O, die andere aber, ΣHT in der Figur 16b, mit der Gleichung

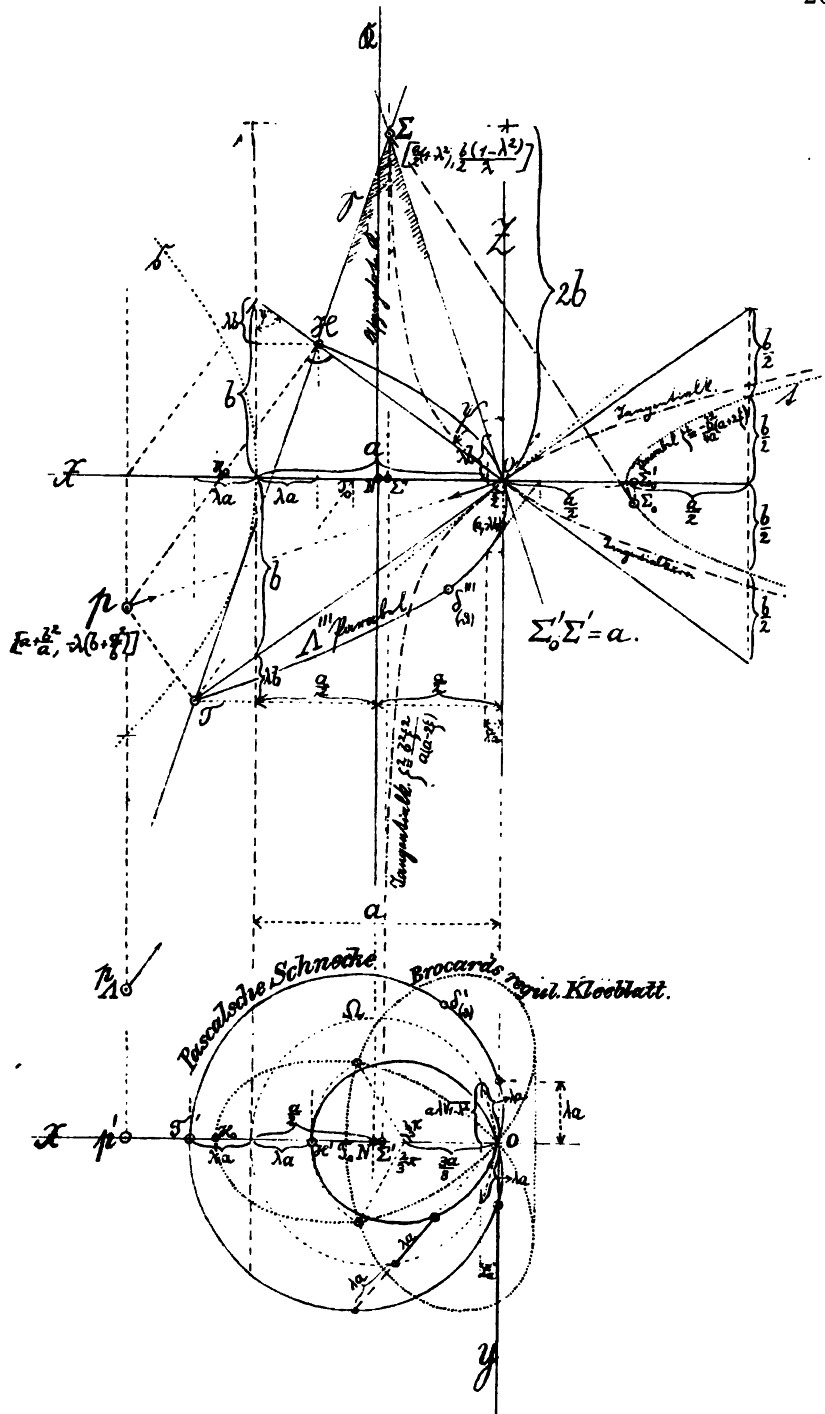
$$bx + a\lambda z = ab(1-\lambda^2),$$

berührt die Parabel „$\mathfrak{Z}$“

$$\left\{\begin{aligned} x &= \quad a(1+\lambda^2) \\ z &= -2b\lambda \end{aligned} \quad \ldots \quad z^2 = \frac{4b^2}{a}(x-a)\right\}.$$

Der Scheitel Σ dieses Umdrehungskegels $\mathfrak{S}$ wandert bei veränderlichem λ auf der durch (21) oder

$$a(a-2\xi)\,\zeta^2 = b^2\xi^2 \tag{21'}$$



Pascalsche Schnecke
Brocards regul. Kleeblatt.
Tangentiallinie
Λ''' Parabel
$\Sigma_0'\Sigma' = a.$
2b

dargestellten Tangentialkurve (Figur 16b) der Parabel

$$\mathrm{t} \ldots \zeta^2 = -\frac{b^2}{4a}(a + 2\xi);$$

[vgl. G. Loria II. Bd. S. 701[1]) und Figur 147; Hochheim „Tangentialkurven der Kegelschnitte" in der Zeitschrift für Mathematik XV, 1870;] diese ist der Ort der Endpunkte von Strecken $\Sigma_0\Sigma$, welche auf einer beliebigen Tangente der letzteren Parabel (t) vom Berührungspunkte Σ_0 aus derart lang abgetragen werden, daß die Lote aus Σ_0 und Σ zur Parallelachse auf der letzteren ein Stück $\Sigma_0'\Sigma'$ von der Länge $+a$ abschneiden.[2])

Aus dem Zylinder A''' und dem Kegel $\mathfrak{S}$ besteht die Bitangentialdeveloppable von $\delta_{(\vartheta)}$; die Knotenlinie ihrer Tangentenfläche zerfällt analog (S. 182, Fig. 8) jener der gleichteiligen Doppelschleife in 2 Spitzkurven 3. Ordnung, in der Ebene $y = 0$ die eine und in der Polarebene von Σ bezüglich des parabolischen Zylinders A''' die andere, mit in O vereinigten Spitzen und der Schnittlinie der genannten Ebenen als gemeinsamer Spitzentangente.

In der Figur 16a ist die Projektion einer solchen Bahnlinie $\delta_{(\vartheta)}$ auf die xy-Ebene

In der Figur 16b ist die Projektion einer solchen Bahnlinie $\delta_{(\vartheta)}$ auf die xz-Ebene

In der Figur 16c ist die Projektion einer solchen Bahnlinie $\delta_{(\vartheta)}$ auf die yz-Ebene dargestellt.

Die erste ist wegen ihrer Konchoideneigenschaft zum Kreise $\Omega(x^2+y^2=ax)$ bezüglich des Ursprunges O als Pol sogleich als Pascalsche Schnecke[3]) zu erkennen; besonders die Bewegung unseres Nebenapparates läßt diese Eigenschaft deutlich hervortreten. Auch liefern die Glei-

---

1) Dort ist, um einen Druckfehler zu verbessern, unterhalb (26) $4x'y'^2 = p(2x' - k)^2$ zu schreiben.

2) Bei unserer Parabel ist

$$\left\{\begin{aligned} \zeta = f(\xi) &= \frac{b}{2\sqrt{a}}\sqrt{-(a+2\xi)} \\ f'(\xi) &= -\frac{b}{2\sqrt{-a(a+2\xi)}} \end{aligned}\right\},$$

daher die Gleichung dieser Tangentialkurve

$$\zeta' = f(\xi' - a) + af'(\xi' - a) \qquad (\xi = \xi' - a)$$

wirklich

$$\zeta'^2 = \frac{b^2\xi'^2}{a(a - 2\xi')},$$

in Übereinstimmung mit (21'), wenn die Akzente wieder fortgelassen werden.

3) Vgl. etwa G. Loria I. Bd. Fig. 28abc der Tafel IV und S. 136 etc. oder E. Pascals Rep. II. S. 537.

chungen (19) $\left\{\begin{array}{l} x = \quad a\sin\vartheta(\lambda+\sin\vartheta) \\ y = -a\cos\vartheta(\lambda+\sin\vartheta) \end{array}\right\}$ die bekannte Gleichung der Schnecke

$$(x^2+y^2-ax)^2 = \lambda^2 a^2 (x^2+y^2). \tag{22}$$

Die zweite ist die eben (S. 207) aufgetretene Parabel $\varDelta'''$; die dritte dagegen können wir durch

$$\left.\begin{array}{l} y=-a\cos\vartheta(\lambda+\sin\vartheta) \\ z=-b \quad\quad (\lambda+\sin\vartheta) \end{array}\right\} \text{ oder } a^2z^4+2a^2b\lambda z^3-(1-\lambda^2)a^2b^2z^2+b^4y^2=0 \tag{23}$$

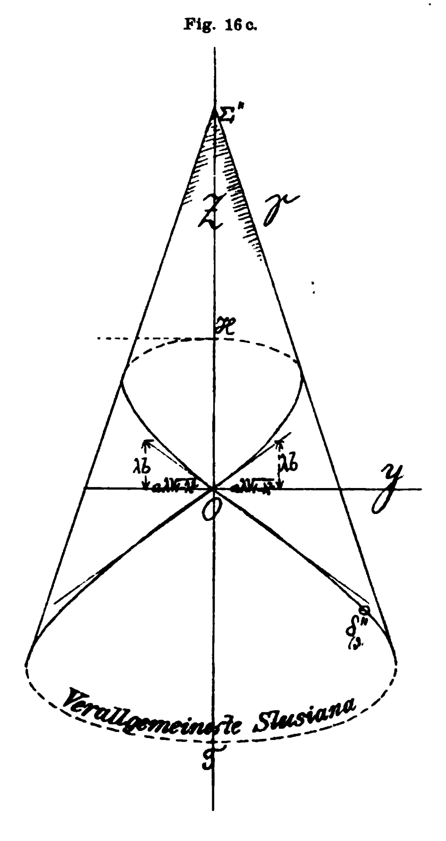
darstellen und mit Rücksicht auf das S. 178 Angeführte „verallgemeinerte Slusiana" nennen. Man verfolge die bezüglich $y=0$ *symmetrischen* Gestalten dieser *Bahnlinien* und ihrer drei Projektionen

für $\lambda < 1$, wo der wahre Doppelpunkt in O nichtisoliert, die Kurve als Doppelschleife, und zwar falls λ nicht verschwindet, als „ungleichteilige" Schleife erscheint; und

„ $\lambda > 1$, wo O als Doppelpunkt isoliert, die Kurve als hutkrempenartig im Raum gewundenes (vorn etwas näher zusammengebogenes) Oval erscheint; schließlich beachte man insbesondere den Grenzfall

$\lambda = 1$ einer (rationalen) räumlichen Spitzkurve 4. Ordnung: $\varDelta$.

Fig. 16 c.



Die Tangenten im wahren Doppelpunkte O der Bahnlinie sind die zu $\sin\vartheta = -\lambda$ gehörigen, bezüglich der xz-Ebene symmetrischen Kanten des von $\underline{\varDelta_1}$ beschriebenen Umdrehungskegels $O(\varDelta_1)$. Cayleys charakteristische Zahlen für diese Bahnlinien sind schon (S. 177 Anm.) angeführt worden, die zur Spitzkurve gehörigen sind[1])

1) Vgl. E. Pascal, Rep. II S. 225, 255 oder, in der vorliegenden Abhandlung S. 198; wo die Bedeutung dieser Zahlen angegeben ist.

$r = 5$	
$n = 4$	$m = 4$
$h = 2$	$g = 2$
$y = 2$	$x = 2$
$\beta = 1$	$\alpha = 1$
$H = 0$	$G = 0$

$v = 0$
$w = 0$

$\lambda = 0$	$\lambda' = 0.$

Von allen diesen Bahnlinien $\delta_{(\vartheta)}$ wird die unendlich ferne Ebene in den Kreispunkten IJ der xy-Ebene berührt, und zwar mit den auf $x^2 + y^2 = 0$ gelegenen unendlich fernen Tangenten und den zirkulären Ebenen

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = 0 \tag{24}$$

durch die Achse $\mathfrak{K}$ des Zylinders Ω als Schmiegungsebenen; in Übereinstimmung hiermit haben z. B. die erwähnten Pascalschen Schnecken die 2 Spitzen in den Kreispunkten IJ und dort Tangenten, welche im Spurpunkte $N\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ dieser Achse $\mathfrak{K}$ zusammenlaufen, und es hat jede Slusiana (Gleichung 23) neben dem Doppelpunkte im Endlichen, auf der z-Achse (Symmetrieachse), einen isolierten Berührungsknoten unendlich ferne auf der y-Achse mit der unendlich fernen Geraden als zugehöriger (zweifacher) Doppeltangente, so daß ihr nur 2 Doppeltangenten im Endlichen, im Umrißgeradenpaar des auf die yz-Ebene projizierten Kegels $\mathfrak{S}$ (Gleichung 20) übrig bleiben.

Da die Normalebene Π_1 zu $\underline{\Delta_1}$ im Punkte δ bei unserer Mannheimschen Bewegung stets durch einen Punkt p des festgedachten Körpers C geht, ist jede dieser Bahnlinien $\delta_{(\vartheta)}$ die *Fußpunktskurve* des Punktes

$$p\left[a + \frac{b^2}{a},\quad 0,\quad -\lambda\left(b + \frac{a^2}{b}\right)\right]$$

bezüglich der Kanten des Umdrehungskegels $O(\underline{\Delta_1})$, d. h. der Ort der Fußpunkte aller Lote, welche aus p auf die Kanten dieses Kegels gefällt werden können. Sie ist hiernach sphärisch und liegt auf der über Op als Durchmesser beschriebenen Kugel.

Schon auf S. 178 haben wir einen hierhergehörigen Spezialfall kennen gelernt. Auch ohne auf die benützte Eigenschaft der Mannheimschen Bewegung zurückzugehen, kann man sich hier durch Rechnung direkt überzeugen, daß die Strecke $O\delta$, deren Projektion zu

$$a \sin\vartheta,\quad -a\cos\vartheta,\quad -b$$

(vgl. 19) proportional sind, zur Strecke $p\delta$ mit den Projektionen

$$-\left(a + \frac{b^2}{a}\right) + a\sin\vartheta\,(\lambda + \sin\vartheta),\quad -a\cos\vartheta\,(\lambda + \sin\vartheta),\quad \lambda\frac{a^2}{b} - b\sin\vartheta$$

senkrecht steht, wodurch δ als Fußpunkt des aus p auf die Kante $\underline{\varDelta}_{1\,(\vartheta)}$ des Kegels $O(\underline{\varDelta}_1)$ gefällten Lotes nachgewiesen ist.

Die Doppelpunktstangenten der Bahnlinie $\delta_{(\vartheta)}$ sind die beiden zu pO senkrechten Erzeugenden $\underline{\varDelta}_{1\,[\vartheta = \operatorname{arc\,sin}(-\lambda)]}$ des Kegels $O(\underline{\varDelta}_1)$. Man beachte die oben erwähnten Formveränderungen dieser im Raum gewundenen Fußpunktskurven $\delta_{(\vartheta)}$, den Übergang von Bahnschleifengestalten zu Ovalen, wenn p auf seiner Geraden $\left(\xi = a + \frac{b^2}{a},\ \eta = 0\right)$, dem Werte $\lambda = 1$ entsprechend den Punkt $p_\varDelta\left[a + \frac{b^2}{a},\ 0,\ -\left(b + \frac{a^2}{b}\right)\right]$ passiert, wobei die Spitzkurve $\varDelta$ erhalten wird; bei $\varDelta$ rücken die beiden auf dem Kegel $O(\underline{\varDelta}_1)$ zu Op senkrecht gelegenen Doppelpunktstangenten in eine einzige zusammen; auch die Symmetrie der beiden $\delta_{(\vartheta)}$-Formen wird klar, wenn p auf seiner Geraden spiegelbildliche Lagen bezüglich der xy-Ebene annimmt, von der auf S. 178 innegehabten Lage *in* dieser Ebene angefangen. Der zum selben ϑ gehörige Fußpunkt verschiebt sich auf derselben Kante $\underline{\varDelta}_{1\,(\vartheta)}$ des festen Kegels $O(\underline{\varDelta}_1)$, wenn sich p hebt oder senkt.

Wählt man speziell $\lambda = \frac{1}{4}$, wie es in der Figur 16 geschah, und projiziert die sich ergebende (ungleichteilige) Doppelschleife $\delta_{(\vartheta)}$ auf die xy-Ebene durch Strahlen, welche mit ihr einen Winkel einschließen, dessen cotg den Wert $-\frac{a}{2b}$ hat und zur xz-Ebene parallel sind, so kann man als derartige Abschattung ein reguläres

Brocardsches Kleeblatt (Figur 16a)

[G. Loria Figur 30 der Tafel IV im I. Bd. „Eb. K." und S. 155; Brocard, Le trifolium, Journal de math. spéc. 1891]

erhalten, welches durch 3 unter $\frac{\pi}{3}$ gegen einander geneigte Symmetrieachsen ausgezeichnet ist, die sich im Punkte $\left(\frac{3a}{8},\ 0\right)$ der x-Achse schneiden.

Die aus den Bahngleichungen (19) folgenden Gleichungen dieser Abschattung

$$\left\{\begin{aligned} x &= a\sin^2\vartheta + \frac{a}{4}\sin\vartheta + \frac{a}{2b}z \\ y &= -\frac{a}{2}\sin 2\vartheta - \frac{a}{4}\cos\vartheta \end{aligned}\right\}$$

lassen sich nämlich auf die Form

$$\left\{\begin{aligned} x - \frac{3a}{8} &= \frac{a}{4}(-2\cos 2\vartheta - \sin\vartheta) \\ y &= \frac{a}{4}(-2\sin 2\vartheta - \cos\vartheta) \end{aligned}\right\}$$

bringen, welche auch die Gleichungen (2) auf S. 155 von G. Lorias Eb. K. annehmen, wenn wir dort $r = \frac{a}{4}$ und $\alpha = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ setzen. Wie *alle schiefen Parallelprojektionen* unserer Bahnlinien auf die xy-Ebene hat auch dieses Kleeblatt die unendlich ferne Gerade dieser Ebene zur Doppeltangente in den Kreispunkten IJ, wo die Bahnlinie selbst die unendlich ferne Ebene berührt.

Höchst interessant ist die für $\lambda = 1$ sich ergebende sphärische Spitzkurve $\varDelta$ (Figur 17), welche viele bekannte Kurven als ihre Projektionen in Zusammenhang bringt:

Auf die xy-Ebene projiziert sie sich senkrecht als Cardioide $\varDelta'$ (Unsere Gleichung 22 für $\lambda = 1$; G. Loria, Figur 28b der Tafel IV und S. 142.),

auf die yz-Ebene projiziert sie sich als allgemeinere Quartique pyriforme $\varDelta''$ (Unsere Gleichung 23 für $\lambda = 1$; G. Loria, Figur 48 der Tafel VI und S. 187, 188.),

auf die xz-Ebene als eine zu $\mathfrak{D}$ kongruente Parabel $\varDelta'''$ ($\lambda = 1$; S. 207 und Figur 5). Ferner wird sie durch schiefe, zur xz-Ebene parallele Strahlen auf die xy-Ebene abgeschattet als „gerades Zweiblatt“ $\varDelta^{IV}$ (G. Loria, Eb. K. Figur 34 der Tafel V und S. 159 des I. Bd. Gleichung 9′), wenn die cotg des Winkels der Strahlenrichtung mit der x-Achse $-\frac{a}{b}$ ist.[1]) Dies lehren die Projektionsgleichungen (aus 19)

$$\left.\begin{cases} x = a\sin^2\vartheta + a\sin\vartheta + \frac{a}{b}z = -a\cos^2\vartheta \\ y = -a\cos\vartheta\,(1+\sin\vartheta) \end{cases}\right\} \;..\; (x^2+y^2)^2 + 4axy^2 = 0.$$

Als Seidels „eigentliches“ Oval $\varDelta^{V}$ (Proportionatrix Villapaudos, folium simple Longchamps, G. Loria, Figur 78b der Tafel XI des I. Bandes und S. 317 $\varrho = 2r\cos^3\omega$) dagegen, wenn die obige cotg als $+\frac{a}{b}$ angenommen wird[2]):

$$\left.\begin{cases} x = a\,(1+\sin\vartheta)^2 \\ y = -a\cos\vartheta\,(1+\sin\vartheta) \end{cases}\right\} \;\ldots\; x^2 + y^2 - 4ax^3 = 0.$$

Auch als Steiners dreiseitige Hypozykloide[3]) $\varDelta^{VI}$ kann diese $\varDelta$ auf die xy-Ebene projiziert werden. Dies geschieht, wenn man die

1) Der dem absoluten Werte nach komplementäre Winkel $\psi\left(\mathrm{tg}\,\psi = \frac{a}{b}\right)$ der Richtung dieser Strahlen mit der z-Achse zeigt, daß diese Richtung einer Kante $\underline{\varDelta_1}_{\left(\vartheta=+\frac{\pi}{2}\right)}$ des Kegels $O(\underline{\varDelta_1})$ angehört, dessen Kanten durch O unter dem Winkel ψ mit der z-Achse gelegt sind. ψ nehmen wir stets positiv

2) Wie bei Anm. 1, aber bei einer Strahlenrichtung parallel zur anderen Kante $\underline{\varDelta_1}_{\left(\vartheta=-\frac{\pi}{2}\right)}$ desselben Kegels in der xz-Ebene.

3) G. Loria, Eb. K. I. Bd S. 146 usw.

obige cotg mit dem Werte $-\frac{2a}{b}$ annimmt, so daß die Lichtstrahlen zur Bahntangente des Punktes $\delta_{1\left(\frac{\pi}{6}\right)}$, d. h. der $\vartheta = \frac{\pi}{6}$ (bei $\lambda = 1$) entsprechenden Lage von δ (vgl. S. 207, 186 und Figur 5), also zugleich zur Bahntangente des bezüglich der xz-Ebene symmetrischen Punktes $\delta_{1\left(\frac{5\pi}{6}\right)}$ parallel werden, weshalb sich diese Punkte auch als Spitzen $\left[-\frac{9a}{4}, \mp \frac{3a}{4}\sqrt{3}\right]$ neben dem Bilde $O\,[0, 0]$ der „wahren" Spitze O abschatten müssen. Aus (19) haben wir

$$\left|\begin{aligned} x = a\sin^2\vartheta + a\sin\vartheta + \frac{2a}{b}z = a(\sin^2\vartheta - \sin\vartheta - 2) \\ y = -a\cos\vartheta\,(1 + \sin\vartheta) \end{aligned}\right|$$

als Parametergleichungen dieses Schattens, dessen 3 Spitzentangenten aus der x-Achse und zwei sie im Punkte $\left(-\frac{3a}{2}, 0\right)$ unter dem Winkel $\pm\frac{\pi}{3}$ schneidenden Geraden bestehen. Die Natur dieser Linie kann nicht zweifelhaft sein, da sie als dreispitzige Parallelprojektion von $\varLambda$ von der 4. Ordnung ist und die unendlich ferne Gerade (vgl. S. 214 oben) in den Kreispunkten IJ berührt, was nach Cremonas Bemerkung[1]) zur Bestimmung ihrer Identität hinreicht; auch kann man die Parametergleichungen in der Form

$$\left|\begin{aligned} -\left(x + \frac{3a}{2}\right) = \frac{a}{2}(2\sin\vartheta + \cos 2\vartheta) \\ -y = \frac{a}{2}(2\cos\vartheta + \sin 2\vartheta) \end{aligned}\right|$$

schreiben und durch Vergleich mit den von G. Loria[2]) angeführten den Schluß ziehen, daß die vorliegende Projektion auch als Hypozykloide erzeugbar ist, und zwar durch Abrollen eines Kreises vom Durchmesser a an dem dreimal so großen, welcher durch die 3 Spitzen des Schattens geht.

Von den Projektionen aus einem im Endlichen gelegenene Zentrum sind neben den Kreisen, als Schatten der $\varLambda$ bei Beleuchtung aus der Spitze O selbst, noch ganz besonders die Cissoide[3]) des Diokles zu bemerken, welche als $\varLambda$-Schatten (ξ, η) in der xy-Ebene hervortritt, wenn wir den auf $\varLambda$ der Spitze O gegenüberliegenden Punkt $\delta_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}\,[2a, -2b]$, in der xz-Ebene zum Beleuchtungszentrum machen:

1) G. Loria, Eb. K. I. Bd. S. 149.
2) G. Loria, Eb. K. I. Bd. S. 150 oben.
3) G. Loria Eb. K. I. Bd. S. 36 und Figur 1.

Wir haben auf der Verbindungslinie von (Gleichung 19 für $\lambda = 1$)

$$\delta_{(\vartheta)}\left\{\begin{aligned} x &= \quad a \sin\vartheta\,(1+\sin\vartheta) \\ y &= -a\cos\vartheta\,(1+\sin\vartheta) \\ z &= -b\,(1+\sin\vartheta) \end{aligned}\right\} \text{ mit } \delta_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left\{\begin{matrix} 2a \\ 0 \\ -2b \end{matrix}\right\}$$

den Punkt

$$(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\mu\left\{\delta_{1\left(\frac{\pi}{2}\right)}\right\} + \nu\left\{\delta_{(\vartheta)}\right\}}{\mu+\nu}$$

so zu bestimmen, daß $\zeta = 0$, also $\mu : \nu : (\mu+\nu) = -(1+\sin\vartheta) : 2 : (1-\sin\vartheta)$ wird; die gesuchte Projektion ist daher gemäß

$$\left\{\begin{aligned} \xi &= -2a\,(1+\sin\vartheta) \\ \eta &= \frac{\xi\cos\vartheta}{1-\sin\vartheta} \end{aligned}\right\}$$

die neben ihrer Wendeasymptote ($\xi + 4a = 0$) erscheinende Cissois $\xi(\xi^2+\eta^2) + 4a\eta^2 = 0$. Die Figur 17 zeigt diese 7 merkwürdigsten Projektionen der Spitzkurve Λ, sowohl die orthogonalen, die

Cardioide Λ'
Quartique pyriforme Λ''
Parabel Λ''',

als auch die schiefen

das gerade Zweiblatt Λ^{IV}
Seidels „eigentliches“ Oval Λ^{V}
Steiners Hypozykloide Λ^{VI}

und die durch Zentralbeleuchtung gewonnene Cissois Λ^{VII}.

Die Bitangentialdeveloppable der Spitzkurve Λ ist der senkrechte Zylinder über der Parabel Λ''', und die Knotenlinie der Tangentenfläche eine auch in die Figur 5 eingetragene Hyperbel $\mathfrak{H}$, welche 1) die Achse $\mathfrak{K}\left(x = \frac{a}{2},\ y = 0\right)$ des Zylinders $\mathfrak{Q}$, und 2) die durch den gemeinsamen Punkt der 3 Steinerschen Spitzentangenten gehende Gerade $\left(y = 0,\ z = -\frac{b}{2a}x - \frac{3a}{2}\right)$ zu Asymptoten, ferner in den Punkten $O = \delta_{1\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$ und $\delta_{1\left(+\frac{\pi}{2}\right)}$ $[2a, -2b]$ die Tangenten mit der Parabel Λ''' gemein hat: $z = \frac{b}{a}x$, bzw. $z = -\frac{b}{3a}x - \frac{4b}{3}$.

Um die beiden Dreispitzkurven 4. O. 3. Kl., die Cardioide und die Steinersche, zu erhalten, mußten wir die Beleuchtung aus einem der unendlich fernen Punkte dieser Knotenlinie ausführen; so kam die Klasse 3 der Projektion zustande, während sonst, vgl. S. 212, $r = 5$ für Λ gilt.

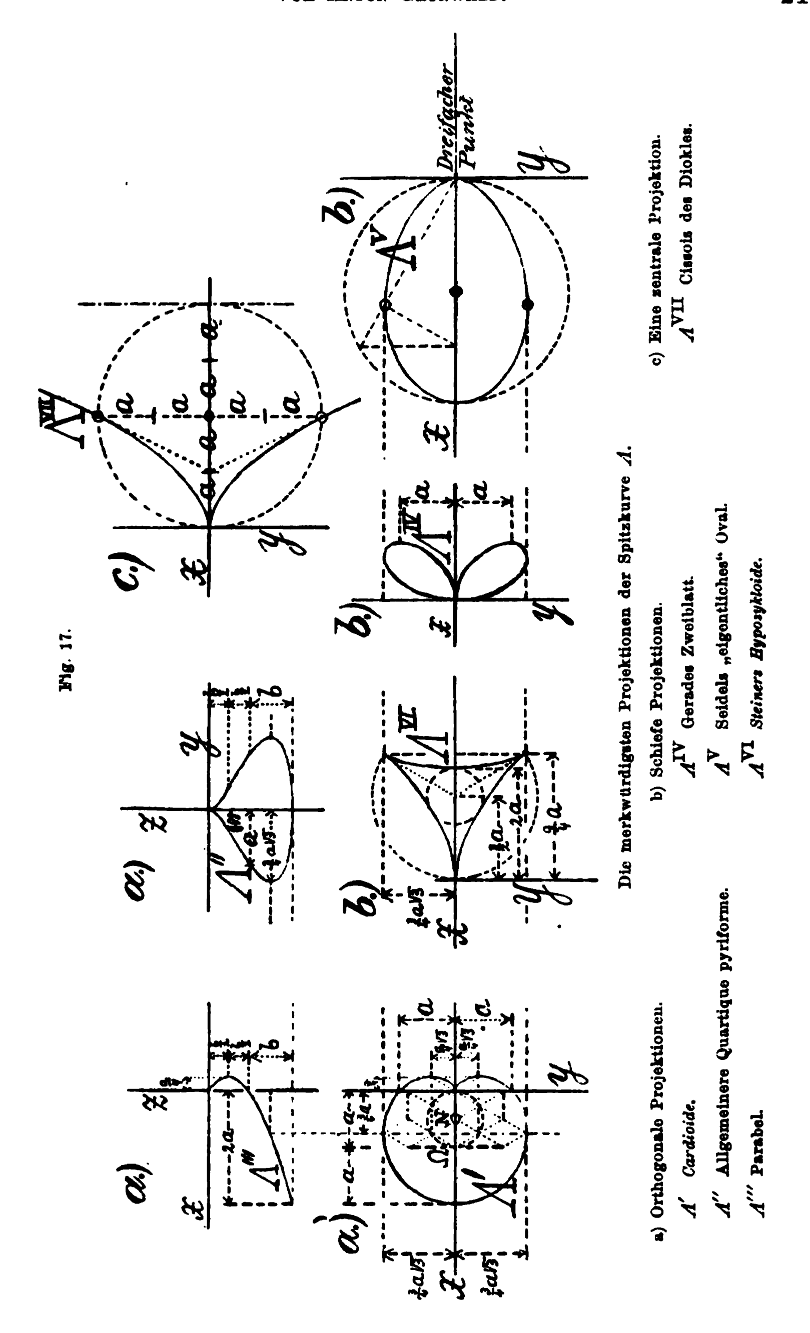


Fig. 17.

Die merkwürdigsten Projektionen der Spitzkurve Λ.

a) Orthogonale Projektionen.
Λ' *Cardioide.*
Λ'' Allgemeinere Quartique pyriforme.
Λ''' Parabel.

b) Schiefe Projektionen.
Λ^{IV} Gerades Zweiblatt.
Λ^{V} Seidels „eigentliches" Oval.
Λ^{VI} *Steiners Hypozykloide.*

c) Eine zentrale Projektion.
Λ^{VII} Cissoide des Diokles.

Wir beachteten bisher nur die Bahnen $\delta_{(\vartheta)}$ (Gleichung 19 S. 207) der Punkte δ der Ebene $x_1 = 0$ von C_1. Nun stellen wir zum Schlusse fest, daß die Bahnlinie $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ (Gleichung $1_{\varkappa}$ S. 158, rationale Kurve

4. Ordnung) jedes beliebigen Punktes p_1 (mit den zu $\vartheta = 0$ gehörigen Koordinaten $x_1\, y_1\, z_1$ im Körper C_1) beim **Mannheimschen** Umschwunge die *Fußpunktskurve* eines bestimmten Punktes p bezüglich der einen Regelschar eines Umdrehungshyperboloides ist, d. h. der Ort der Fußpunkte aller aus p auf die Geraden dieser Schar gefällten Lote:

Die unter $\psi\left(\operatorname{tg}\psi = \frac{a}{b}\right)$ gegen die z-Achse geneigten Geraden $\varDelta_1$ der $y_1 z_1$-Ebene (z. B. $\underline{\varDelta_1}$ durch O; S. 162, 165, 175) beschreiben beim **Mannheimschen** Umschwunge Drehungskegel um die z-Achse mit ihrem Schnittpunkte auf dieser Achse als Scheitel, [so z. B. beschreibt $\underline{\varDelta_1}$ den Kegel $O(\underline{\varDelta_1})$,] wobei ihre Punkte sich außerdem noch auf der betreffenden Kante $\varDelta_1$ derart verschieben, daß die $\left\{\begin{matrix}\text{innerhalb}\\ \text{auf}\\ \text{außerhalb}\end{matrix}\right\}$ der Zylinderfläche $\Omega(x_1^2 + y_1^2 = a^2)$ befindlichen Punkte $\delta(0, y_1 = -\lambda a, z_1 = -\lambda b)$[1] eine $\delta_{(\vartheta)}$ $\left\{\begin{matrix}\text{Doppelschleife}\\ \text{Spitzkurve } \varDelta\\ \text{bzw. ein Oval}\end{matrix}\right\}$ im Raume zeichnen.

Die Parallele zu den $\varDelta_1$ durch einen beliebigen Raumpunkt $p_1(x_1\, y_1\, z_1)$ bleibt nun beim Umschwunge auch mit jener Geraden $\varDelta_1$ starr verbunden, in welche sie sich senkrecht auf die $y_1 z_1$-Ebene projiziert, beschreibt also selbst eine Regelschar eines Umdrehungshyperboloids, welche aus den Kanten des von ihrer Projektion $\varDelta_1$ erzeugten Drehkegels (Asymptotenkegels) durch Verschiebung um das Stück konstanter Länge x_1 in der sowohl zu z_1 als zur betreffenden Kante $\varDelta_{1(\vartheta)}$ senkrechten Richtung (nach der gehörigen Seite hin) gewonnen werden kann. $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ liegt ganz auf dieser Hyperboloide und alle ihre Punkte $p_{1(\vartheta)}$ werden durch die beschriebene Verschiebungstransformation aus den Punkten δ jener $\delta_{(\vartheta)}$ des Asymptotenkegels gewonnen, welche beim Umschwunge von der auf die $y_1 z_1$-Ebene ausgeführten Projektion δ des Punktes p_1 gezeichnet wird.

Der Asymptotenkegel ist, wenn wir die Koordinaten $\xi\,\eta\,\zeta$ nennen,

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{b^2}\left(\zeta - z_1 + \frac{b}{a}\, y_1\right)^2$$

$\left(\text{mit dem Scheitel } 0,\ 0,\ z_1 - \frac{b}{a}\, y_1\right)$ und das Umdrehungshyperboloid durch p_1, worauf $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ bleibt, hat die Gleichung

$$b^2(\xi^2 + \eta^2) - a^2\left(\zeta - z_1 + \frac{b}{a}\, y_1\right)^2 = b^2 x_1^2,$$

---

1) Vgl. S. 207. Es zeigt sich $\lambda = -\frac{y_1}{a}$ unabhängig von der zufälligen Wahl des Anfanges auf der z_1-Achse.

wovon man sich durch Einsetzen der aus (1_M, S. 158) folgenden Werte von xyz statt $\xi\eta\zeta$ direkt überzeugen kann, da alsdann

$$\left\{\begin{array}{l} \xi^2 + \eta^2 = a^2 \sin^2\vartheta + x_1^2 + y_1^2 - 2ay_1 \sin\vartheta \\ \zeta - z_1 + \frac{b}{a} y_1 = - b \sin\vartheta + \frac{b}{a} y_1 \end{array}\right\}$$

erhalten wird. Jene Regelschar dieses Hyperboloides, welche von der Bahnkurve $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ — diese ist gemäß (1_M) von der 4. Ordnung, rational und zwar zweiter Spezies — einfach punktiert wird, ist mit Hilfe des Parameters $\varkappa$ (neben ϑ) durch die Gleichungen

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = x_1 \cos\vartheta - y_1 \sin\vartheta + a\varkappa \sin\vartheta \\ \eta = x_1 \sin\vartheta + y_1 \cos\vartheta - a\varkappa \cos\vartheta \\ \zeta = \qquad z_1 \qquad - b\varkappa \end{array}\right\}$$

darstellbar.[1])

Die Strahlen dieser Schar sind augenscheinlich parallel zu den (S. 212) oben vorgekommenen Strahlen $O\delta$ des dortigen Umdrehungskegels $O(\varDelta_1)$, auf welchem $\delta_{(\vartheta)}$ lag, die Fußpunktskurve des hingehörigen Punktes $p\left[a + \frac{b^2}{b},\ 0,\ -\lambda\left(b + \frac{a^2}{b}\right)\right]$ bezüglich der Kegelkanten; unsere Verschiebungstransformation, welche dem Hinzutreten der mit x_1 behafteten Glieder in (1_M) entspricht, geschieht stets in einer zu $O\delta = \varDelta_1$ normalen Richtung, weshalb die Normalebene Π_1 zu $\varDelta_1$ (im Punkte δ) nur in sich verschoben wird. Mit Rücksicht auf die veränderte Lage des Kegelscheitels erkennen wir:

Die Bahnlinie $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ ist die *Fußpunktskurve* unserer Regelschar ϑ bezüglich des Punktes

$$p\left[a + \frac{b^2}{a},\quad 0,\quad z_1 - \frac{b}{a} y_1 - \lambda\left(b + \frac{a^2}{b}\right)\right],$$

also wegen $\lambda = -\frac{y_1}{a}$ (Anmerkung 1 der vorigen Seite)

$$(25) \qquad p\left[a + \frac{b^2}{a},\quad 0,\quad z_1 + \frac{a}{b} y_1\right]$$

als Pol. p wird beim Mannheimschen Umschwunge von der durch p_1 zu den $\varDelta_1$ normal gelegten Ebene Π_1 des Körpers C_1 eingehüllt.

Nachträglich ist es auch direkt, ohne kinematische Überlegung, leicht, sich davon zu überzeugen, daß die *Richtung* der Hyperboloiderzeugenden mit den Projektionen

$$(a \sin\vartheta,\quad -a\cos\vartheta,\quad -b)$$

---

1) $\varkappa = \sin\vartheta$ gehört zur Bahnkurve $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ mit den Gleichungen (1_M)

zu der aus (1_M) und (25) bestimmbaren Richtung des Lotes $p\,\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ mit den Projektionen

$$\left[-\left(a+\frac{b^2}{a}\right)+a\sin^2\vartheta+x_1\cos\vartheta-y_1\sin\vartheta,\quad -a\sin\vartheta\cos\vartheta+x_1\sin\vartheta+y_1\cos\vartheta,\right.$$
$$\left.-\frac{a}{b}y_1-b\sin\vartheta\right]$$

senkrecht steht, daß also die behauptete Fußpunktskurveneigenschaft zutrifft.

Das Verhalten aller Bahnlinien $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ in unendlicher Ferne ist das gleiche wie bei den $\delta_{(\vartheta)}$[1]), woraus z. B. wiederum darauf geschlossen werden kann, daß die senkrechten Projektionen auch dieser $\mathfrak{d}_{(\vartheta)}$ *auf die xy-Ebene* Pascalsche Schnecken[2]) sind, während die schiefen die unendlich ferne Gerade dieser Ebene in beiden Kreispunkten IJ berühren; oder, daß der Schatten dieser Kurven bei einer Beleuchtung durch Strahlen, welche zur xy-Ebene parallel sind, unendlich ferne auf der Spur dieser Ebene in der Schirmebene einen isolierten Berührungsknoten aufweist, dessen Tangente die unendlich ferne Gerade ist, so daß nur 2 Doppeltangenten im Endlichen vorhanden sein können.

In unseren Apparaten zur Erzeugung des Mannheimschen Umschwunges werden alle Punkte des beweglichen Körpers C_1 gezwungen, Fußpunktskurven von Scharen auf (ähnlichen) Umdrehungshyperboloiden (mit derselben Drehachse) als Bahnkurven im festen Körper C zu beschreiben.

Bei der Betrachtung der Fußpunktskurven quadratischer Regelscharen hat der Verfasser an anderer Stelle[3]) auch einen kinematischen Apparat zur Ausführung der kubischen Kreisbewegung eines starren Körpers angegeben. Bei der letzteren werden alle Punkte gezwungen, Fußpunktskurven bezüglich paraboloidischer Regelscharen, also kubische Kreise zu beschreiben.

---

1) S. 212.

2) Mit Spitzen in den Kreispunkten IJ, deren Tangenten im Spurpunkt N der Achse $\mathfrak{K}$ des Zylinders Ω zusammenlaufen.

3) Im 1906-Programme der II. Deutschen Staatsrealschule in Prag, vgl. S. 185, Anm. 2.

Bücherschau.

L. Ambronn. Die Messungen des Sonnendurchmessers an dem Repsoldschen 6-zöll. Heliometer der Sternwarte zu Göttingen. Ausgeführt von W. Schur und L. Ambronn. Bearbeitet von L. Ambronn. 4°. 126 S. u. 2 Tafeln. Abh. d. K. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-phys. Klasse. Neue Folge Bd. III, Nr. 3; Berlin 1905 = Astr. Mitt. d. K. Sternw. zu Göttingen. VII. Teil. Göttingen 1905.

Schon kurz nach der Aufstellung des großen Göttinger Heliometers (16,2 cm Öffnung und 2,61 m Brennweite) begann W. Schur im Mai 1890 mit Messungen des Sonnendurchmessers in der Absicht, die Reihe über eine ganze Periode der Fleckentätigkeit (11,1 Jahre) zu erstrecken und so die Frage zu entscheiden, ob mit diesen gewaltigen Vorgängen auf der Sonnenoberfläche eine Schwankung ihrer Größe oder ihrer Figur verbunden sei. Herr Ambronn nahm an der Arbeit im gleichen Maße wie Schur teil und nach Schurs Tode — seine Beobachtungen endigen Januar 1901 — führte er das Programm bis November 1902 durch, so daß mehr als eine volle Fleckenperiode überdeckt war.

Die Beobachtungen sind mit allen jenen Vorsichtsmaßregeln angestellt, die Schur stets seinen heliometrischen Messungen angedeihen ließ und zu denen hier noch besondere Anordnungen zur Verminderung der schädlichen Bestrahlung des Instrumentes traten. Die Zahl der gewonnenen Durchmesserbestimmungen beträgt insgesamt 446 (Schur 200, Ambronn 246); sie erstrecken sich über den äquatorealen und polaren Sonnendurchmesser. Ihren Genauigkeitsgrad charakterisiert der mittlere Fehler $\pm 0,''25$ einer vollständigen Durchmesserbestimmung.

Überblickt man die Resultate dieser umfangreichen, zuverlässigen und einheitlichen Reihe, so zeigt sich zunächst, „daß während des ganzen Zeitraumes von nahe 13 Jahren eine mit Sicherheit nachzuweisende regelmäßig verlaufende Schwankung der Größe des Sonnendurchmessers, die mehr als $0,''1$ betragen könnte, nicht vorhanden gewesen ist“, und nicht minder negativ fiel die Untersuchung der Abplattung des Sonnenkörpers aus: die Beobachtungen liefern den polaren und äquatorealen Durchmesser völlig gleich groß, ein Ergebnis, das mit derselben Bestimmtheit schon A. Auwers auf Grund des durch die Deutschen Venusexpeditionen 1874 und 1882 beigebrachten Materials ausgesprochen hatte. Schließlich folgt noch als definitiver scheinbarer Sonnendurchmesser der Wert:

	für Schur	für Ambronn
	$32'\ 0,''14$	$31'\ 59,''80$
mittl. Fehler	$\pm 0,04$	$\pm 0,04$

Der Vergleich der Göttinger Messungen mit älteren Resultaten, die von Herrn Ambronn z. T. neu reduziert wurden, läßt erkennen, daß eine

Zu- oder Abnahme der Größe der Sonne in den letzten 80 Jahren keinesfalls in wahrnehmbarem Betrage stattgefunden hat. —

In direktem Gegensatz zu der sorgfältigen Göttinger Reihe stehen nun die Schlüsse, die Herr Ch. L. Poor aus Untersuchungen zog, die er teils auf eigene Messungen von photographischen Platten, teils auf die deutschen Heliometerbeobachtungen der Jahre 1874 und 1882 stützte: Poor findet nämlich eine Art von elastischer Schwingung der Sonnenfigur derart, daß bald der äquatoreale, bald der polare Durchmesser der größere sei und zwar verlaufe diese Variation der Sonnentätigkeit parallel (Astrophysical Journal, Vol. 22, Nr. 2). Die Göttinger Arbeit lag Herrn Poor für seine erste Abhandlung noch nicht vor; in einem späteren Aufsatz (Astrophysical Journ., Vol. 22, No. 5) nimmt er indes auch jene neuen Beobachtungen für seine Theorie in Anspruch und glaubt in ihnen Schwankungen des Sonnendurchmessers von 0,″5 Amplitude im gewünschten Sinne nachweisen zu können. Gegen Herrn Poors Diskussionsmethoden lassen sich jedoch Bedenken geltend machen, die die Realität seiner Ergebnisse sehr in Zweifel setzen.

Straßburg i. E. Wirtz.

Astronomischer Kalender für 1906. Berechnet für den Meridian und die Polhöhe von Wien. Herausgegeben von der k. k. Sternwarte. 8⁰. 143 S. Wien, K. Gerolds Sohn. Kart. M 2,40.

Über den allgemeinen kalendarisch-astronomischen Inhalt wurde schon in dieser Ztschr. Bd. 51, p. 171 berichtet. Die Beilagen bringen diesmal einen Aufsatz von Herrn Holetschek, der „Einiges über den gegenwärtigen Stand unserer Kenntnisse der veränderlichen Sterne“ behandelt. Der Verfasser folgt in seiner Darstellung der Klassifikation Pickerings in fünf Typen, innerhalb deren er einzelne interessante Objekte bespricht und die charakteristischen Eigenschaften hervorhebt. Die neuesten photographischen und spektrographischen Forschungen haben Berücksichtigung erfahren, und die Erklärungsversuche werden mit der gebotenen Vorsicht eingeführt. Herr E. Weiß gibt, wie gewöhnlich, die Übersicht der neuen Planeten, Kometen und Satelliten des Jahres. Wir heben nur hervor, daß zwei weitere sehr schwache Satelliten des Jupiter von C. D. Perrine und ein zehnter gleichfalls äußerst schwacher Mond des Saturn von W. H. Pickering aufgefunden worden sind.

Straßburg i. E. Wirtz.

H. C. E. Martus, Astronomische Erdkunde. Ein Lehrbuch angewandter Mathematik. Große Ausgabe mit 100 Figuren im Texte. Dritte neu durchgearbeitete Auflage. 8⁰. XVI u. 473 S. Dresden und Leipzig, C. A. Koch 1904.

Die erste Auflage dieses didaktisch geschickt geschriebenen Buches erschien i. J. 1880. Daß es trotz seines Umfanges den weiteren Leserkreis gefunden, an den es sich wendet, beweist die jetzt vorliegende dritte Auflage. Eine genaue Inhaltsangabe darf hier unterbleiben: es ist natürlich in ähnlicher Anordnung derselbe Stoff, dem man auch in anderen Lehrbüchern der mathematischen Geographie und Geonomie begegnet. Indes erfahren manche Gegenstände eine eingehendere Behandlung, als man es

sonst wohl in verwandten Werken zu finden pflegt. Hervorgehoben seien die Beschreibung der Basismessung für Gradmessungstriangulationen und der zugehörigen Apparate, die Entwickelung des Seitendruckes der Eisenbahnzüge infolge der Erdrotation und die Darstellung eines Pendelversuchs, den Herr Martus sowohl zur Demonstration der täglichen Umdrehung der Erde nach Foucault als auch in lehrreicher Weise zur Ermittelung der Größe der Schwerkraft verwertet; die Art der Gewinnung seines Resultates bietet in Anbetracht der einfachen Hilfsmittel auch dem Fachmanne Interesse. Dank wissen wird man ferner dem Streben des Verfassers, die Beispiele nach Möglichkeit klassischen Quellen zu entlehnen und teils im Text, teils in den Anmerkungen dem historischen Gang der Forschung bis auf die neueste Zeit gerecht zu werden und ihn durch meist gut gewählte Zitate aus der Literatur zu begleiten.

Die Veranschaulichung astronomischer und geodätischer Dimensionen erhält eine wirksame Stütze durch die Ausrechnung naheliegender Vergleichsmaße. Hier möge es genügen, unter diesen zahlreichen, insbesondere für den Lehrer wertvollen Notizen, hinzuweisen auf die Daten über die Biegung der Breitenkreise, die Lage des wagerechten Erdbodens gegen seinen Erdhalbmesser, die Abweichung der Erde von der Kugelgestalt für die Friedrichstraße in Berlin und die Meeresabflachung auf dem Geoid. —

Abgesehen von einigen schiefen Darstellungen von geringfügiger Bedeutung begegnet man auf S. 145 dem eigenartigen Überlegungsfehler, daß eine in Sternzeit angenommene Längendifferenz in mittlere Sonnenzeit verwandelt werden soll, und im Prinzip das gleiche Versehen kehrt auf S. 147 und 148 wieder. Zu der Geschichte der Polhöhenschwankung (S. 252) ist ferner zu bemerken, daß der endgültige praktische Nachweis für die Inkonstanz der geographischen Breite i. J. 1888 von F. Küstner erbracht wurde.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

M. Möller, Orientierung nach dem Schatten. Studien über eine Touristenregel. Mit 30 Figuren in Holzschnitt. 8°, 158 S. Wien, A. Hölder 1905.

Die mit Rücksicht auf das engbegrenzte Thema umfangreiche Abhandlung Herrn Möllers geht aus von der genäherten Bestimmung der Meridianrichtung mit Hilfe einer Regel, die meines Wissens durch den Afrikaforscher Stanley dem breiteren Publikum wieder ins Gedächtnis gerufen wurde und die sich auch so aussprechen läßt: Richtet man den Stundenzeiger einer nach Ortszeit gehenden horizontal gehaltenen Taschenuhr zur Sonne, so weist die Winkelhalbierungslinie zwischen dem Stundenzeiger und der XII des Zifferblattes nach Süden. Der Verfasser untersucht ausführlich auf konstruktivem und algebraischem Wege die Fehler, die jener Südpunktsbestimmung anhaften, Fehler, die dadurch entstehen, daß man den Stundenwinkel der Sonne für deren Azimut substituiert. Die Differenz beider Koordinaten, der Fehler der Regel, kann in unsern Breiten einen Betrag von 28° erreichen. Die Arbeit verfolgt nun den Gang dieses Unterschiedes für alle geographisch-astronomischen Verhältnisse, und mehrfach bietet sich hierbei Gelegenheit zu interessanten Studien aus dem Gebiete der Gnomonik im weiteren Sinne. So widmet sich das Kap. IV der Entwickelung der Kurven gleicher Fehlerwerte und Kap. V bringt eine Diskussion der schon oft in der Literatur behandelten und in mehr als einer

Hinsicht bemerkenswerten Möglichkeit der Schattenumkehr[1]), die bei vertikalem Stab natürlich nur innerhalb der Wendekreise eintritt, bei schiefer Stellung des schattenwerfenden Körpers aber leicht überall erzeugt werden kann.

Straßburg i. E. C. W. Wirtz.

W. F. Wislicenus. Der Kalender in gemeinverständlicher Darstellung. Aus Natur und Geisteswelt. 69. Bändchen. kl. 8⁰. IV u. 118 S. Leipzig, B. G. Teubner 1905. Geb. M 1,25.

Der leider allzufrüh inmitten unermüdlichen Schaffens vom Tode ereilte Verfasser hat vielfach auf dem Gebiete der Chronologie gearbeitet. Von Historikern und Astronomen gleich geschätzt ist z. B. seine „Astronomische Chronologie" (Leizig, B. G. Teubner 1895). Gehörte jenes Werk dem mathematischen Zweige der Chronologie an, so behandelt das vorliegende Buch einen Teil der technischen Chronologie, die Kalenderlehre. Das erste Kapitel („Die Zeitmaße") bringt das Nötigste von den astronomischen Vorgängen, auf die sich der Kalender aufbaut. Die folgenden vier Abschnitte widmen sich der Reihe nach der Darstellung des Kalenders der Christen, der Juden, der Mohammedaner und der ersten französischen Republik. Der historischen Entwicklung hat Wislicenus große Aufmerksamkeit zugewandt. Interessant ist ferner die Einfachheit und Klarheit, die er seiner nur beschränkt (1900—2099) gültigen Osterformel (S. 55 ff.) gibt. Die Schrift setzt den Gebildeten in den Stand, einfachere kalendariographische Berechnungen mit Verständnis selbst auszuführen. Das Schlußwort enthält eine Anweisung zum Gebrauch von R. Schrams „Hilfstafeln für Chronologie", und der Anhang bringt Tabellen der christlichen Osterdaten.

Straßburg i. E Wirtz.

E. Ebstein. Aus G. C. Lichtenbergs Korrespondenz. Mit Tafel- und Textabbildungen. kl. 8⁰. VII u. 107 S. Stuttgart, Ferd. Enke 1905.

„Eine Würdigung Lichtenbergs in seiner ganzen Vielseitigkeit fehlt uns zur Zeit noch, und es dürfte noch einige Zeit dauern, bis wir sie haben werden." Als weitere Bausteine für die Biographie des geistvollen Mannes veröffentlicht Herr Ebstein hier etwa 60 unbekannte Briefe Lichtenbergs. Viele sind von gleichgültigem Inhalt, manche ihrer Form nach interessant. Astronomisch sei Folgendes angemerkt. Der Brief an Kästner (S. 11) enthält eine Beobachtung des seiner Bahn wegen (ob Parabel oder Hyperbel) umstrittenen Kometen von 1771, die Lichtenberg auf der Göttinger Sternwarte, der er einige Zeit vorstand, erhielt. In mehreren an das Kuratorium gerichteten Promemorien gibt er Rechenschaft über die im Auftrage der hannoverschen Regierung ausgeführten astronomischen Ortsbestimmungen (1772—1775). Schließlich könnte man noch auf Grund des Briefes Nr. 48 an Hindenburg (S. 93) für Lichtenberg die Vorahnung des mechanischen Druckes des Lichtes und die Arrheniussche Theorie der Kometenschweife in Anspruch nehmen — wenn man wollte.

Straßburg i. E. Wirtz.

---

1) Vgl. G. Schiaparelli, Die Astronomie im Alten Testament. Übersetzt von W. Lüdtke. S. 87—90. Gießen, J. Ricker 1904.

ZEITSCHRIFT
FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE UND C. RUNGE

IN STUTTGART IN GÖTTINGEN

54. BAND. 3. HEFT.

MIT 3 TAFELN UND 22 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 11. Juni 1907

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

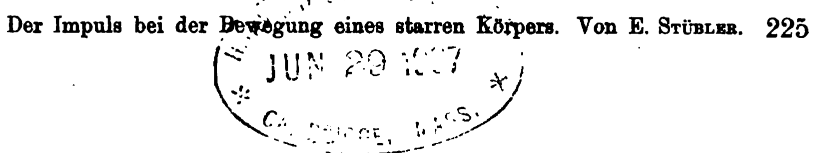
☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

O. Bergmann, P. Bohl, J. Boyko, B. Cohn, P. Debye, M. Disteli, K. Doehlemann, A. Egerer, A. Francke, K. Fuchs, v. Gleich, A. Grünwald, A. Härpfer, K. Heun, A. Jatho, W. Láska, R. Mehmke, B. Meidell, O. Meißner, W. Fr. Meyer, G. Mie, M. Milankovitch, E. Müller, R. Müller, F. Nußbaum, A. v. Obermayer, J. V. Pexider, P. Riebesell, C. Runge, W. Scheufele, Fr. Schilling, Fr. Schur, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, M. Tolle, Fr. Ulkowski, Th. Vahlen, Ph. Weinmeister, P. Werkmeister, K. Wieghardt, Willers, C. W. Wirtz, E. Wölffing.



Der Impuls bei der Bewegung eines starren Körpers.

Von E. Stübler in Stuttgart.

I.

Herr Föppl hat in dieser Zeitschrift Band 48, 1903, S. 272—284 das Problem des Kreisels mit zwei gleichen Hauptträgheitsmomenten vektoranalytisch behandelt, ohne von den Eulerschen Gleichungen Gebrauch zu machen. Will man die Bewegung starrer Körper durch Gleichungen bestimmen, die sich auf ein im Raum festes oder wenigstens zu sich selbst parallel bleibendes System, nicht wie die Eulerschen Gleichungen auf ein mit dem Körper fest verbundenes System beziehen, so bietet sich als vorzügliches Hilfsmittel der Begriff des Impulses oder des Moments der Bewegungsgröße dar, der wegen seiner wichtigen Eigenschaften in der ganzen neueren Literatur über den starren Körper, insbesondere den Kreisel, eine große Rolle spielt.

Diese Aufgabe, die Eulerschen Gleichungen gewissermaßen zu umgehen, durch andre im Raum gültige Differentialgleichungen zu ersetzen, will die vorliegende Arbeit mit Anwendung von Vektoranalysis lösen.

1) Nach Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels, II § 1 ist der Impuls $\mathfrak{i}$ eines bewegten Punktes diejenige (als Vektor betrachtete) Stoßkraft, welche imstande ist, den Punkt an Ort und Stelle aus dem Zustand der Ruhe momentan in den der gerade vorliegenden Bewegung überzuführen; also:

$$\mathfrak{i} = m\mathfrak{v},$$

wo m die Masse des Punkts, $\mathfrak{v}$ den Geschwindigkeitsvektor bezeichnet.

Der Impuls eines frei beweglichen starren Körpers besteht (§ 3) aus der Kombination eines Schiebestoßes $\mathfrak{i}$ und eines Drehstoßes $\mathfrak{J}$, also

$$\mathfrak{i} = M\mathfrak{v}$$

$$\mathfrak{J} = \sum dm \,|\left[\mathfrak{r}\,\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\right].$$ [1]

M ist die Masse des Körpers, $\mathfrak{v}$ der Geschwindigkeitsvektor eines beliebig gewählten Punkts desselben. Von diesem Punkt, dem Bezugspunkt, aus geht nach irgend einem Punkt des Körpers mit der Masse dm der Vektor $\mathfrak{r}$, dann ist seine Geschwindigkeit relativ zum Bezugs-

[1]) Über die angewendeten Bezeichnungen der Vektorenrechnung siehe die Bemerkungen am Schluß der Arbeit.

punkt $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ und der ihm entsprechende Drehungsimpuls bestimmt sich durch das als Vektor aufgefaßte Moment von $dm \cdot \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ (Föppl: „Moment der Bewegungsgröße“ oder „Drall“). Die letzte Gleichung entsteht durch Summierung über alle Massenpunkte des Körpers.

Der Bezugspunkt ist dabei als ruhend zu denken, sodaß:

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = |[\mathfrak{u}\mathfrak{r}],$$

wo $\mathfrak{u}$ die Winkelgeschwindigkeit als Vektor, den Drehungsvektor, bezeichnet, und also:

$$\mathfrak{J} = \sum dm[\mathfrak{r}\mathfrak{u}]|\mathfrak{r}. \tag{1}$$

Vom Translationsimpuls $\mathfrak{i}$ kann im folgenden wegen seiner einfachen Beziehung zu $\mathfrak{v}$ ganz abgesehen werden, während alles, was über den Rotationspuls $\mathfrak{J}$ in der Literatur insbesondere der Kreiselbewegung sich findet, zu einer eingehenden Untersuchung dieses Vektors in seinen Beziehungen zum System des starren Körpers sowie zum Raumsystem hindrängen muß, und wenn auch der geometrische Zusammenhang mit dem Drehungsvektor fast überall in der neueren Literatur über die Bewegung starrer Systeme erörtert wird, so fehlt doch noch eine konsequente Durchführung der genannten Aufgabe; hiedurch sei das Ziel gekennzeichnet, welches sich die vorliegende Arbeit in ihrem ersten Teile setzt.

2) Zunächst sollen diejenigen Beziehungen zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ behandelt werden, die im System des starren Körpers gelten; sie werden später als Grundlage dienen für die Ableitung der im Raumsystem gültigen Beziehungen.

Die Gleichung

$$\mathfrak{J} = \sum dm[\mathfrak{r}\mathfrak{u}]|\mathfrak{r} \tag{1}$$

zeigt, daß $\mathfrak{J}$ linear von $\mathfrak{u}$ abhängig ist, und daß daher die Gesamtheit der Vektoren $\mathfrak{J}$ im starren Körper der Gesamtheit der Vektoren $\mathfrak{u}$ ein-eindeutig zugeordnet ist, die eine aus der andern durch affine Transformation hervorgeht. Diese Abhängigkeit soll abgekürzt bezeichnet werden mit

$$\mathfrak{J} = Q\mathfrak{u}.\text{[1]} \tag{1'}$$

Bei jeder affinen Transformation gibt es im allgemeinen drei Hauptrichtungen, welche durch die Transformation nicht geändert werden. Zu ihrer Bestimmung ist in unserem Fall das Trägheitsmoment Θ in

1) Für den Graßmannschen „Vektorquotienten“ Q sagt Whitehead „Matrix“, während in der Quaternionentheorie von „linearer Vektorfunktion“ gesprochen wird.

bezug auf die Achse $\mathfrak{u}$ einzuführen: Der absolute Wert von $[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ ist gleich dem Abstand des Massenpunktes von $\mathfrak{u}$ multipliziert mit dem absoluten Wert von $\mathfrak{u}$; daher gilt für das Trägheitsmoment Θ:

$$\Theta\mathfrak{u}^2 = \sum dm\,[\mathfrak{r}\mathfrak{u} \mid \mathfrak{r}\mathfrak{u}].$$

Dies ist aber genau gleich $[\mathfrak{J} \mid \mathfrak{u}]$. Also wird:

$$[Q\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}] = \Theta[\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}],$$

d. h.: Die Projektion des Impulses auf die Drehachse ist gleich der mit dem Trägheitsmoment multiplizierten Winkelgeschwindigkeit. (Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik IV § 17). Die den Hauptrichtungen entsprechenden Trägheitsmomente, welche A, B, C heißen sollen, sind die sog. Hauptzahlen des Vektorquotienten Q.[1])

Daß die Hauptrichtungen gegenseitig senkrecht stehen, erkennt man, wenn man einen zweiten Vektor $\mathfrak{u}'$ und den zugehörigen Impuls $\mathfrak{J}'$ einführt und $[\mathfrak{J} \mid \mathfrak{u}']$, sowie $[\mathfrak{J}' \mid \mathfrak{u}]$ bildet. Nach (1) werden beide Produkte gleich $\sum dm\,[\mathfrak{r}\mathfrak{u} \mid \mathfrak{r}\mathfrak{u}']$ (Q kann man daher einen symmetrischen[2]) Vektorquotienten nennen). Liegen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{u}'$ in 2 Hauptrichtungen, also z. B.

$$\mathfrak{J} = A\mathfrak{u}$$
$$\mathfrak{J}' = B\mathfrak{u}',$$

dann wird, da nach dem Vorhergehenden $[\mathfrak{J} \mid \mathfrak{u}'] = [\mathfrak{J}' \mid \mathfrak{u}]$ ist,

$$A[\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}'] = B[\mathfrak{u}' \mid \mathfrak{u}].$$

Wenn also A und B verschieden sind, was vorausgesetzt werden soll, dann muß $[\mathfrak{u}' \mid \mathfrak{u}] = 0$ sein. Die beiden Hauptrichtungen stehen daher aufeinander senkrecht: $\mathfrak{J}$ geht aus $\mathfrak{u}$ durch „reine Deformation" hervor.

Will man zu kartesischen Koordinaten übergehen, dann hat man, wenn p, q, r diejenigen von $\mathfrak{u}$ im System der Hauptrichtungen sind:

$$\text{(1'')} \qquad \begin{aligned} \mathfrak{u} &= p\mathfrak{i} + q\mathfrak{j} + r\mathfrak{k} \\ \mathfrak{J} = Q\mathfrak{u} &= Ap\mathfrak{i} + Bq\mathfrak{j} + Cr\mathfrak{k}, \end{aligned}$$

---

1) Graßmann gebraucht diesen Ausdruck (Werke I, 2, S. 249, Nr. 387) für die Wurzeln der „charakteristischen" Gleichung.

Von der ausführlicheren Schreibweise für den Vektorquotienten Q, nämlich $\dfrac{A\mathfrak{i},\, B\mathfrak{j},\, C\mathfrak{k}}{\mathfrak{i},\, \mathfrak{j},\, \mathfrak{k}}$, soll hier kein Gebrauch gemacht werden.

2) Nach Whitehead, bei dem (Universal Algebra, I, Cambridge 1898, p. 262) von „symmetrical matrices" die Rede ist, während Hamilton „selbstkonjugierte lineare Vektorfunktion" sagt. Vgl. auch Graßmann, Werke I, 2, S. 252, Nr. 391.

Wird auf $Q\mathfrak{u}$ dieselbe reine Deformation nochmals angewendet, so entsteht

$$Q\mathfrak{J} = Q^2\mathfrak{u} = A^2p\mathfrak{i} + B^2q\mathfrak{j} + C^2r\mathfrak{k},$$

und ähnlich geht aus $\mathfrak{u}$ durch die reziproke Transformation Q^{-1}

$$Q^{-1}\mathfrak{u} = \frac{p}{A}\mathfrak{i} + \frac{q}{B}\mathfrak{j} + \frac{r}{C}\mathfrak{k}$$

hervor. Aus diesen Gleichungen ersieht man, daß allgemein

$$[Q^m\mathfrak{u} \mid Q^n\mathfrak{u}'] = [Q^{m+n}\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}']$$

ist, und

$$[Q^m\mathfrak{u} \mid Q^n d\mathfrak{u}] = [Q^{m+n}\mathfrak{u} \mid d\mathfrak{u}].$$

Meist wird, um $\mathfrak{J}$ aus $\mathfrak{u}$ zu bestimmen, das Poinsotsche Ellipsoid

$$[Q\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}] = \text{const.}$$

benützt. Da nach seiner Gleichung $Q\mathfrak{u}$ auf $d\mathfrak{u}$, also der Berührungsebene im Endpunkt von $\mathfrak{u}$ senkrecht steht, so ist damit die Richtung von $\mathfrak{J}$ bestimmt. Umgekehrt erhält man $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{J}$ durch das zum letzten reziproke Ellipsoid (Mac Cullaghsches Ellipsoid)

$$[Q^{-1}\mathfrak{J} \mid \mathfrak{J}] = \text{const.},$$

indem man von O das Lot auf die Berührungsebene fällt.

Die Ellipsoide entsprechen sich in beiden affinen Systemen. Der Übergang zu rechtwinkligen Koordinaten zeigt, daß die Achsen in die Hauptrichtungen fallen und daher A, B, C mit den Hauptträgheitsmomenten identisch sind, welche ja mit Hilfe des Poinsotschen Trägheitsellipsoids definiert werden.

In vielen Fällen erweist sich ein Satz, welcher die durch den Endpunkt von $\mathfrak{J}$ parallel zu $\mathfrak{u}$ gelegte Gerade betrifft, brauchbarer als diese Ellipsoide. Auf dieser Parallelen liegt der Endpunkt des Vektors $\mathfrak{J} - \lambda\mathfrak{u}$, wo λ irgend eine positive oder negative Größe bedeutet. Drückt man die Vektoren, welche man für $\lambda = A, B, C$ erhält, in rechtwinkligen Koordinaten aus, dann wird:

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} - A\mathfrak{u} &= -(A-B)q\mathfrak{j} + (C-A)r\mathfrak{k} \\ \mathfrak{J} - B\mathfrak{u} &= -(B-C)r\mathfrak{k} + (A-B)p\mathfrak{i} \\ \mathfrak{J} - C\mathfrak{u} &= -(C-A)p\mathfrak{i} + (B-C)q\mathfrak{j}. \end{aligned} \tag{2}$$

Sie liegen, wie man sieht, in den Hauptebenen oder Hauptträgheitsebenen. Die genannte Parallele trifft also die Hauptebenen in den Endpunkten dieser Vektoren oder: Subtrahiert man von $\mathfrak{J}$ geometrisch die Vektoren $A\mathfrak{u}$, $B\mathfrak{u}$, $C\mathfrak{u}$, so erhält man als Endpunkte je einen Punkt

jeder Hauptebene, und: Legt man eine Parallele zur Drehachse durch den Endpunkt von $\mathfrak{J}$, so werden von diesem Punkt aus durch die Hauptebenen Strecken abgeschnitten, die sich wie $A : B : C$ verhalten. Hieraus folgt eine Konstruktion von $\mathfrak{u}$ aus $\mathfrak{J}$ und den Hauptrichtungen, welche für jede Darstellung in Parallelprojektion gut brauchbar ist:

Man lege durch den Endpunkt von $\mathfrak{J}$ eine Gerade derart, daß die Entfernungen dieses Punktes von den Schnittpunkten der Geraden mit den Hauptebenen sich wie die Hauptträgheitsmomente verhalten.

Legt man umgekehrt durch den Endpunkt von $\mathfrak{u}$ eine Gerade, deren Abschnitte bis zu den Hauptebenen sich wie $\frac{1}{A} : \frac{1}{B} : \frac{1}{C}$ verhalten, so hat sie die Richtung von $\mathfrak{J}$ und diese Abschnitte haben die Länge von $\frac{\mathfrak{J}}{A}, \frac{\mathfrak{J}}{B}, \frac{\mathfrak{J}}{C}$.[1])

3) Die Tatsache, daß die Vektoren $\mathfrak{J} - A\mathfrak{u}$, $\mathfrak{J} - B\mathfrak{u}$, $\mathfrak{J} - C\mathfrak{u}$, wenn man sich dieselben vom Bezugspunkt ausgehend denkt, in den Hauptebenen liegen, liefert weiter eine einfache Konstruktion dieser Ebenen und also der Hauptrichtungen, wenn ein Paar entsprechender Vektoren $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$, sowie die Hauptzahlen A, B, C bekannt sind. Man bilde ein Dreieck aus den Richtungen jener drei Vektoren, dann ist der Ursprung des Orthogonalsystemes, dessen Hauptebenen durch die Seiten dieses Spurendreiecks gehn, bestimmt als Schnittpunkt von drei Kugeln, welche die Dreiecksseiten zu Durchmessern haben. Diese Konstruktion gibt zwei in bezug auf die durch $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$ bestimmte Ebene symmetrische Lösungen. Bei der praktischen Durchführung der Konstruktion wird man die Sätze der Axonometrie verwenden.

Wenn sich das System der Hauptrichtungen geometrisch aus Impuls und Winkelgeschwindigkeit ableiten läßt, so wird auch vektoranalytisch $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ sich in $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ ausdrücken lassen.

Vorausgeschickt werden mögen noch die Gleichungen:

$$
(3) \qquad
\begin{aligned}
-[(\mathfrak{J} - B\mathfrak{u}) \,|\, (\mathfrak{J} - C\mathfrak{u})] &= (C - A)(A - B)p^2 \\
-[(\mathfrak{J} - C\mathfrak{u}) \,|\, (\mathfrak{J} - A\mathfrak{u})] &= (A - B)(B - C)q^2 \\
-[(\mathfrak{J} - A\mathfrak{u}) \,|\, (\mathfrak{J} - B\mathfrak{u})] &= (B - C)(C - A)r^2,
\end{aligned}
$$

die aus (2) durch innere Multiplikation entstehen; sie geben p, q, r in Funktion von $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$. (Im Fall des Kreisels, auf den keine Kraft wirkt, ist bekanntlich $\mathfrak{J}^2$ und $[\mathfrak{J} \,|\, \mathfrak{u}]$ konstant. Man gelangt daher sehr

1) Diese Konstruktionen lassen sich bei jeder affinen Transformation verwenden, auch wenn die Hauptrichtungen nicht paarweise senkrecht sind. — Für die genannten Ellipsoide enthalten diese Sätze eine Normalenkonstruktion.

einfach zu den Gleichungen (5) in K-S[1]) III § 2). Außerdem werde der Bivektor

$$\mathfrak{C} = [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$$

eingeführt. (Mechanische Bedeutung K-S III § 1: Bei der Momentandrehung des Massenteilchens dm um $\mathfrak{u}$ tritt die Zentrifugalkraft $dm[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]|\mathfrak{u}$ auf. Ihr Moment in bezug auf O ist $dm|[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]\cdot[\mathfrak{u}|\mathfrak{r}]$; summiert man über alle Massenteilchen, so entsteht genau $|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$).

In rechtwinkligen Koordinaten ist, wenn $\mathfrak{c} = |\mathfrak{C} = |[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$ ist,

$$\mathfrak{c} = |\mathfrak{C} = (B-C)qr\mathfrak{i} + (C-A)rp\mathfrak{j} + (A-B)pq\mathfrak{k}.$$

Vom Vektor $\mathfrak{i}$ lassen sich zunächst die inneren Produkte mit $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{u}$ und $|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$ d. h. Ap, p und $(B-C)qr$ aus (3) bestimmen. Aus den inneren Produkten eines Vektors $\mathfrak{r}$ mit 3 gegebenen Vektoren $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ergibt sich aber dieser nach der Formel:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\cdot\mathfrak{r} = [\mathfrak{r}|\mathfrak{a}]\cdot|[\mathfrak{b}\mathfrak{c}] + [\mathfrak{r}|\mathfrak{b}]\cdot|[\mathfrak{c}\mathfrak{a}] + [\mathfrak{r}|\mathfrak{c}]\cdot|[\mathfrak{a}\mathfrak{b}],$$

die leicht durch innere Multiplikation mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ zu verifizieren ist. Ihre Anwendung auf die genannten Vektoren liefert die gewünschten Gleichungen in der Form:

$$(4)\quad \begin{aligned} [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\mathfrak{i} &= -[\mathfrak{J}|\mathfrak{i}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{u} + [\mathfrak{u}|\mathfrak{i}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{J} + [\mathfrak{J}\mathfrak{u}\mathfrak{i}]\cdot|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]\\ [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\mathfrak{j} &= -[\mathfrak{J}|\mathfrak{j}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{u} + [\mathfrak{u}|\mathfrak{j}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{J} + [\mathfrak{J}\mathfrak{u}\mathfrak{j}]\cdot|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]\\ [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\mathfrak{k} &= -[\mathfrak{J}|\mathfrak{k}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{u} + [\mathfrak{u}|\mathfrak{k}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{J} + [\mathfrak{J}\mathfrak{u}\mathfrak{k}]\cdot|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}].\end{aligned}$$

Führt man für p, q und r die aus (3) sich ergebenden Ausdrücke in $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ ein, so erhält man für jede Hauptträgheitsachse wegen der Unbestimmtheit der Wurzelzeichen 2 in bezug auf die $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$ = ebene symmetrisch liegende Lösungen. Außerdem ist die positive Richtung in jeder derselben unbestimmt.

4) Sind also 2 entsprechende Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{J} = Q\mathfrak{u}$ der affinen Verwandtschaft sowie die Hauptzahlen A, B und C bekannt, so liefert (4) die zugehörigen Hauptrichtungen. Sind aber diese gefunden, so kann man leicht $Q^{-1}\mathfrak{u}$ und $Q^2\mathfrak{u} = Q\mathfrak{J}$ konstruieren, die affine Transformation Q überhaupt beliebig oft auf $\mathfrak{u}$ anwenden. Der entstehende Vektor $Q^m\mathfrak{u}$, wo m eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, muß sich also durch Vektorrechnung aus $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ ableiten lassen. Ist $Q^2\mathfrak{u}$ oder $Q^{-1}\mathfrak{u}$ gefunden, dann ist es nicht mehr schwer $Q^m\mathfrak{u}$ zu bestimmen. Für jede affine Transformation gilt ja die identische (Hamilton-Cayleysche) Gleichung

$$(5)\qquad Q^3 - a_1 Q^2 + a_2 Q - a_3 = 0,$$

---

1) Abkürzung für Klein und Sommerfeld, Theorie des Kreisels.

wo unter den Koeffizienten $a_1 a_2 a_3$ die Invarianten $A+B+C$, $BC+CA+AB$, ABC zu verstehen sind. Die Gleichung ist leicht zu verifizieren, wenn man sie auf die 3 Vektoren $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ anwendet; dabei ist $Q\mathfrak{i} = A\mathfrak{i}$ usw. Nach dieser Gleichung ist z. B.

$$Q^3\mathfrak{u} = a_1 \cdot Q^2\mathfrak{u} - a_2 \cdot Q\mathfrak{u} + a_3 \cdot \mathfrak{u}.$$

Um $Q^2\mathfrak{u}$ oder $Q^{-1}\mathfrak{u}$ zu bestimmen, kann man die bekannte Gleichung

$$(6) \qquad [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\cdot\mathfrak{r} = [\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\cdot\mathfrak{c} + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\cdot\mathfrak{a} + [\mathfrak{r}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\cdot\mathfrak{b}$$

verwenden und erhält, wenn man wieder statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ der Reihe nach $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{u}$ und $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$ setzt:

$$(7) \quad \begin{aligned} [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\cdot Q\mathfrak{J} &= [\mathfrak{J}\mathfrak{u}Q\mathfrak{J}]\cdot|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}] - [\mathfrak{J}\mathfrak{u}|\mathfrak{u}Q\mathfrak{J}]\cdot\mathfrak{J} + [\mathfrak{J}\mathfrak{u}|\mathfrak{J}Q\mathfrak{J}]\cdot\mathfrak{u} \quad \text{und} \\ [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\cdot Q^{-1}\mathfrak{u} &= [\mathfrak{J}\mathfrak{u}Q^{-1}\mathfrak{u}]\cdot|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}] - [\mathfrak{J}\mathfrak{u}|\mathfrak{u}Q^{-1}\mathfrak{u}]\cdot\mathfrak{J} + [\mathfrak{J}\mathfrak{u}|\mathfrak{J}Q^{-1}\mathfrak{u}]\cdot\mathfrak{u}. \end{aligned}$$

Die als Koeffizienten der Vektoren auf der rechten Seite auftretenden Produkte lassen sich aber in $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ ausdrücken; so ist, wenn man kartesische Koordinaten heranzieht,

$$[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}] = a_3[\mathfrak{J}\mathfrak{u}Q^{-1}\mathfrak{u}] = -(B-C)(C-A)(A-B)pqr$$

und also nach (3)

$$(8a) \quad \begin{aligned} &[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}] = a_3[\mathfrak{J}\mathfrak{u}Q^{-1}\mathfrak{u}] \\ &= \sqrt{-[(\mathfrak{J}-B\mathfrak{u})|(\mathfrak{J}-C\mathfrak{u})]\cdot[(\mathfrak{J}-C\mathfrak{u})|(\mathfrak{J}-A\mathfrak{u})]\cdot[(\mathfrak{J}-A\mathfrak{u})|(\mathfrak{J}-B\mathfrak{u})]}. \end{aligned}$$

Die übrigen Koeffizienten sind zunächst in Differenzen von inneren Produkten zu zerlegen, dann ist $[\mathfrak{u}|Q\mathfrak{J}] = \mathfrak{J}^2$ und $[\mathfrak{J}|Q^{-1}\mathfrak{u}] = \mathfrak{u}^2$ und nach der identischen Gleichung (5)

$$(8b) \quad \begin{aligned} [Q\mathfrak{J}|\mathfrak{J}] = [Q^3\mathfrak{u}|\mathfrak{u}] &= a_1\mathfrak{J}^2 - a_2[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}] + a_3\mathfrak{u}^2 \quad \text{und ebenso} \\ a_3[Q^{-1}\mathfrak{u}|\mathfrak{u}] &= \mathfrak{J}^2 - a_1[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}] + a_2\mathfrak{u}^2. \end{aligned}$$

5) Auf Grund der geometrischen Beziehungen zwischen einer bestimmten Körperlage, dem Impuls- und dem Drehungsvektor ist es jetzt möglich die gegenseitige Abhängigkeit der Vektoren während einer Momentanbewegung des starren Körpers im Raum zu untersuchen. Man hat bloß noch die Bedingung heranzuziehen, daß aus einer Körperlage die nächstfolgende hervorgeht durch Momentandrehung um die durch $\mathfrak{u}$ gegebene Drehachse. Denkt man sich die dem Zeitteilchen dt entsprechende Drehung ausgeführt und den neuen Impulsvektor $\mathfrak{J} + d\mathfrak{J}$ bekannt, dann muß sich aus letzterem und der neuen Körperlage der neue Drehungsvektor $\mathfrak{u} + d\mathfrak{u}$ bestimmen lassen. Oder da aus $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ die ursprüngliche Körperlage bestimmt werden kann, so gilt:

$\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ muß sich finden lassen, wenn $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{u}$ und $\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ bekannt ist, wo $\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ die Geschwindigkeit des Impulsvektorendpunktes im Raum nicht etwa im Körper bedeutet; will man die letztere $\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}$ haben, so ist noch die von der Drehung um $\mathfrak{u}$ herrührende Geschwindigkeit $|[\mathfrak{u}\mathfrak{J}]$ abzuziehen, so daß

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{dt} = \frac{d\mathfrak{J}}{dt} + |[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$$

wird. Zur Abkürzung möge $\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}$ beibehalten werden. Nach Gleichung (1) könnte man auch $\sum dm\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right]|\mathfrak{r}$ oder $Q\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ schreiben. Man hat daher

$$\frac{d\mathfrak{J}'}{dt} = Q\frac{d\mathfrak{u}}{dt} \tag{9a}$$

und

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = Q^{-1}\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}. \tag{9b}$$

Die letztere Gleichung repräsentiert das gesuchte Resultat, wenn es gelingt, die rechte Seite in $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{u}$, und $\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ auszudrücken; doch soll auch die erstere, die der zweiten dem Inhalt nach gleichbedeutend ist, in derselben Weise behandelt werden. Sie wird $\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ in Funktion von $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{u}$ und $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ liefern.

Aus (6) ergeben sich durch Anwendung der affinen Transformationen Q und Q^{-1} die Formeln:

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\,Q\mathfrak{r} \quad = [\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\cdot Q\mathfrak{c} + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\cdot Q\mathfrak{a} + [\mathfrak{r}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\cdot Q\mathfrak{b}$$

und

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\,Q^{-1}\mathfrak{r} = [\mathfrak{r}\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\cdot Q^{-1}\mathfrak{c} + [\mathfrak{r}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]\cdot Q^{-1}\mathfrak{a} + [\mathfrak{r}\mathfrak{c}\mathfrak{a}]\cdot Q^{-1}\mathfrak{b}.$$

Setzt man wieder $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{u}$ und $|[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$ statt $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, und $\mathfrak{c}$, und statt $\mathfrak{r}$ in der ersten Formel $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$, in der zweiten $\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}$, dann wird:

$$[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\frac{d\mathfrak{J}'}{dt} = a_3\left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right]\cdot|[\mathfrak{u}\,Q^{-1}\mathfrak{u}] - \left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right]\cdot Q\mathfrak{J} + \left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{J}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right]\cdot\mathfrak{J} \tag{10a}$$

$$[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \frac{1}{a_3}\left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}\right]\cdot|[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}] - \left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{J}}{dt}\right]\mathfrak{u} + \left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,|\,\mathfrak{J}\frac{d\mathfrak{J}}{dt}\right]\cdot Q^{-1}\mathfrak{u}. \tag{10b}$$

Dabei ist von den Formeln Gebrauch gemacht:

$$\begin{aligned} Q\,|[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] &= a_3\,|[Q^{-1}\mathfrak{a}\,Q^{-1}\mathfrak{b}] \\ Q^{-1}\,|[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] &= \frac{1}{a_3}\,|[Q\mathfrak{a}\,Q\mathfrak{b}], \end{aligned} \tag{11}$$

deren Richtigkeit leicht durch innere Multiplikation mit einem ganz beliebigen Vektor $Q^{-1}\mathfrak{r}$ bezw. $Q\mathfrak{r}$ nachgewiesen werden kann. Benützt man noch (7), dann gilt:

Die erste der Differentialgleichungen (10) bestimmt die Bewegung des Impulsvektors, wenn diejenige des Drehungsvektors bekannt ist, und umgekehrt leitet die zweite die Bewegung von $\mathfrak{u}$ aus der von $\mathfrak{J}$ ab.

6) So muß z. B. die Bewegung vom Drehungsvektor $\mathfrak{u}$ durch die zweite Gleichung in dem einfachsten Fall völlig bestimmt sein, wo $\mathfrak{J}$ konstant bleibt, also bei der Bewegung eines starren Körpers, auf welchen keinerlei Kräfte wirken. Es wird dann

$$(12) \qquad a_3 \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = |[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}]; \qquad \text{also nach (7)}$$

$$(13) \qquad a_3[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]^2 \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = [Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}] \cdot [\mathfrak{J}\mathfrak{u}] | \mathfrak{J} - [\mathfrak{J}\mathfrak{u} | \mathfrak{J} Q \mathfrak{J}] \cdot |[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$$
$$= [Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}][\mathfrak{J}\mathfrak{u}]|\mathfrak{J} - \{\mathfrak{J}^2 \cdot \mathfrak{J}^2 - a_1\mathfrak{J}^2[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}] + a_2[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}]^2 - a_3[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}]\mathfrak{u}^2\} \cdot |[\mathfrak{J}\mathfrak{u}].$$

Damit ist die Geschwindigkeit vom Drehvektorendpunkt zerlegt in eine innerhalb und eine senkrecht zur $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$-Ebene liegende Komponente. Zerlegt man $\mathfrak{u}$ selbst in der Form

$$\mathfrak{J}^2 \cdot \mathfrak{u} = [\mathfrak{J} | \mathfrak{u}] \cdot \mathfrak{J} + [\mathfrak{J}\mathfrak{u}] | \mathfrak{J}$$

dann ist die mit $\mathfrak{J}$ gleichgerichtete Komponente konstant. Statt der kinetischen Energie $\frac{1}{2}[\mathfrak{J} | \mathfrak{u}]$ werde die Konstante $\frac{\mathfrak{J}^2}{[\mathfrak{J} | \mathfrak{u}]} = D$ (Parameter der Bewegung) eingeführt. Setzt man ferner die zweite veränderliche Komponente, welche stets in der zu $\mathfrak{J}$ senkrechten invariablen Ebene liegt, $\frac{[\mathfrak{J}\mathfrak{u}] | \mathfrak{J}}{\mathfrak{J}^2} = \mathfrak{u}'$, dann ist:

$$D\mathfrak{u} = \mathfrak{J} + D\mathfrak{u}'$$

Nach (13) wird damit

$$(14) \qquad \left[\mathfrak{u}' \left| \frac{d\mathfrak{u}'}{dt} \right.\right] = \sqrt{-\left[\mathfrak{u}'^2 + \frac{(D-B)(D-C)\mathfrak{J}^2}{BCD^2}\right] \cdot \left[\mathfrak{u}'^2 + \frac{(D-C)(D-A)\mathfrak{J}^2}{CAD^2}\right] \cdot \left[\mathfrak{u}'^2 + \frac{(D-A)(D-B)\mathfrak{J}^2}{ABD^2}\right]}$$

und

$$(15) \qquad \left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}' \frac{d\mathfrak{u}'}{dt}\right] = \frac{\mathfrak{J}^2}{D} \mathfrak{u}'^2 - \frac{(D-A)(D-B)(D-C)\mathfrak{J}^2 \cdot \mathfrak{J}^2}{ABCD^3}.$$

Die erste dieser Gleichungen liefert das elliptische Zeitintegral, die zweite ein Integral 3. Gattung für die Herpolhodie. Statt $\left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}' \frac{d\mathfrak{u}'}{dt}\right]$ kann man ja $J \cdot \mathfrak{u}'^2 \cdot \frac{d\psi}{dt}$ schreiben, wo J die konstante Länge des Impulsvektors und ψ den Polarwinkel der Herpolhodie bedeutet. Frühere

Ableitungen dieser Gleichung[1]) stützen sich auf die Poinsot-Bewegung, d. h. das Abrollen des Poinsotschen Trägheitsellipsoids $[Q\mathfrak{u}|\mathfrak{u}] = 2T$ auf der invariablen Ebene $[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}] = 2T$ und sind sehr umständlich im Vergleich mit der hier entwickelten, bei welcher sie sich fast unmittelbar aus einer Gleichung ergibt, die für jede Bewegung starrer Körper gilt oder durch eine einfache Umformung der Gleichung (9b), die für diesen Fall die Form

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = Q^{-1} | [\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$$

annimmt.

7) Wie bei diesem Beispiel, so werden auch sonst für die Anwendung skalare Gleichungen sich geeigneter erweisen. Es sollen daher die Gleichungen (10), die ja dem Inhalt nach einander äquivalent sind, durch drei skalare Gleichungen ersetzt werden.

Die erste derselben

$$[\mathfrak{J}|d\mathfrak{u}] = [\mathfrak{u}|d\mathfrak{J}] \tag{16}$$

läßt sich aus jeder der Gleichungen (10) oder auch (9) ableiten.

In den Fällen, wo $\mathfrak{J}$ auch im Raum mit $\mathfrak{u}$ affin zusammenhängt (Teil II behandelt ein solches Beispiel), hat die Gleichung eine sehr einfache Bedeutung. Es sind dann $\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{u}}{dt}$ ebenso entsprechende Vektoren in beiden Systemen wie $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$, so daß die Gleichung (16) dasselbe aussagt, wie

$$[\mathfrak{J}|\mathfrak{u}'] = [\mathfrak{J}'|\mathfrak{u}],$$

nämlich, wie früher gezeigt wurde, daß die Hauptrichtungen der affinen Verwandtschaft aufeinander senkrecht stehen. Für die Bewegung starrer Körper gilt also:

Sind $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ durch eine lineare Vektorgleichung verbunden, in der noch beliebige im Raum konstante Vektoren vorkommen dürfen, so gibt es im Raum drei paarweise senkrecht stehende Hauptrichtungen,

---

1) Man vergleiche die Abhandlung von Résal: Theorie de la rotation des corps solides im Journ. de l'école polyt. Heft 53 (1883), welche zum Zweck hat, die Ableitung Poinsots durch eine einfachere zu ersetzen und das von Poinsot unbestimmt gelassene Vorzeichen des in der Formel auftretenden Wurzelausdruckes

$$\sqrt{\varDelta} = \Gamma = \sqrt{(h^2 - \alpha^2)(h^2 - \beta^2)(h^2 - \gamma^2)}$$

zu diskutieren. Da bei uns diese Wurzel an der betreffenden Stelle gar nicht auftritt, so folgt, daß der Ausdruck auch ohne Wurzelzeichen geschrieben werden kann, was sich sofort bestätigt, wenn man für die Abkürzungen α^2, β^2, γ^2 ihre ursprünglichen Ausdrücke in a, b, c und h wieder einführt. Dies ist auch bemerkt in Petrus, Beiträge zur Theorie der Herpolhodie Poinsots, Dissertation. Halle 1902 S. 20.

in welche $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ fallen müssen, wenn sie überhaupt gleiche Richtung annehmen.

Weil aber $\mathfrak{u}$ in diesem Fall in eine der drei Hauptträgheitsachsen zu liegen kommt, so gilt weiter:

Wird eine Hauptträgheitsachse zur Drehachse, so muß sie in diesem Moment in einer jener Richtungen liegen.

Um weitere geeignete Skalargleichungen zu erhalten, multipliziere man beide Gleichungen (10) auf äußere Art mit dem Bivektor $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$, der zur Abkürzung $\mathfrak{E}$ geschrieben werden soll, $Q^{\text{II}}\mathfrak{E}$[1]) bezeichnet dann den Bivektor, der aus $\mathfrak{E}$ durch die affine Transformation Q hervorgeht, d. h. $[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}]$, ebenso ist ${Q^{\text{II}}}^{-1}\mathfrak{E} = [\mathfrak{u}\, Q^{-1}\mathfrak{u}]$. So erhält man

$$(17)\quad \begin{aligned} &a_3[{Q^{\text{II}}}^{-1}\mathfrak{E} \mid \mathfrak{E}]\cdot\left[\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] - [\mathfrak{E}\mid\mathfrak{E}]\cdot\left[\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}\right] = [\mathfrak{E}\, Q\mathfrak{J}]\cdot\left[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] \\ &[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{E}]\cdot\left[\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] - \frac{1}{a_3}[Q^{\text{II}}\mathfrak{E}\mid\mathfrak{E}]\cdot\left[\mathfrak{E}\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}\right] = [\mathfrak{E}\, Q^{-1}\mathfrak{u}]\ \left[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{J}\frac{d\mathfrak{J}}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Oder, wenn man eine Gleichung haben will, welche $\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}$ und daher die Zeit nicht mehr enthält, multipliziere man die erste mit $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]\mid\mathfrak{J} = \mathfrak{u}\cdot[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{J}] - \mathfrak{J}[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]$ und der Symmetrie halber die zweite mit $[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]\mid\mathfrak{u}$, dann wird

$$(18)\quad \begin{aligned} &[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\, Q\mathfrak{J}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\, d\mathfrak{u}] = [\mathfrak{E}\mid Q^{\text{II}}\mathfrak{E}]\cdot[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{u}\, d\mathfrak{u}] - [\mathfrak{E}\mid\mathfrak{E}]\cdot[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{J}\, d\mathfrak{J}] \\ &[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\, Q^{-1}\mathfrak{u}]\cdot\left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{J}'}{dt}\right] = [\mathfrak{E}\mid\mathfrak{E}]\cdot\left[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{u}\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] - [\mathfrak{E}\mid {Q^{\text{II}}}^{-1}\mathfrak{E}]\cdot\left[\mathfrak{E}\mid\mathfrak{J}\frac{d\mathfrak{J}}{dt}\right] \end{aligned}$$

In allen diesen Formeln ist bei der Anwendung zu benützen:

$$(8a)\quad \begin{aligned} &[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}] = a_3[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\, Q^{-1}\mathfrak{u}] \\ &= \sqrt{-[(\mathfrak{J}-B\mathfrak{u})\mid(\mathfrak{J}-C\mathfrak{u})]\cdot[(\mathfrak{J}-C\mathfrak{u})\mid(\mathfrak{J}-A\mathfrak{u})]\cdot[(\mathfrak{J}-A\mathfrak{u})\mid(\mathfrak{J}-B\mathfrak{u})]} \end{aligned}$$

und nach (8b)

$$\left[\mathfrak{E}\mid Q^{\text{II}}\mathfrak{E}\right] = -\mathfrak{J}^2\cdot\mathfrak{J}^2 + a_1\mathfrak{J}^2\cdot[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}] - a_2[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]^2 + a_3[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]\cdot\mathfrak{u}^2$$

$$a_3\left[\mathfrak{E}\mid {Q^{\text{II}}}^{-1}\mathfrak{E}\right] = \mathfrak{J}^2\cdot[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}] - a_1[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]^2 + a_2[\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]\cdot\mathfrak{u}^2 - a_3\mathfrak{u}^2\cdot\mathfrak{u}^2.$$

Beim Rechnen mit diesen Größen ist folgende identische Beziehung zu beachten:

$$\begin{aligned} \left[\mathfrak{E}\mid Q^{\text{II}}\mathfrak{E}\right]\cdot\left[\mathfrak{E}\mid {Q^{\text{II}}}^{-1}\mathfrak{E}\right] - \mathfrak{E}^2\cdot\mathfrak{E}^2 &= \left[Q^{\text{II}}\mathfrak{E}\mathfrak{E}\mid\mathfrak{E}\,{Q^{\text{II}}}^{-1}\mathfrak{E}\right] \\ &= [\mathfrak{J}\mid\mathfrak{u}]\cdot[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\, Q^{-1}\mathfrak{u}], \end{aligned}$$

1) Die Bezeichnung Q^{II} für Bivektorquotienten stammt aus den Vorlesungen von Herrn Prof. Mehmke über Vektorenrechnung. Zur Vermeidung von Mißverständnissen ist die Einführung derselben neben Q notwendig.

mit der z. B. die Gleichungen (18) sich leicht aus (17) herleiten lassen. Der Beweis für die Richtigkeit der letzteren Gleichung folgt aus der „Regel des mittleren Faktors".[1] Es ist nämlich:

$$[Q^{\mathrm{II}}\mathfrak{C}\mathfrak{C}] = [Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\cdot\mathfrak{J}\mathfrak{u}] = \mathfrak{J}\cdot[Q\mathfrak{J}\mathfrak{J}\mathfrak{u}]$$

$$\left[\mathfrak{C}\,Q^{\mathrm{II}^{-1}}\mathfrak{C}\right] = \left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u}\,Q^{-1}\mathfrak{u}\right] = \mathfrak{u}\cdot\left[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,Q^{-1}\mathfrak{u}\right].$$

Ferner ist von der auch für Q^{II} gültigen Regel Gebrauch gemacht: $[Q^{\mathrm{II}}\mathfrak{A}\,|\,\mathfrak{B}] = [\mathfrak{A}\,|\,Q^{\mathrm{II}}\mathfrak{B}]$. Sie läßt sich leicht auf die entsprechende Regel für Q zurückführen, wenn man die Ergänzungen der Bivektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einführt, die $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ heißen mögen. Nach (11) ist dann: $Q^{\mathrm{II}}\mathfrak{A} = a_3\,Q^{-1}\mathfrak{a}$; dasselbe gilt für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{b}$, also wird $[Q^{-1}\mathfrak{a}\,|\,\mathfrak{b}] = [\mathfrak{a}\,|\,Q^{-1}\mathfrak{b}]$.

Diese beiden letzteren Regeln sind auch geeignet, die Gleichungen (18) direkt nachzuweisen mittels der Beziehungen

$$[\mathfrak{J}\,d\mathfrak{J}'] = Q^{\mathrm{II}}[\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}]$$

$$[\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}] = Q^{\mathrm{II}^{-1}}[\mathfrak{J}\,d\mathfrak{J}'],$$

die wieder mit den Gleichungen (9), von denen die Entwicklung ausging, äquivalent sind. Da $[\mathfrak{J}\,d\mathfrak{J}] = [\mathfrak{J}\,d\mathfrak{J}']$ ist, so kann man (18) überführen in

$$[\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{u}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,Q\mathfrak{J}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}] = [Q^{\mathrm{II}}\mathfrak{C}\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}]$$

$$[\mathfrak{J}\,|\,\mathfrak{u}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,Q^{-1}\mathfrak{u}]\cdot[\mathfrak{J}\mathfrak{u}\,d\mathfrak{J}'] = \left[\mathfrak{C}\,Q^{\mathrm{II}^{-1}}\mathfrak{C}\,|\,\mathfrak{C}\cdot\mathfrak{J}\,d\mathfrak{J}'\right].$$

Faßt man $d\mathfrak{J}'$ nicht mehr als Abkürzung für $d\mathfrak{J} + |[\mathfrak{J}\mathfrak{u}]\,dt$ auf, wie seither, so gelten diese Gleichungen im System des starren Körpers, und zwar, wie die Regel des mittleren Faktors zeigt, identisch.

8) Die Gleichungen (10) oder (16) und (17) bestimmen zusammen mit den Bewegungsgleichungen vollständig die Bewegung eines starren Systems.

Wirken auf dasselbe eine Reihe von äußeren Kräften $\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2\ldots\mathfrak{P}_n$, so wird die Bewegung des Schwerpunktes dargestellt durch die Gleichung

$$M\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \sum\mathfrak{P}_i, \tag{19}$$

wo $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit des Schwerpunktes ist, der am besten als Bezugspunkt gewählt wird, wenn kein Punkt des Körpers eine einfachere Bahn beschreibt.

Zur Bestimmung der Drehung um den Schwerpunkt dient außer (10b) der sog. (erweiterte) Flächensatz:

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = \sum|\left[\mathfrak{r}_i\mathfrak{P}_i\right] \tag{20}$$

---

1) Von Whitehead (a. a. O. p. 188) so genannt.

wo $\mathfrak{r}_i$ den Vektor vom Schwerpunkt zum Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{P}_i$ bedeutet.

Die 3 Gleichungen sind ein Ersatz für die Eulersche Bewegungsgleichung:

$$\text{(20a)} \qquad \frac{d\mathfrak{J}}{dt} - | [\mathfrak{J}\mathfrak{u}] = \sum | [\mathfrak{r}_i \mathfrak{P}_i]$$

die aus der letzten entsteht, wenn man auch wieder eine Momentanbewegung als Drehung um $\mathfrak{u}$ ansieht und zu dem veränderlichen System des starren Körpers übergeht.

In der Loslösung von diesem im Raum veränderlichen System besteht der Hauptvorteil der Gleichungen (10) und (20); sie bringen das Problem der Bewegung eines starren Körpers der Lösung so nahe, als es allgemein überhaupt möglich ist. Die Lösung muß ja die Bewegung des Körpers relativ zum festen Raumsystem darstellen. Jedenfalls sind die Gleichungen den Eulerschen vorzuziehen, wenn es sich um Kräfte handelt, welche nicht auf Punkte wirken, die im Körpersystem fest sind, wie in dem unter II behandelten Beispiel.

9) Sind zwei Hauptträgheitsmomente eines Körpers einander gleich, etwa $B = A$, dann wird nach (1″) oder (2)

$$\mathfrak{J} = A\mathfrak{u} + (C - A) r \mathfrak{k}.$$

Der Impuls $\mathfrak{J}$ liegt mit dem Drehungsvektor $\mathfrak{u}$ und der Körperachse $\mathfrak{k}$ in einer Ebene. Es handelt sich jetzt nur noch um eine ebene affine Transformation, welche $\mathfrak{u}$ in $Q\mathfrak{u} = \mathfrak{J}$ überführt. Die Hauptzahlen sind A und C, die identische Gleichung heißt:

$$Q^2 - (A + C)\, Q + AC = 0.$$

Es gilt daher die Gleichung:

$$[(\mathfrak{J} - A\mathfrak{u}) | (\mathfrak{J} - C\mathfrak{u})] = 0.$$

Die Gleichung (16) behält ihre Form bei:

$$[\mathfrak{J} | d\mathfrak{u}] = [\mathfrak{u} | d\mathfrak{J}].$$

Weil $Q\mathfrak{J}$ in derselben Ebene mit $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ liegt, verschwindet $[Q\mathfrak{J}\,\mathfrak{J}\,\mathfrak{u}]$; ferner ist $Q^{II}\mathfrak{E} = AC \cdot \mathfrak{E}$ d. h. Q^{II} konstant gleich AC, daher ergibt jede der Gleichungen (17)

$$A\left[\mathfrak{J}\,\mathfrak{u}\,\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] = \left[\mathfrak{J}\,\mathfrak{u}\,\frac{d\mathfrak{J}}{dt}\right] + [\mathfrak{J}\,\mathfrak{u}]^2.$$

An Stelle einer der drei skalaren Differentialgleichungen ist also eine endliche Gleichung getreten; dies stimmt damit überein, daß alle Anfangslagen des Körpers ein und dieselbe Bewegung ergeben, welche durch Drehung desselben um die Körperachse hervorgehen.

II.

Im zweiten Teil dieser Arbeit soll das Seitherige angewendet werden auf die Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel mit 3 verschiedenen Hauptträgheitsmomenten bei zentraler Lage des Schwerpunktes.

1) Weil die Bewegungsgleichungen auch gelten, wenn sich außerhalb der Kugelfläche Massen befinden, so kann das Problem auch allgemeiner formuliert werden. Ein Kreisel mit kugelförmig abgerundeter Spitze rollt ohne Gleitung auf einer Ebene, wobei keine äußern Kräfte wirken sollen. Ist der Halbmesser der in Kontakt befindlichen Kugelfläche gleich Null, dann muß die Bewegung in die des kräftefreien Kreisels übergehen. Im Folgenden soll aber der Einfachheit halber immer von einer horizontal rollenden Kugel die Rede sein.

Ist $\mathfrak{r}$ ein Vektor von der Länge des Kugelhalbmessers, der vom Mittelpunkt O abwärts zum Berührungspunkt C (Momentanzentrum) geht, und ist $\mathfrak{P}$ die im Berührungspunkt horizontal wirkende Reaktionskraft (die Wirkung der Schwerkraft ist durch die vertikale Reaktionskraft aufgehoben; von Reibung soll abgesehen werden), während wie früher die Körpermasse M, die Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$, der Impuls $\mathfrak{J}$ heißen soll, dann sind die Bewegungsgleichungen:

$$M\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{P},$$

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = |[\mathfrak{r}\mathfrak{P}].$$

$\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ steht senkrecht zum vertikalen Vektor $\mathfrak{r}$, liegt also horizontal, oder der Endpunkt von $\mathfrak{J}$ beschreibt eine in horizontaler Ebene liegende Kurve, die Impulskurve. Durch Elimination von $\mathfrak{P}$ entsteht

$$\frac{d\mathfrak{J}}{dt} = M|\left[\mathfrak{r}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}\right].$$

Die beiden horizontalliegenden Geschwindigkeiten $\frac{d\mathfrak{J}}{dt}$ und $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ stehen aufeinander senkrecht und ihre Längen sind proportional. Die Impulskurve ist daher ähnlich zu der Kurve, welche vom Endpunkt der Schwerpunktsgeschwindigkeit beschrieben wird, d. h. zum Hodographen der Schwerpunktsbahn und gegen die letztere Kurve um einen rechten Winkel gedreht.

Die letzte Gleichung liefert sofort die Integralgleichung:

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 + M|[\mathfrak{r}\mathfrak{v}]. \tag{21}$$

Die Integrationskonstante $\mathfrak{J}_0$ bedeutet nichts anderes als den für das Momentanzentrum als Anfangspunkt gültigen Impuls, welcher ja der

Länge und Richtung nach konstant sein muß. Dies wird eine zweite Ableitung der Gleichung (21) bestätigen. Bedeutet nämlich $\mathfrak{J}_0$ wirklich den Impuls für den Anfangspunkt C, dann ist nach der Definition des Impulses:

$$\mathfrak{J}_0 = \sum dm \,|\left[\mathfrak{x}\frac{d\mathfrak{x}}{dt}\right]$$

wo $\mathfrak{x}$ ein Vektor von C bis zu irgend einem Teilchen mit der Masse dm ist. Zum selben Massenteilchen geht aus dem Schwerpunkt O der Vektor $\mathfrak{x} + \mathfrak{r}$, also ist der Schwerpunktsimpuls:

$$\mathfrak{J} = \sum dm \,|\left[(\mathfrak{x} + \mathfrak{r})\frac{d(\mathfrak{x} + \mathfrak{r})}{dt}\right]$$

$$= \mathfrak{J}_0 + \sum dm \,|\left[\mathfrak{r}\frac{d(\mathfrak{x} + \mathfrak{r})}{dt}\right].$$

Das letzte Glied der rechten Seite läßt sich aber leicht auf die Form $M \cdot [\mathfrak{r}\mathfrak{v}]$ bringen, wenn man den für alle Massenteilchen konstanten Vektor $\mathfrak{r}$ vor das Summenzeichen stellt und für $\sum dm \frac{d(\mathfrak{x} + \mathfrak{r})}{dt}$ nach einem bekannten Schwerpunktssatz $M\mathfrak{v}$ schreibt.[1])

Gleichung (21) gilt allgemein für rollende und gleitende Bewegung. Die im Berührungspunkt angreifende Kraft $\mathfrak{P}$ kann dabei noch ganz beliebig sein. Soll die Bewegung eine rein rollende sein, dann ist die Geschwindigkeit des Punktes der Kugel, der gerade Berührungspunkt ist, gleich Null; diese Geschwindigkeit erhält man, wenn zu der Schwerpunktsgeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ noch die Geschwindigkeit $|[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ geometrisch addiert wird, welche der Drehung um die durch den Schwerpunkt gelegte Drehachse entspricht. Also ist $\mathfrak{v} + |[\mathfrak{u}\mathfrak{r}] = 0$ oder:

$$\mathfrak{v} = -|[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]. \tag{22}$$

$\mathfrak{v}$ steht also senkrecht auf der Drehachse und ist der Länge nach zur Horizontalkomponente der Winkelgeschwindigkeit proportional. Für die Kurven, welche die Endpunkte von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ beschreiben (Herpolhodie und Hodograph), folgt hieraus: Die Horizontalprojektion der Herpolhodie ist (wie die Impulskurve) ähnlich zum Hodographen und gegen denselben um einen rechten Winkel gedreht (jedoch im entgegengesetzten Sinn wie die Impulskurve).

2) Jetzt läßt sich der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ im Raum erörtern. Denn mit Gleichung (22) wird aus (21)

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}_0 - M[\mathfrak{r}\mathfrak{u}]\,|\,\mathfrak{r}\ ^{2)} \tag{23}$$

---

1) Vgl. Föppl. Vorlesungen über technische Mechanik IV § 2.

2) Aus der (23) entsprechenden Differentialgleichung

$$\frac{d(\mathfrak{J} + M\mathfrak{u})}{dt} - M\mathfrak{r} \cdot \left[\mathfrak{r}\,\middle|\,\frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] = 0$$

die geometrische Deutung dieser Gleichung wird einfacher, wenn man dem Vektor $\mathfrak{r}$ die Länge 1 erteilt: man kann ja dann, damit die Gleichung wieder richtig ist, die Bedeutung von M dahin abändern, daß damit von jetzt ab die mit dem Quadrat des Kugelhalbmessers multiplizierte Masse bezeichnet werden, M also von der Größenordnung eines Trägheitsmoments sein soll. Bei dieser Deutung der Bezeichnungen tritt klar hervor, daß man nur $M = 0$ zu setzen hat, um die Bewegung des kräftefreien Kreisels zu erhalten. Es sei aber gleich jetzt hervorgehoben, daß unser Problem gegenüber von dem des kräftefreien Kreisels in doppelter Hinsicht eine Verallgemeinerung in sich schließt, da nicht bloß die Länge des Kugelhalbmessers, sondern auch noch die gegenseitige Lage der Vektoren $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{r}$, d. h. der von ihnen eingeschlossene Winkel beim Kugelproblem in Betracht kommen, Faktoren, die beide beim kräftefreien Kreisel wegfallen.

Die lineare Gleichung (23) zeigt zunächst, daß $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ affin zusammenhängen, und zwar auf folgende Art:

Der Vektor $[\mathfrak{r}\mathfrak{u}] | \mathfrak{r}$, (der sich auch entwickelt schreiben läßt: $\mathfrak{u} - \mathfrak{r}[\mathfrak{u} | \mathfrak{r}]$) liegt in der Ebene von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{r}$ und steht senkrecht auf $\mathfrak{r}$; da $\mathfrak{r}$ die Länge 1 hat, so bedeutet $[\mathfrak{r}\mathfrak{u}] | \mathfrak{r}$ nichts anderes als die Horizontalprojektion von $\mathfrak{u}$. Ist $\mathfrak{u}$ bekannt, so läßt sich durch geometrische Subtraktion der mit M multiplizierten Horizontalprojektion der Winkelgeschwindigkeit von dem konstanten Vektor $\mathfrak{J}_0$ der Impuls $\mathfrak{J}$ konstruieren.

Führt man $\mathfrak{J}_0 - M[\mathfrak{r}\mathfrak{u}] | \mathfrak{r}$ statt $\mathfrak{J}$ ein in die Gleichung $[\mathfrak{J} | d\mathfrak{u}] = [d\mathfrak{J} | \mathfrak{u}]$, dann wird:

$$[\mathfrak{J}_0 | d\mathfrak{u}] = 0.$$

Durch Integration ergibt sich

$$[\mathfrak{J}_0 | \mathfrak{u}] = 2T. \tag{24}$$

---

erhält man durch Übergang zum System des starren Körpers die Eulersche Gleichung:

$$\frac{d(\mathfrak{J} + M\mathfrak{u})}{dt} - M\mathfrak{r} \cdot \left[\mathfrak{r} \middle| \frac{d\mathfrak{u}}{dt}\right] = | [\mathfrak{J}\mathfrak{u}],$$

die genau übereinstimmt mit den Gleichungen, welche Herr Hölder in seiner Abhandlung: Über die Prinzipien von Hamilton und Maupertuis, Gött. Nachrichten 1896 S. 156 als Beispiel für die richtige Anwendung des Hamiltonschen Prinzips abgeleitet hat. Man hat

$$-\mathfrak{r} = \gamma_1 \mathfrak{i} + \gamma_2 \mathfrak{j} + \gamma_3 \mathfrak{k}$$

zu setzen und ebenso $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ in rechtwinkligen Koordinaten zu schreiben, dann lautet die erste:

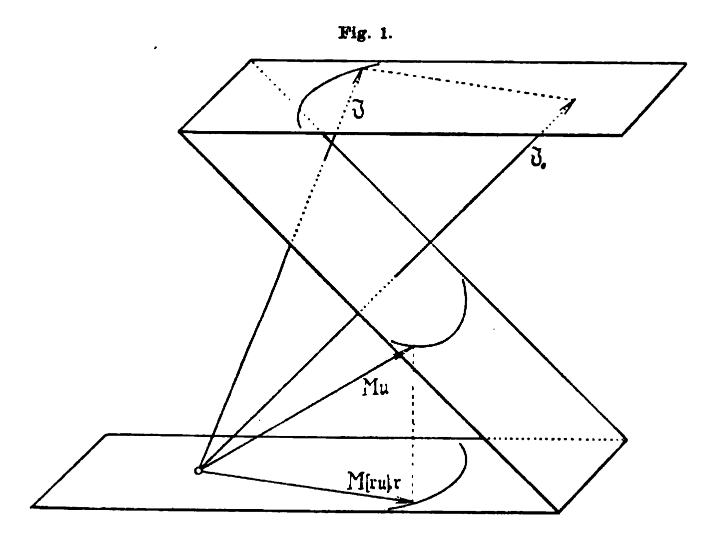
$$(A + M)\frac{dp}{dt} - M\gamma_1\left(\gamma_1 \frac{dp}{dt} + \gamma_2 \frac{dq}{dt} + \gamma_3 \frac{dr}{dt}\right) = (B - C)qr$$

und entsprechend die beiden andern.

Als Integrationskonstante ist die doppelte kinetische Energie zu wählen, welche ja tatsächlich nach (1), wenn es sich nur um eine Drehung handelt, gleich dem innern Produkt aus Impuls und Winkelgeschwindigkeit ist. Der Impuls muß sich dabei natürlich auf das Momentanzentrum beziehen. Will man die doppelte kinetische Energie nach (21) im Schwerpunktsimpuls ausdrücken, so tritt zu $[\mathfrak{J} \mid \mathfrak{u}]$ noch das mit der Masse multiplizierte Quadrat der Schwerpunktsgeschwindigkeit.

Nach (22) ist die Projektion von $\mathfrak{u}$ auf $\mathfrak{J}_0$ konstant $= \frac{2T}{J}$, wo J die Länge von $\mathfrak{J}_0$ bedeutet. Der Endpunkt von $\mathfrak{u}$ und die Kurve,

Fig. 1.



welche derselbe beschreibt, die Herpolhodie, liegt in einer zu $\mathfrak{J}_0$ senkrechten Ebene, der invariablen Ebene, welche vom Ausgangspunkt O der Vektoren den Abstand $\frac{2T}{J}$ hat.

Damit kann, wenn $\mathfrak{J}$ bekannt ist, $\mathfrak{u}$ gefunden werden. $\mathfrak{J}_0 - \mathfrak{J}$ liefert die Horizontalprojektion des Endpunkts von $M\mathfrak{u}$, der außerdem nach dem Vorhergehenden in einer zu $\mathfrak{J}_0$ senkrechten Ebene liegt, die von O den Abstand $\frac{2TM}{J}$ hat.

Vektoranalytisch entspricht dieser Konstruktion die Gleichung:

$$[\mathfrak{J}_0\,\mathfrak{r}]\,M\mathfrak{u} = [(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0)\,\mathfrak{r}]\,\mathfrak{J}_0 + 2TM\mathfrak{r}.$$

Da sie aber späterhin nicht benützt wird, soll sie ohne Beweis angegeben werden.

Nach dem im 1. Teil über die Gleichung (16) Gesagten muß die soeben näher ausgeführte affine Transformation, welche $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{J}$ über-

führt, in einer reinen Deformation bestehen. Wenn $\mathfrak{u}$ in der durch $\mathfrak{J}_0$ gelegten Vertikalebene liegt, so fällt auch $\mathfrak{J}$ in diese Ebene, dieselbe muß daher zwei aufeinander senkrechte Hauptrichtungen enthalten, und also die dritte senkrecht zur $[\mathfrak{J}_0 \mathfrak{r}]$-ebene stehen. Für diese letztere wird $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ unendlich groß, was bei der Bewegung eines starren Körpers mit beliebiger Massenverteilung im allgemeinen nicht möglich ist. Auch die andern lassen sich leicht finden. Man erhält für den Neigungswinkel φ der Hauptrichtung gegen die Horizontalebene, wenn α der Winkel von $\mathfrak{J}_0$ gegen die Horizontalebene ist:

$$\frac{\sin 2\varphi}{\sin 2(\varphi - \alpha)} = \frac{J^2}{2TM}.$$

Als Hauptzahlen ergeben sich, wenn $\frac{J^2}{2T} = D$ gesetzt wird, die beiden Werte:

$$\frac{D - M \pm \sqrt{D^2 + M^2 - 2DM \cos 2\alpha}}{2}$$

von welchen der eine sicher $\gtrless 0$ ist; $\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{u}$ können aber niemals entgegengesetzt gerichtet sein, so daß nur eine Hauptrichtung als praktisch möglich übrig bleibt.

3) Für die Polhodie läßt sich wenigstens ein Ort finden. Aus der Vektorgleichung:

$$\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0 + M\mathfrak{u} = M\mathfrak{r}[\mathfrak{u} \mid \mathfrak{r}]$$

leiten sich die skalaren Gleichungen ab:

$$[(\mathfrak{J} + \mathfrak{J}_0) \mid (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0 + M\mathfrak{u})] = 2M[\mathfrak{J}_0 \mid \mathfrak{r}][\mathfrak{r} \mid \mathfrak{u}],$$

$$[\mathfrak{u} \mid (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_0 + M\mathfrak{u})] = M[\mathfrak{r} \mid \mathfrak{u}]^2,$$

woraus durch Elimination von $[\mathfrak{r} \mid \mathfrak{u}]$ die Gleichung 4. Grades in $\mathfrak{u}$ entsteht:

$$([Q(Q+M)\,\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}] - J^2 + 2TM)^2 = 4M[\mathfrak{J}_0 \mid \mathfrak{r}]^2([(Q+M)\,\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}] - 2TM),$$

welche eine Fläche 4. Ordnung im System des starren Körpers darstellt, da $\mathfrak{u}$ in derselben nicht mehr mit den Vektoren $\mathfrak{J}_0$ und $\mathfrak{r}$ zusammenhängt.

Jedem der ∞^2 Vektoren $\mathfrak{J}$, welche in der durch den Endpunkt von $\mathfrak{J}_0$ gelegten Horizontalebene endigen, ist jetzt ein bestimmter Vektor $\mathfrak{u}$ und nach (4) eine Lage der Kugel (zweideutig) zugeordnet. Wie die Kugellagen aufeinander folgen, wird durch (13) bestimmt, und (12) gibt den zeitlichen Verlauf der Bewegung. Daß sich diese Differentialgleichungen zweiten Grads allgemein nach den gewöhnlichen Methoden der Analysis mit Erfolg behandeln lassen, ist nicht zu er-

warten. Man ist daher auf die Behandlung besonderer Fälle angewiesen.

Sind zwei Hauptträgheitsmomente einander gleich, also $B = A$, dann erhält man die Herpolhodie sofort durch Heranziehen der Gleichung

$$[(\mathfrak{J} - A\mathfrak{u}) \mid (\mathfrak{J} - C\mathfrak{u})] = 0.$$

Denn wenn man $\mathfrak{J}$ durch $\mathfrak{J}_0 - M(\mathfrak{u} - \mathfrak{r}[\mathfrak{u} \mid \mathfrak{r}])$ ersetzt, entsteht die Gleichung eines Drehungsellipsoids.

Die Herpolhodie ist daher als Schnitt dieses Ellipsoids mit der Ebene $[\mathfrak{J}_0 \mid \mathfrak{u}] = 2T$ eine Ellipse (und deshalb auch die Impulskurve und der Hodograph des Kugelmittelpunktes). Die Relativbewegung der Kugel um ihren Mittelpunkt könnte man hiernach erhalten, wenn man an dieser im Raum festen Ellipse die Fläche vierter Ordnung, auf welcher die Polhodie liegen muß und die in diesem Fall eine Drehungsfläche ist, bei festgehaltenem Mittelpunkt abrollen läßt. Weitere Durchführung dieses Problems vgl. meine Dissertation: „Bewegung einer auf horizontaler Ebene rollenden Kugel, deren Schwerpunkt im Mittelpunkt liegt" Stuttgart 1902.

4) Von jetzt ab seien die Hauptträgheitsmomente wieder verschieden und zwar $A > B > C$. Leicht durchführbar ist der Fall, wo $\mathfrak{J}_0$, der konstante Impuls des Momentanzentrums, senkrecht steht. Er gehe abwärts, so daß er die Kugeloberfläche stets im Berührungspunkt trifft und bei der Bewegung die Spur auf der Kugel ausschneidet. Seine Länge kann man sich gleich dem Kugelhalbmesser denken, dann beschreibt sein Endpunkt geradezu die Spur auf der Kugeloberfläche. Es werden sich nun Gleichungen ergeben, welche mit denjenigen im wesentlichen übereinstimmen, die man bei der Bewegung des kräftefreien Kreisels erhält. Dies wird deutlicher werden, wenn man den vertikal abwärts gehenden Einheitsvektor durch $\frac{\mathfrak{J}_0}{J}$ ersetzt. Für die Horizontalkomponente der Winkelgeschwindigkeit erhält man dann: $\frac{[\mathfrak{J}_0\mathfrak{u}]}{J^2} \cdot \mathfrak{J}_0$ oder $\mathfrak{u} - \frac{2T}{J^2}\mathfrak{J}_0$ und aus Gleichung (23) wird:

$$\mathfrak{J} + M\mathfrak{u} = \left(1 + \frac{2TM}{J^2}\right)\mathfrak{J}_0. \tag{25}$$

Man hat also einen konstanten Vektor $\mathfrak{J} + M\mathfrak{u}$, dem man übrigens eine einfache mechanische Deutung geben kann. Eine durch O senkrecht zu $\mathfrak{u}$ gelegte Ebene schneidet die Horizontalebene in einer Geraden, auf der man einen beliebigen Punkt als Bezugspunkt wählen muß, um nach der Definition den Impuls $\mathfrak{J} + M\mathfrak{u}$ zu erhalten.

Die Analogie mit dem kräftefreien Kreisel tritt klar zutage in

den Gleichungen der Polhodie. Ersetzt man $\mathfrak{J} + M\mathfrak{u}$ durch $(A+M)p\mathfrak{i} + (B+M)q\mathfrak{j} + (C+M)r\mathfrak{k}$, dann erhält man sie in der Form:

$$(\mathfrak{J} + M\mathfrak{u})^2 = (A+M)^2 p^2 + (B+M)^2 q^2 + (C+M)^2 r^2 = \left(1 + \frac{2TM}{J^2}\right)^2 J^2,$$

$$[(\mathfrak{J} + M\mathfrak{u}) \mid \mathfrak{u}] = (A+M)p^2 + (B+M)q^2 + (C+M)r^2 = \left(1 + \frac{2TM}{J^2}\right) 2T.$$

Ein Kreisel mit den Hauptträgheitsmomenten:

$$A' = A + M$$
$$B' = B + M$$
$$C' = C + M$$

liefert, wenn für Impulslänge und kinetische Energie gilt:

$$J' = \left(1 + \frac{2TM}{J^2}\right) J$$

$$T' = \left(1 + \frac{2TM}{J^2}\right) T.$$

genau dieselbe Polhodie, falls keine Kräfte auf ihn wirken. Wichtiger als die beiden letzten Gleichungen ist die daraus abzuleitende:

$$\frac{J'^2}{2T'} = \frac{J^2}{2T} + M,$$

deren einzelne Glieder von der Dimension eines Trägheitsmoments sind und die abgekürzt

$$D' = D + M$$

geschrieben werde möge.

Um die Herpolhodie zu erhalten, hat man $\mathfrak{J} = \left(1 + \frac{2TM}{J^2}\right) \mathfrak{J}_0 - M\mathfrak{u}$ in Gleichung (18_a) einzusetzen. Man wird auf ein elliptisches Integral stoßen, welches wieder der Bewegung eines kräftefreien Kreisels mit den Konstanten A', B', C', J', T' entspricht. Nicht anders ist es bei Gleichung (18_b), welche das Zeitintegral liefert. Dies alles läßt sich aber auch ohne Rechnung auf folgende Weise einsehen: Die Beziehungen (18) ergaben sich zwischen den Vektoren

$$\mathfrak{J} = Ap\mathfrak{i} + Bq\mathfrak{j} + Cr\mathfrak{k}$$

und

$$\mathfrak{u} = p\mathfrak{i} + q\mathfrak{j} + r\mathfrak{k},$$

ohne daß dabei eine andre Voraussetzung gemacht worden wäre, als daß der letztere Drehachse und Winkelgeschwindigkeit angibt für eine Momentandrehung des starren Systems $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$. Für irgend einen andern Vektor von der Form:

$$\mathfrak{J}' = A'p\mathfrak{i} + B'q\mathfrak{j} + C'r\mathfrak{k},$$

der dieser Definition nach ebenso wie $\mathfrak{J}$ durch eine reine Deformation mit den Hauptrichtungen $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ aus $\mathfrak{u}$ hervorgeht, müssen also ganz entsprechende Beziehungen gelten; man hat nur $\mathfrak{J}'$ statt $\mathfrak{J}$ und $A' B' C'$ an Stelle von $A\ B\ C$ zu setzen. In unserm Fall ist $\mathfrak{J}' = \mathfrak{J} + M\mathfrak{u}$ konstant; ferner nach dem Vorhergehenden:

$$(\mathfrak{J} + M\mathfrak{u})^2 = J'^2$$

$$[(\mathfrak{J} + M\mathfrak{u}) \,|\, \mathfrak{u}] = 2T'$$

man erhält also Gleichungen wie für eine Kreiselbewegung mit den Konstanten $A'\ B'\ C'\ J'\ T'$. Die Relativbewegung der Kugel um ihren Mittelpunkt ist identisch mit der genannten Kreiselbewegung; durch Polhodie, Herpolhodie und Zeitintegral sind ja beide bestimmt. Als besonders günstig ist hervorzuheben, daß bei unsrer Kugelbewegung statt der 4 von der Massenverteilung abhängigen Konstanten A, B, C, M nur noch 3, nämlich $A + M$, $B + M$, $C + M$ auftreten, daß einfach unendlich viele Kugeln mit verschiedenen Hauptträgheitsmomenten existieren, welche gleiche Bewegungen liefern können.

5) Um die Kugelbewegung rein kinematisch darzustellen, liegt es nahe zu untersuchen, ob sich die Poinsot-Bewegung des Kreisels verwenden läßt. Man müßte das Poinsot-Ellipsoid auf der invariablen Ebene abrollen lassen, dabei aber der invariablen Ebene dieselbe Translationsbewegung geben, welche der Kugelmittelpunkt ausführt, wenn die mit dem Ellipsoid fest verbundene Kugel auf der Horizontalebene rollt. Dies ist aber an einem Modell schwer zu bewerkstelligen. Dagegen gelingt es, die Bewegung kinematisch durch ein Modell nachzuahmen, wenn man die Drehachsen durch die Punkte der Kugel, welche mit der Horizontalebene in Berührung kommen, in der ihnen relativ zum Haupttträgheitsachsensystem zukommenden Richtung durchlegt und statt des Polhodiekegels die so entstehende Polhodieregelfläche (Achsenfläche) untersucht, die nach dem soeben Gesagten mit der Kugel fest verbunden ist und durch die Spur der Kugeloberfläche geht; dabei ergeben sich Eigenschaften dieser Fläche, welche für die Herstellung eines Modells sehr günstig sind und die gerade verschwinden, wenn man von unserm Problem zu dem darin enthaltenen Fall des kräftefreien Kreisels übergeht, wobei die Regelfläche in ihren Richtkegel ausartet.

6) Für die Bestimmung der Spur auf der Oberfläche der rollenden Kugel möge ihr Halbmesser gleich 1 gesetzt werden, so daß $\mathfrak{r}$ den Halbmesser zum Berührungspunkt nach Länge und Richtung darstellt. Bei $A'\ B'\ C'\ J'\ T'\ D'$ können die Striche nachträglich fortgelassen werden, so daß die Gleichungen der Polhodie, Herpolhodie und der

Zeit genau mit denen des kräftefreien Kreisels übereinstimmen. (25) kann man dann schreiben:

$$Q\mathfrak{u} = J\mathfrak{r},$$

und man erhält aus der zweiten Gleichung der Polhodie $[Q\mathfrak{u} \mid \mathfrak{u}] = 2T$ für $\mathfrak{r}$ die Gleichung eines dem Mac Cullaghschen ähnlichen Ellipsoids:

$$[\mathfrak{r} \mid Q^{-1}\mathfrak{r}] = \frac{1}{D}$$

Zusammen mit der Kugelgleichung $\mathfrak{r}^2 = 1$ liefert dieses Ellipsoid die gesuchte Spur, welche somit eine sphärische Ellipse ist. Sie soll mit C_0 bezeichnet werden. Wie sie sich mit dem Parameter D auf der Kugeloberfläche ändert, ist von den Untersuchungen der Impulskurve bekannt, die ja mit C_0 zusammenfällt, wenn man dem Impuls die Länge 1 gibt. (K-S, I § 8).

Auf jeder Kugel, welche ihren Schwerpunkt im Mittelpunkt hat, existiert also eine Schar von sphärischen Ellipsen, längs deren die Kugel beim Rollen mit der Horizontalebene in Berührung treten kann. Der Fall $D = B$, wo die Kurve in zwei Kreise zerfällt und die Bewegung eine instabile Rotation um die $\mathfrak{j}$-Achse ist, soll unten (unter 13) noch gesondert betrachtet werden.

7) Um die Achsenfläche zu erhalten, hat man durch die Punkte der Spur die zugehörigen Drehachsen zu legen. Dies erreicht man, wenn man im Endpunkt von $\mathfrak{r}$ einen Vektor von veränderlicher Länge in der Drehachsenrichtung anträgt; wir subtrahieren von $\mathfrak{r}$ den Vektor $\lambda \cdot \frac{\mathfrak{u}}{J}$ oder $\lambda Q^{-1}\mathfrak{r}$ und erhalten so den Vektor

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{r} - \lambda Q^{-1}\mathfrak{r} = Q^{-1}(Q - \lambda)\mathfrak{r}, \tag{26}$$

dessen Endpunkt bei festem $\mathfrak{r}$ und veränderlichem λ eine Erzeugende der Fläche, und wenn $\mathfrak{r}$ die Spur

$$(C_0) \qquad \begin{cases} \mathfrak{r}^2 = 1 \\ [\mathfrak{r} \mid Q^{-1}\mathfrak{r}] = \frac{1}{D} \end{cases}$$

durchläuft, die Fläche selbst beschreibt. Da $\mathfrak{u} = JQ^{-1}\mathfrak{r}$ normal zu dem durch die letzte Gleichung dargestellten Ellipsoid steht, so ist die Fläche eine Normalenfläche dieses Ellipsoids für die auf ihm liegende sphärische Ellipse C_0.

Eliminiert man $\mathfrak{r}$ aus den 3 letzten Gleichungen, so erhält man

$$(C_\lambda) \qquad \begin{aligned} &[Q^2(Q-\lambda)^{-2}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = 1 \quad \text{und} \\ &D[Q(Q-\lambda)^{-2}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = 1\,. \end{aligned}$$

Dies sind für ein bestimmtes λ die Gleichungen zweier Ellipsoide, die sich in einer auf der Achsenfläche liegenden Kurve 4. Ordnung C_λ schneiden, welche vom Endpunkt des Vektors $\mathfrak{x} = \mathfrak{r} - \lambda Q^{-1}\mathfrak{r}$ beschrieben wird. Die Schar dieser Kurven C_λ ist für die Kugelbewegung sehr wichtig und soll deshalb eingehender diskutiert werden. Ist $\lambda = 0$, so erhält man die Spur auf der Kugeloberfläche C_0, welche die Erzeugenden der Fläche rechtwinklig durchschneidet, da $[d\mathfrak{r} \mid Q^{-1}\mathfrak{r}] = 0$. Zwischen C_0 und C_λ liegt auf jeder Erzeugenden der Vektor $\lambda \cdot Q^{-1}\mathfrak{r}$; die Kurvenschar zerlegt also die Erzeugenden in proportionale Abschnitte. Ist $\lambda = A$ dann wird, weil A die Hauptzahl des Vektorquotienten Q für die Richtung $\mathfrak{i}$ ist,

$$[Q^{-1}\mathfrak{r} \mid \mathfrak{i}] = \frac{1}{A}[\mathfrak{r} \mid \mathfrak{i}] \quad \text{also:}$$

$$[\mathfrak{x} \mid \mathfrak{i}] = 0.$$

$\mathfrak{x}$ und die Kurve C_A fallen somit in die erste Hauptträgheitsebene und ebenso C_B und C_C in die 2. und 3.

8) Nun sind aber die Hauptebenen Symmetrieebenen der Fläche. Jede Erzeugende trifft in einer Hauptebene die zu ihr symmetrisch liegende. C_A C_B und C_C sind daher Doppelkurven der Fläche und deshalb Kegelschnitte. Um ihre Gleichungen zu finden, multipliziere man die Gleichungen (C_λ) mit D und λ und subtrahiere. Die entstehende Gleichung

$$(F_\lambda) \qquad [Q(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = \frac{D-\lambda}{D}$$

bedeutet eine Schar von Flächen zweiter Ordnung, deren jede durch die ihr entsprechende Kurve C_λ geht und deren Normale $Q(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{x}$ in einem Punkt dieser Kurve parallel zu $\mathfrak{r}$ ist (nach Gleichung (26)), eine Eigenschaft, von der unten Gebrauch gemacht werden soll.

Nähert sich λ dem Wert A, dann rückt die Kurve C_λ in die Nähe der ersten Hauptebene. Die Fläche zweiter Ordnung F_λ artet aus, indem die erste Halbachse sehr klein wird, und geht beim Durchgang von λ durch A von einem Ellipsoid in ein einschaliges Hyperboloid über. Ellipsoid und Hyperboloid werden im Grenzfall getrennt durch die Kurve C_A. Ähnliches gilt für C_B und C_C. Die Gleichungen derselben sollen noch in kartesischen Koordinaten angegeben werden, weil so die Gattung der Kegelschnitte deutlich hervortritt:

$$(C_A) \qquad \frac{B}{A-B}y^2 + \frac{C}{A-C}z^2 = \frac{A-D}{D}$$

$$(C_B) \qquad -\frac{C}{B-C}z^2 + \frac{A}{A-B}x^2 = \frac{D-B}{D}$$

$$(C_C) \qquad \frac{A}{A-C}x^2 + \frac{B}{B-C}y^2 = \frac{D-C}{D}.$$

C_A und C_C sind Ellipsen, deren Achsenverhältnis bei veränderlichem D gleichbleibt, während die Achsenlänge bei der einen wächst, bei der andern abnimmt; C_B ist eine Hyperbel, deren Asymptoten:

$$[Q(Q-B)^{-1}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = 0$$

von D unabhängig sind.

Um jetzt von der Gestalt der Regelfläche eine Vorstellung zu bekommen, lege man auf der Kugeloberfläche die Scheitel der sphärischen Ellipse C_0 fest, welche beim Rollen zur Spur werden soll. Man kann dabei benutzen, daß die Abstände dieser Scheitel von der Achse, welche von der sphärischen Ellipse umschlossen wird, konstantes Verhältnis haben. Dieses Verhältnis ergibt sich, wenn die x- oder $\mathfrak{i}$-Achse umschlossen wird, also $D > B$ ist, aus der Zylinderfläche (siehe die Gleichungen C_0)

$$[Q^{-1}(A-Q)\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}] = \frac{A-D}{D}, \tag{27}$$

durch welche die Spur C_0 parallel zur i-Achse projiziert wird, gleich $\sqrt{\frac{B}{A-B}} : \sqrt{\frac{C}{A-C}}$, also von D unabhängig.

Ebenso liefert im Fall $D < B$ die durch C_0 gehende, die $\mathfrak{k}$-Achse umschließende Zylinderfläche

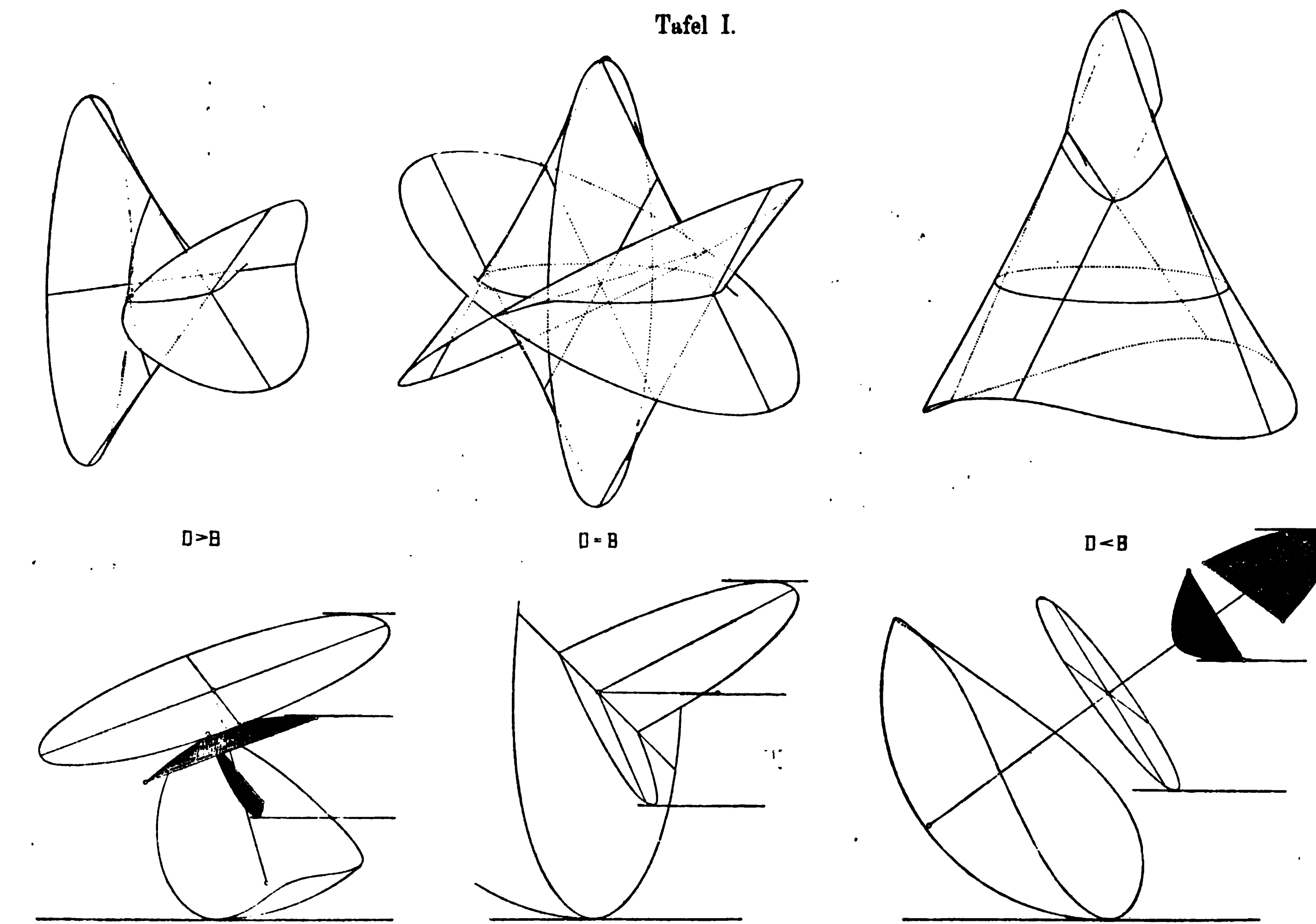
$$[Q^{-1}(Q-C)\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}] = \frac{D-C}{D} \tag{28}$$

das Achsenverhältnis: $\sqrt{\frac{A}{A-C}} : \sqrt{\frac{B}{B-C}}$.

Sind die Scheitel der sphärischen Ellipse gefunden, dann kann man leicht die zugehörigen singulären Erzeugenden (Torsallinien) konstruieren, da von den Hauptebenen auf denselben Strecken abgeschnitten werden, die sich wie $A : B : C$ verhalten. Diese Torsallinien liefern aber durch ihre Schnittpunkte mit den Hauptebenen die Scheitel der Doppelkurven C_A C_B C_C, soweit sich in denselben reelle Torsallinien schneiden. Auf derjenigen Doppelkurve, in deren Ebene eine Torsallinie liegt, bestimmt sie dagegen einen Kuspidalpunkt der Fläche (Vgl. Tafel I). Aus diesen Singularitäten (Doppelkurven, Torsallinien, Kuspidalpunkten) läßt sich aber leicht ein Bild der Fläche ergänzen. (Auf Tafel I ist die Fläche dargestellt für $A : B : C = 3 : 2 : 1$ und die 3 Fälle $D \gtreqless B$.)

Es gibt noch eine Regelfläche ganz derselben Art, welche die Kurven $C_A C_B C_C$ als Doppelkurven enthält.

Tafel I.



Sie ist bestimmt durch die Gleichungen:

$$[Q'^2(Q'-\lambda)^{-2}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = \frac{D'+4a_3'}{D'}$$

$$[Q'(Q'-\lambda)^{-2}\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = \frac{1}{D'}.$$

Dabei sind die Hauptzahlen von dem Vektorquotienten Q'

$$\frac{A}{D+A-B-C}, \quad \frac{B}{D-A+B-C}, \quad \frac{C}{D-A-B+C},$$

von denen die letzte sicher negativ ist und es ist

$$D' = -\frac{D(D-A-B-C)^2}{(D+A-B-C)(D-A+B-C)(D-A-B+C)}.$$

Zum Beweis bilde man ähnlich wie bei der Polhodienregelfläche

$$[Q'(Q'-\lambda)\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = \frac{D'+4a_3'-\lambda}{D'}$$

in rechtwinkligen Koordinaten, setze die erste Koordinate gleich Null und dann λ gleich der ersten Hauptzahl, so entsteht die Gleichung der Doppelkurve C_A. Man benütze dabei die Identitäten:

$$B(D+A-B-C)-A(D-A+B-C) = (A-B)(A+B+C-D),$$

$$C(D+A-B-C)-A(D-A-B+C) = (A-C)(A+B+C-D)$$

und:

$$-(D-A+B-C)(D-A-B+C)+4BC$$
$$=(-A+B+C+D)(A+B+C-D),$$

$$D(A+B+C-D)-A(-A+B+C+D) = (A-D)(D+A-B-C).$$

Entsprechend ergeben sich die Doppelkurven C_B und C_C. Richtkegel dieser zweiten Regelfläche ist ebenso wie bei der ersten der Polhodiekegel:

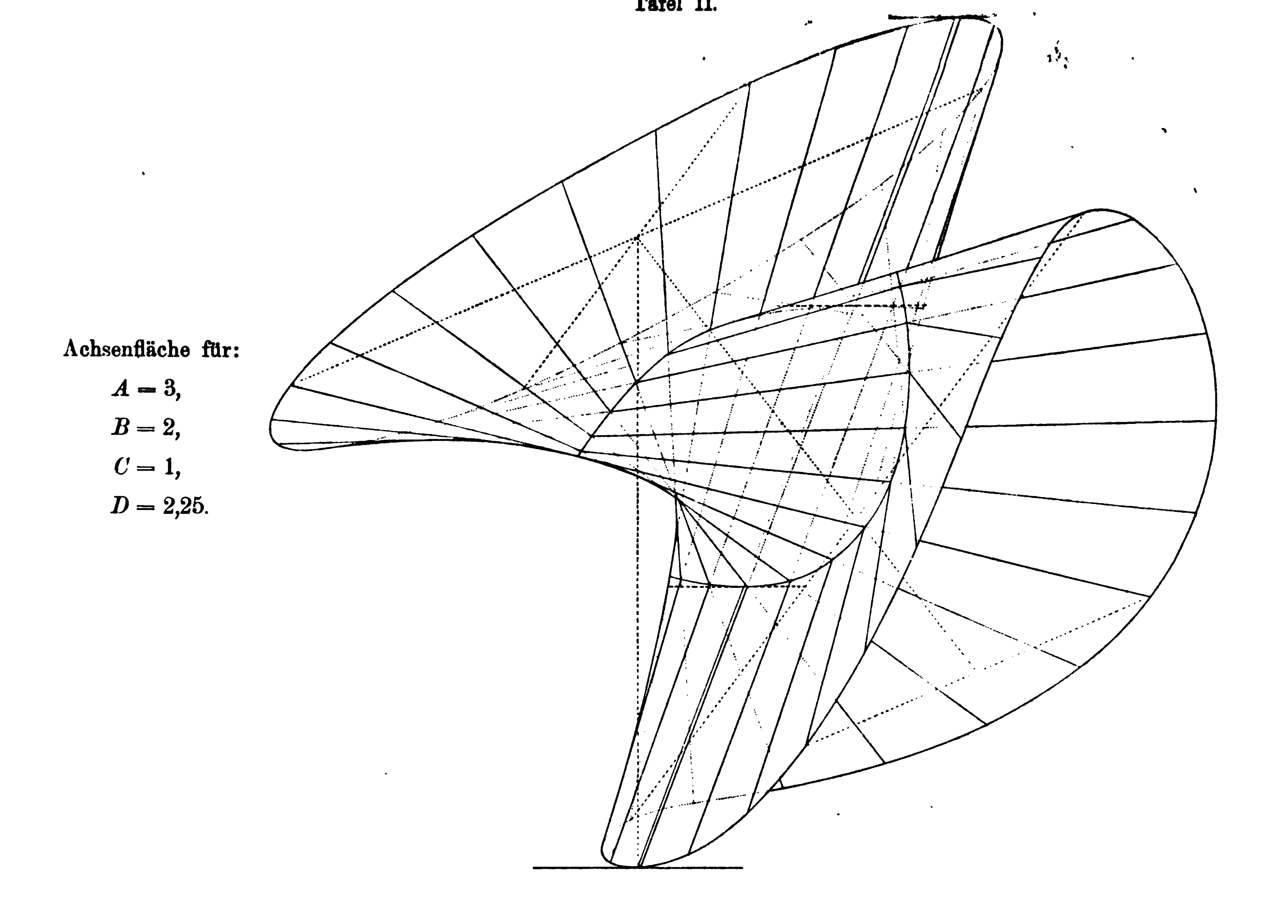
$$[Q(Q-D)\mathfrak{x} \mid \mathfrak{x}] = 0.$$

Die auf ihm liegende unendlich ferne Kurve C_∞ ist auch Doppelkurve für beide Flächen, da je zwei Erzeugende in bezug auf O symmetrisch liegen und also parallel sind. Die Torsallinien sind beiden Flächen gemeinsam, nicht aber die Kuspidalpunkte. Von den beiden Schnittpunkten einer Torsallinie mit der in derselben Ebene liegenden Doppelkurve gehört vielmehr den beiden Flächen je Einer als Kuspidalpunkt an. Aus der Existenz dieser zweiten Regelfläche geht hervor, daß die durch die Leitlinien $C_A C_B C_C$ bestimmte Regelfläche 16. Grads in zwei Flächen 8. Grads zerfällt. Die zweite Fläche kann aber für keine Kugelbewegung als Drehachsenfläche gedeutet werden, da ein oder zwei Hauptträgheitsmomente dieser Kugel negativ sein müßten.

9) Ehe zur Bewegung der Kugel selbst übergegangen wird, sollen noch folgende Betrachtungen die geometrischen Beziehungen erläutern.

Durch die affine Transformation $Q^{-1}(Q-\lambda)$ geht nach der Gleichung

$$\mathfrak{x} = Q^{-1}(Q-\lambda)\mathfrak{r} \tag{26}$$



Achsenfläche für:

$A = 3,$

$B = 2,$

$C = 1,$

$D = 2{,}25.$

$\mathfrak{r}$ in $\mathfrak{z}$, also C_0 in C_λ über. Die Fläche F_λ geht durch dieselbe Transformation hervor aus einer Fläche zweiter Ordnung durch C_0. Die Gleichungen beider Flächen sind

$$(F_\lambda) \quad [Q(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{z} \mid \mathfrak{z}] = \frac{D-\lambda}{D}, \qquad [Q^{-1}(Q-\lambda)\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}] = \frac{D-\lambda}{D}.$$

Die Normale der einen ist parallel zum entsprechenden Radiusvektor der andern. Das Verhältnis ihrer Halbachsen ist reziprok. Für veränderliches λ bedeutet die zweite Gleichung die Schar der Flächen zweiter Ordnung durch die sphärische Ellipse C_0; eine solche Flächenschar hat gemeinsame Kreisschnittebenen, die man erhält, wenn man die Kugelgleichung

$$B^{-1}(B-\lambda)[\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}] = \frac{D-\lambda}{D}$$

von der Flächengleichung abzieht, wodurch

$$[Q^{-1}(Q-B)\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}] = 0$$

entsteht. Dabei ist hervorzuheben, daß diese Gleichung der Kreisschnittebenen auch von D unabhängig ist. Die Ebenen stehen senkrecht auf den Asymptoten von C_λ.

Durch die affine Transformation $Q^{-1}(Q-\lambda)$ sind insbesondere folgende Flächen einander zugeordnet:

F_0 Kugel entspricht sich selbst,
F_D rollender und gleitender Kegel[1]) — Kegel durch C_0,
F_∞ unendlich großes Ellipsoid — MacCullaghs Ellipsoid,
$F_A F_B F_C$ ausgeartete Flächen — Zylinderflächen durch C_0.

Daß diese Zylinderflächen mit dem MacCullaghschen Ellipsoid gemeinsame Kreisschnittebenen haben, wurde eben von Mac Cullagh benutzt zur geometrischen Deutung der Amplitude φ der elliptischen Integrale.[2])

Schreibt man nämlich die $\mathfrak{j}$- und $\mathfrak{k}$-Koordinate von $\mathfrak{r}$ entsprechend der Zylinderfläche:

$$(27) \qquad [Q^{-1}(A-Q)\mathfrak{r} \mid \mathfrak{r}] = \frac{A-D}{D}$$

$\sqrt{\frac{A-D}{D} \cdot \frac{B}{A-B}} \sin\varphi$ bezw. $\sqrt{\frac{A-D}{D} \cdot \frac{C}{A-C}} \cos\varphi$, dann erhält man aus der Länge 1 von $\mathfrak{r}$ als $\mathfrak{i}$-Koordinate

$$\sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}\left(1 - \frac{(A-D)(B-C)}{(D-C)(A-B)}\sin^2\varphi\right)} = \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}\,\Delta\varphi,$$

1) Von Poinsot so genannt. Über seine Eigenschaften vgl. Poinsot oder Routh, Dynamik der Systeme starrer Körper. II § 172.

2) Routh II § 153.

so daß C_0 durch die Gleichung

$$(29)\quad \mathfrak{r} = \sqrt{\frac{A(D-C)}{D(A-C)}}\,\Delta\varphi\,\mathfrak{i} + \sqrt{\frac{B(A-D)}{D(A-B)}}\sin\varphi\,\mathfrak{j} + \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}\cos\varphi\,\mathfrak{k}$$

dargestellt wird. φ ist daher der Zentriwinkel des auf der Zylinderfläche liegenden Kreisbogens zwischen der $[\mathfrak{i}\mathfrak{k}]$-Ebene und der einem bestimmten Vektor $\mathfrak{r}$ entsprechenden Zylindermantellinie. Auch für C_A haben die Kreisschnittebenen eine wichtige Bedeutung; projiziert man nämlich C_A senkrecht auf eine derselben, so entsteht wieder ein Kreis; φ hat dabei ähnliche Bedeutung wie oben.

Also: Projiziert man einen Punkt von C_A (Schnittpunkt der Drehachse mit der ersten Hauptebene) senkrecht und den entsprechenden Punkt von C_0 parallel zur $\mathfrak{i}$-Achse auf eine der Kreisschnittebenen, so liegen die Projektionen mit O in einer Geraden, welche mit der $[\mathfrak{i}\mathfrak{k}]$-Ebene den Winkel φ bildet, und die Abstände der Projektionen von O sind konstant. Die Projektionen liegen dabei auf verschiedenen Seiten von O. Entsprechendes gilt von C_C; C_0 ist dann parallel zur $\mathfrak{k}$-Achse zu projizieren, und die Projektionen entsprechender Punkte liegen auf derselben Seite von O. Man könnte diese Beziehungen zu einer einfachen Konstruktion der behandelten Regelfläche benützen.

10) Für die Bewegung der Kugel ist insbesondere das Verhalten der Flächen F_λ mit der Gleichung

$$[Q(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{x}\,|\,\mathfrak{x}] = \frac{D-\lambda}{D}$$

von Wichtigkeit, sowie die auf ihnen liegende und ihnen eindeutig zugeordnete Kurvenschar C_λ, welche von den Momentandrehachsen aus den Flächen ausgeschnitten wird. Zu irgend einem zum Berührungspunkt gehenden Kugelhalbmesser $\mathfrak{r}$ gehörte eine Drehachse, deren Punkte den Vektor $\mathfrak{x}$ zum Träger hatten, wo $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{r}$ verbunden waren durch die Gleichung:

$$(26')\qquad Q(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{x} = \mathfrak{r}.$$

Der Endpunkt von $\mathfrak{x}$ beschreibt für ein veränderliches λ die Drehachse; für ein bestimmtes λ liegt er auf der zugehörigen Fläche F_λ. Betrachtet man einen Moment der Bewegung, wo $\mathfrak{r}$ senkrecht abwärts geht und die Drehachse momentan ruht, so sieht man:

Die Normale der Fläche F_λ hat in jenem Punkt, wo sie von der Drehachse getroffen wird, die Richtung von $Q(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{x}$, also von $\mathfrak{r}$, sie steht im Raum senkrecht und F_λ berührt eine horizontale Ebene.

Dieser Punkt hat von der durch den Kugelmittelpunkt O gelegten

horizontalen Ebene einen Abstand, der durch die Projektion von $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{r}$ gemessen wird. Nun ist diese

$$[\mathfrak{x} \mid \mathfrak{r}] = \frac{D - \lambda}{D},$$

also im Verlauf der Bewegung für ein bestimmtes λ konstant. F_λ berührt daher stets eine horizontale Ebene H_λ, welche von O den Abstand $\frac{D-\lambda}{D}$, also von der Horizontalebene, auf welcher die Kugel rollt, nach oben den Abstand $\frac{\lambda}{D}$ hat. Nimmt man noch dazu, daß der Berührungspunkt von F_λ und H_λ als der Momentanachse angehörig augenblicklich ruht, so ist damit ein Gleiten von F_λ auf H_λ ausgeschlossen und bloß noch eine rollende Bewegung möglich. Der Berührungspunkt hinterläßt auf der Fläche F_λ die Spur C_λ.

Damit sind die Mittel gegeben zur Herstellung eines Modells, welches die Kugelbewegung kinematisch, abgesehen vom zeitlichen Verlauf, wiedergeben kann. Man hat 2 oder mehr Flächen der Schar F_λ starr zu verbinden; die Kugel F_0 selbst muß nicht notwendig dabei sein. Als Unterlage dieses Modells dienen die entsprechenden horizontalen Ebenen H_λ, die in den richtigen Abständen $\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{D}\right)$ festgelegt werden müssen. Läßt man dann jede Fläche auf der ihr zugeordneten Ebene rollen, so wird die Kugelbewegung genau nachgeahmt, und auf jeder Fläche als Spur eine Kurve 4. Ordnung oder wenigstens der eine Zweig derselben aufgezeichnet. Als Hauptschwierigkeit wird sich dabei ergeben, daß die Teile der Horizontalebenen, welche das Modell in der Bewegung hindern, weggenommen werden müssen. Zum Teil läßt sich dadurch abhelfen, daß ja auch von den Flächen F_λ nur die Teile nötig sind, welche die Spuren C_λ enthalten, daß sogar eine starre Verbindung dieser Kurven genügt. Für die Doppelkurven $C_A\ C_B\ C_C$, welche sich durch ihre Einfachheit besonders empfehlen, kommt dies auf dasselbe hinaus, wie wenn die zugehörigen ausgearteten Flächen $F_A\ F_B\ F_C$ benützt werden; sie bestehen ja aus doppelt überdeckten ebenen Flächenstücken, welche von den Kurven $C_A\ C_B\ C_C$ begrenzt werden.

Für ein Modell unbrauchbar sind einmantlige Hyperboloide, wie sie für $B > \lambda > C$ und $A > \lambda > D$ auftreten, wenn $D > B$ ist, und für $A > \lambda > B$, sowie $D > \lambda > C$, wenn $D < B$. Die durch den Berührungspunkt eines solchen auf H_λ rollenden Hyperboloids F_λ gehenden Mantellinien schneiden die auf der Fläche liegende Kurve C_λ im allgemeinen noch in 2 reellen Punkten, d. h. C_λ durchdringt die Ebene H_λ. Auf der unteren Hälfte der Tafel I sind Modelle für $D \gtrless B$ skizziert.

11) Für die analytische Behandlung der Bahn des Kugelmittelpunktes oder Berührungspunktes hat man zunächst die Geschwindigkeit $\frac{ds}{dt}$ dieses Punktes. Nach der Gleichung $\mathfrak{v} = |[\mathfrak{u}\mathfrak{r}]$ hat sie dieselbe Länge wie die Horizontalkomponente von $\mathfrak{u}$, welche in (14) und (15) gleich $\mathfrak{u}'$ gesetzt wurde. Hier liegt es näher, statt der Herpolhodie den Schnitt des Herpolhodiekegels mit der Horizontalebene einzuführen. Sind dessen Polarkoordinaten r und ψ, so daß ψ mit dem im 1. Teil so bezeichneten Winkel übereinstimmt, während der absolute Wert des dort mit $\mathfrak{u}'$ bezeichneten Vektors $\frac{2T}{J}r$ ist, so hat man

$$\frac{ds}{\frac{2T}{J}dt} = r \tag{30}$$

und nach (14) und (15)

$$\frac{d\psi}{\frac{2T}{J}dt} = \frac{r^2 - \frac{D-A}{A}\frac{D-B}{B}\frac{D-C}{C}}{r^2}, \tag{31}$$

$$\frac{2T}{J}dt = -\frac{r\,dr}{\sqrt{-\left(r^2 + \frac{D-B}{B}\frac{D-C}{C}\right)\left(r^2 + \frac{D-C}{C}\frac{D-A}{A}\right)\left(r^2 + \frac{D-A}{A}\frac{D-B}{B}\right)}}. \tag{32}$$

Einen sehr einfachen Ausdruck erhält man nach diesen Formeln für den Krümmungshalbmesser der Bahn:

$$\frac{ds}{d\psi} = \frac{r^3}{r^2 - \frac{D-A}{A}\frac{D-B}{B}\frac{D-C}{C}}. \tag{33}$$

Da nämlich die Horizontalprojektion von $\mathfrak{u}$ in die Normalrichtung der Bahn fällt, so ist $d\psi$ der Winkel zwischen zwei benachbarten Normalen. Liegt der Schnitt des Herpolhodiekegels gezeichnet oder punktweise in Polarkoordinaten berechnet vor, dann kann man die Länge des Krümmungshalbmessers aus der von r konstruieren[1]) bzw. berechnen, und da seine Richtung mit der von r übereinstimmt, so ist es nicht schwer, die Kurve aus kleinen Kreisbögen annäherungsweise zu konstruieren.

---

1) Zur Konstruktion des Krümmungshalbmessers kann man verwenden, daß er sich zu r verhält, wie die konstante senkrechte Komponente von $\mathfrak{u}$, nämlich $\frac{2T}{J}$ zu $\frac{d\psi}{dt}$ (nach (31)). Für $\frac{d\psi}{dt}$ ist leicht eine Konstruktion zu finden; eine solche enthält die Dissertation von Petrus in § 9. Dort ist auch (§ 3 S. 21) zu entnehmen, daß $\frac{d\psi}{dt}$ immer positiv ist.

Der Krümmungshalbmesser kann nie unendlich und nur in den Fällen, wo D gleich A, B oder C ist, gleich Null werden. Denn der Nenner

$$r^2 - \frac{D-A}{A}\frac{D-B}{B}\frac{D-C}{C}$$

ist stets positiv, wie zunächst für $D > B$ sofort ersichtlich; für $D < B$ ist der kleinste Wert, den r^2 annehmen kann $\frac{(B-D)(D-C)}{BC}$, dies ist aber immer noch größer als $\frac{A-D}{A}\frac{B-D}{B}\frac{D-C}{C}$, da $1 > \frac{A-D}{A}$ ist.

Geometrisch bedeutet dies, daß $\frac{d\psi}{dt}$ immer positiv ist, der Polarwinkel der Herpolhodie ψ mit der Zeit also immer wächst. Wendepunkte und Rückkehrpunkte erster Art treten bei der Bahnkurve nicht auf; r wird ja nie unendlich, und in den genannten singulären Fällen treten höhere Singularitäten auf.

Der kleinste Wert, den r^2 annehmen kann, ist nach (32) $\frac{(A-D)(D-B)}{AB}$ bezw. $\frac{(B-D)(D-C)}{BC}$, je nachdem $D \gtrless B$ ist. r und damit auch der Krümmungshalbmesser kann also nur verschwinden, wenn D gleich A oder C wird, in welchem Fall sich die Kugel um die betreffende senkrecht stehende Hauptträgheitsachse dreht, oder schließlich, wenn $D = B$ wird. Es existieren dann, wie gezeigt werden wird, zwei Punkte, in welchen der Krümmungshalbmesser gleich Null wird und um welche die Kurve sich spiralförmig herumwindet.

Ist $D < B$, so kann ein Minimum für den Krümmungshalbmesser auftreten; es ist dann $r^2 = 3\frac{(A-D)(B-D)(D-C)}{ABC}$ und der Krümmungshalbmesser gleich $\frac{2}{3}r$. Aus den Grenzen von r^2 ergibt sich, daß dabei

$$A > \tfrac{3}{2}D > B$$

sein muß. Den Grenzwerten von r entsprechen dann zwei Maxima des Krümmungshalbmessers; die Gestalt der Bahnkurve wird dadurch offenbar eine verhältnismäßig kompliziertere, als wenn der Krümmungshalbmesser mit wachsendem r immer wächst oder (für $\frac{3}{2}D < B$) abnimmt.

12) Für die weitere analytische Darstellung der Bahn ist statt r die Amplitude φ einzuführen, etwa indem man $\frac{B^2 q^2}{J^2}$ nach (3) in $u^2 = \left(\frac{2T}{J}\right)^2(1+r^2)$ und nach (28) in φ ausdrückt. Dann wird

$$r^2 = \frac{A-D}{A}\frac{D-C}{C} - \frac{A-D}{A}\frac{B}{D}\frac{B-C}{C}\sin^2\varphi,$$

also nach (30, (31) und (32)

$$\frac{ds}{\frac{2T}{J}dt} = \sqrt{\frac{A-D}{A}\frac{D-C}{C} - \frac{A-D}{A}\frac{D}{B}\frac{B-C}{C}\sin^2\varphi},$$

$$\frac{d\psi}{\frac{2T}{J}dt} = \frac{D(D-C) - D(B-C)\sin^2\varphi}{B(D-C) - D(B-C)\sin^2\varphi},$$

$$\frac{2T}{J}dt = \sqrt{\frac{A\,B\,C}{(A-B)D(D-C)}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{(B-C)(A-D)}{(A-B)(D-C)}\sin^2\varphi}}.$$

Zur Integration ist $\varphi = \operatorname{am}\sqrt{\frac{(A-B)D(D-C)}{ABC}}\frac{2T}{J}(t-t_0)$ in die zweitletzte Gleichung einzusetzen. ψ erhält man dann als elliptisches Integral dritter Gattung in Funktion von t gleich $\psi(t)$. Die Komponenten des Bahnelements ds seien $dx = ds\cos\psi$ und $dy = ds\sin\psi$; damit wird das Differential des Vektors zum Berührungspunkt der Kugel, der von irgend einem Anfangspunkt ausgehen kann:

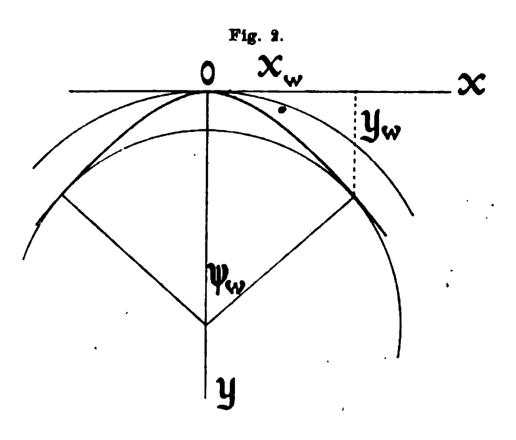
$$d(x+iy) = e^{i\psi}ds =$$

$$\frac{2T}{J}e^{i\psi(t)}\sqrt{\frac{A-D}{A}\frac{D}{C} - \frac{A-D}{A}\frac{D}{B}\frac{B-C}{C}\sin^2\operatorname{am}\sqrt{\frac{(A-B)D(D-C)}{ABC}}\frac{2T}{J}(t-t_0)}\cdot dt\,[1])$$

$x+iy$ ergibt sich daraus als ein Integral, das im allgemeinen nicht mehr mit elliptischen Funktionen zu erledigen ist.

Aus der erwähnten Näherungskonstruktion mittels des Krümmungshalbmessers folgt für die Bahnkurve, daß kongruenten Teilen der Herpolhodie auch kongruente Teile der Bahnkurve entsprechen. Schließt sich die Herpolhodie, so ist dies auch der Fall bei der Bahnkurve, außer wenn die Spannweite der Teilbögen $2\psi_\omega$, welche der Herpolhodie und Bahnkurve gemeinsam ist, ein Vielfaches von 2π ist. Da der Kugelmittelpunkt nach der dem Winkel $2\psi_\omega$ entsprechenden Zeit nicht gerade wieder an die alte Stelle

Fig. 2.



1) In ϑ-Funktionen erhält die Gleichung der Bahnkurve nach K-S VI Gleichung 41 die Form:

$$d(x+iy) = \frac{2T}{J}re^{i\psi}dt = (\pi + i\varkappa)dt = Ce^{i\alpha t}\frac{\vartheta(t-\omega+is)}{\vartheta(t+i\omega')}dt.$$

C und α sind dabei Konstante.

zurückkehrt (vgl. den unten behandelten Fall $D = B$), so ergibt sich in diesem Fall durch Aneinandersetzen kongruenter Teilbögen eine sich ins Unendliche erstreckende Kurve.

Dem größten Wert r entspricht $\varphi = 0$; für den entsprechenden Punkt der Bahnkurve sei $\psi = 0$, x und $y = 0$, dann ist die x-Achse Tangente, die y-Achse Normale der Kurve in diesem Punkt und ψ der Neigungswinkel der Tangente gegen die x-Achse. Nach Durchlaufen eines halben Teilbogens erhält r seinen kleinsten Wert; es wird $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $\psi = \psi_\omega$; $x = x_\omega$; $y = y_\omega$. Erst mit Hilfe dieser Konstanten lassen sich die Halbmesser und damit der Mittelpunkt der beiden konzentrischen Kreise finden, zwischen denen die Bahnkurve verlaufen muß.

Der eine wird $x_\omega \operatorname{ctg} \psi_\omega + y_\omega$, der andere $\frac{x_\omega}{\sin \psi_\omega}$ wo nach dem Vorhergehenden:

$$\psi_\omega = \sqrt{\frac{ABC}{(A-B)\,D\,(D-C)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{D(D-C) - D(B-C)\sin^2\varphi}{B(D-C) - D(B-C)\sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$

$$x_\omega + i y_\omega = \sqrt{\frac{A-D}{(A-B)\,D\,(D-C)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{i\psi(\varphi)} \sqrt{B(D-C) - D(B-C)\sin^2\varphi}\, \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

13) Im Fall der trennenden Polhodie ($D = B$) zerfällt die Spur auf der Kugeloberfläche C_0 in zwei Kreise. Die Drehachsen, welche einem dieser Kreise entsprechen, gehen, da sie senkrecht auf den zugehörigen Linienelementen von C_0 stehen, durch eine Gerade, welche in der Mitte des Kreises senkrecht zu dessen Ebene steht. Es ist dies die eine der Geraden, in welche die Doppelkurve C_B zerfällt. Da auch der Polhodienkegel, der Richtkegel der Achsenfläche, in zwei Ebenen ausartet, so sind die genannten Drehachsen einer dieser Ebenen parallel. Die Regelfläche, welche durch diese Drehachsen gebildet wird, ist damit gekennzeichnet als Kreiskonoid, bei welchem die Achse senkrecht auf der Ebene des Kreises in dessen Mittelpunkt steht. Die vollständige Achsenfläche zerfällt in zwei derartige Konoide, die sich in den Ellipsen C_A und C_C durchdringen. Die Kurven C_λ zerfallen sämtlich in Ellipsenpaare. Von jedem Paar gehört den beiden Konoiden je eine Ellipse an. Die zweite Achse ist für beide Konoide Doppelgerade. Vgl. Tafel I.

Von der Spur, welche die Kugel auf der Horizontalebene zurückläßt, ist der Krümmungshalbmesser oben berechnet worden. Er war

genau gleich r. Dies läßt sich auf geometrischem Weg bestätigen. Von der Konoidachse, welche die eine der beiden $C_B = C_D$ darstellenden Geraden repräsentiert und die bei der Bewegung immer horizontal liegt, bleibt in jedem Moment der Punkt in Ruhe, welcher von der Momentandrehachse getroffen wird. Dieser Punkt hat aber von O gerade die Entfernung r. In der Horizontalebene durch O durchläuft dieser Punkt eine Kurve, auf welcher die Konoidachse rollt. O beschreibt eine Evolvente dieser Kurve und r ist der Krümmungshalbmesser dieser Evolvente.

Die analytische Behandlung der Bahn von O wird verhältnismäßig einfach. Von Konstanten tritt nur noch $\sqrt{\frac{A-B}{A}\frac{B-C}{C}} = r_1$ auf, der Maximalwert von r. Man hat:

$$r = r_1 \cos\varphi$$

$$d\psi = \frac{2T}{J} dt = \frac{d\varphi}{r_1 \cos\varphi}.$$

Durch Integration erhält man:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\mathfrak{Cof}\, r_1 \psi} = \frac{2}{e^{r_1\psi} + e^{-r_1\psi}}.$$

Ferner:

$$ds = d\varphi = r_1 \cos\varphi\, d\psi.$$

Damit wird schließlich:

$$d(x + iy) = \frac{r_1 e^{i\psi} d\psi}{\mathfrak{Cof}\, r_1 \psi}.$$

Die rechte Seite läßt sich in eine Reihe entwickeln; es ist

$$\frac{e^{(i-r_1)\psi}}{1 + e^{-2r_1\psi}} = e^{(i-r_1)\psi} - e^{(i-3r_1)\psi} + e^{(i-5r_1)\psi} \ldots$$

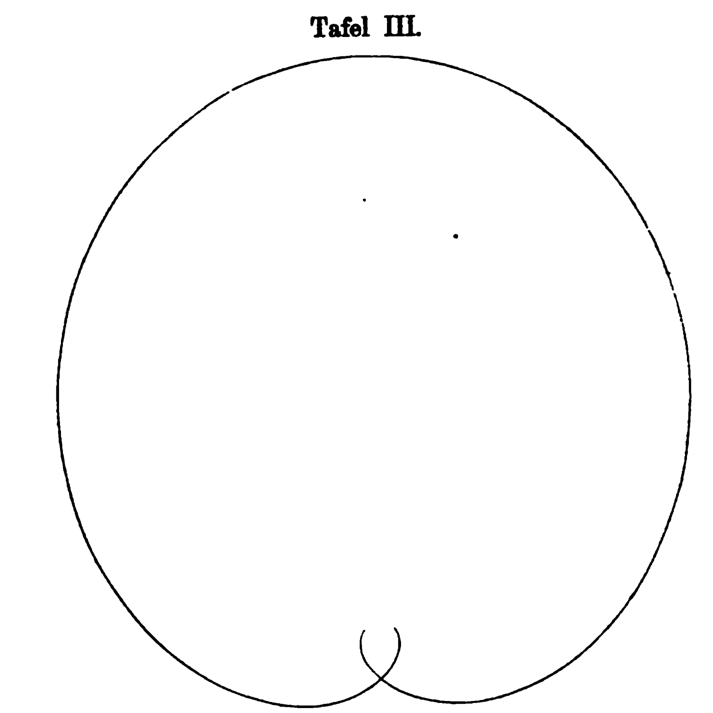
Dabei konvergiert die Reihe der rechten Seite für positive ψ; dies genügt aber, da die Kurve in Beziehung auf die x-Achse symmetrisch ist. Durch Integration wird

$$(x - x_\omega) + i(y - y_\omega) = -2r_1 e^{i\psi}\left\{\left(\frac{r_1 e^{-r_1\psi}}{r_1^2+1} - \frac{3r_1 e^{-3r_1\psi}}{9r_1^2+1} + \cdots\right)\right.$$

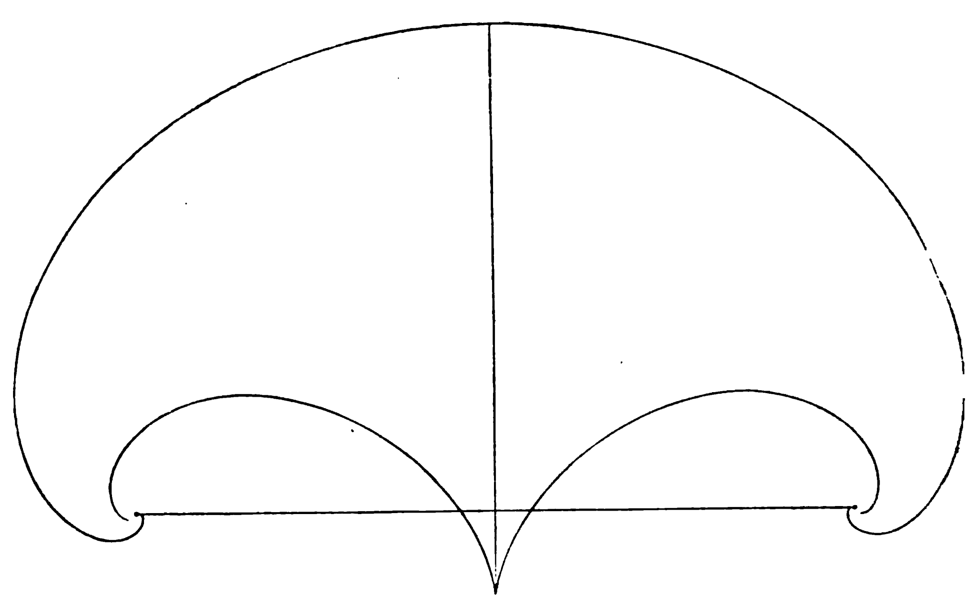
$$\left. + i\left(\frac{e^{-r_1\psi}}{r_1^2+1} - \frac{e^{-3r_1\psi}}{9r_1^2+1} + \cdots\right)\right\}.$$

Die Konstanten x_ω y_ω sind die Werte von x und y für $\psi = \infty$.

Tafel III.



Herpolhodie für $D = B$; $r_1 = 1$.



Bahnkurve mit Evolute für $D = B$; $r_1 = 1$.

$$x_\omega = \int\limits_0^\infty \frac{r_1 \cos\psi\, d\psi}{\mathfrak{Cof}\, r_1 \psi} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\mathfrak{Cof}\, \frac{\pi}{2 r_1}} \text{ (nach Schlömilch)}$$

$$y_\omega = \int\limits_0^\infty \frac{r_1 \sin\psi\, d\psi}{\mathfrak{Cof}\, r_1 \psi} = 2 r_1 \left(\frac{1}{r_1^2 + 1} - \frac{1}{9 r_1^2 + 1} + \frac{1}{25 r_1^2 + 1} - \cdots \right).$$

Auch die letztere Reihe konvergiert.

Nach dem Obigen wird:

$$2 r_1 \left(\frac{r_1 e^{-r_1 \psi}}{r_1^2 + 1} - \frac{3 r_1 e^{-3 r_1 \psi}}{9 r_1^2 + 1} + \cdots \right) = (x_\omega - x) \cos\psi + (y_\omega - y) \sin\psi$$

$$2 r_1 \left(\frac{e^{-r_1 \psi}}{r_1^2 + 1} - \frac{e^{-3 r_1 \psi}}{9 r_1^2 + 1} + \cdots \right) = -(x_\omega - x) \sin\psi + (y_\omega - y) \cos\psi.$$

Diese Ausdrücke bedeuten die Länge von Loten aus dem Punkt (x_ω, y_ω) auf die Normale und die Tangente der Kurve. Es genügt zur Konstruktion der Kurve, diese Lote zu berechnen. Für große Werte von ψ nähert sich das Verhältnis derselben dem konstanten Wert r_1, die Kurve daher einer logarithmischen Spirale, welche den Punkt (x_ω, y_ω) umwindet und von ihm ausgehende Strahlen unter dem Winkel $\operatorname{arctg} r_1$ schneidet. In Tafel III ist die Herpolhodie, sowie die Bahnkurve für $r_1 = 1$ konstruiert (dies entspricht allen Fällen, wo $A : B : C = (1 + \lambda) : (1 - \lambda^2) : \lambda (1 - \lambda)$ ist, wenn für λ eine beliebige Zahl zwischen 0 und 1 gewählt wird). Bei der Bewegung beschreibt der Kugelmittelpunkt die Bahnkurve, während eine durch ihn gehende mit der Kugel fest verbundene Gerade (C_B) stets die Normale der Kurve bildet und also auf der ebenfalls in der Figur eingezeichneten Evolute abrollt. Die Spur, welche zu irgend einer Konoid-Ellipse C_λ gehört, erhält man leicht, wenn man die Krümmungshalbmesser im Verhältnis $\lambda : D$ teilt.

Anhang. Bemerkungen über die Schreibweise der Vektoren.

Vektoren und Bivektoren sind mit fettgedruckten deutschen Buchstaben bezeichnet. Das äußere Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ geschrieben, ist aber als Bivektor oder gerichtete Fläche aufzufassen, also in der Bedeutung auseinanderzuhalten von seiner „Ergänzung“: $|[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$, einem Vektor, der auf der Ebene des Bivektors senkrecht steht und identisch ist mit dem Vektorprodukt $\mathfrak{V}\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ (so z. B. von Föppl bezeichnet).

Das innere Produkt wird dann $[\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}]$ geschrieben, weil man es auffassen kann als das äußere Produkt von $\mathfrak{a}$ und dem Bivektor $|\mathfrak{b}$.

$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}] \mid \mathfrak{c} = \mathfrak{b} \cdot [\mathfrak{a} \mid \mathfrak{c}] - \mathfrak{a} \cdot [\mathfrak{b} \mid \mathfrak{c}]$ ist als äußeres Produkt der Bivektoren $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ und $|\mathfrak{c}$ ein Vektor in der Ebene $[\mathfrak{a}\mathfrak{b}]$ senkrecht zu $\mathfrak{c}$.

Endlich ist $[\mathfrak{a}\ \mathfrak{a}]$ zur Abkürzung $\mathfrak{a}^2$ geschrieben.

Literaturangaben über die Regelflächen mit 4 Doppelkegelschnitten.

Die Achsenflächen der rollenden Kugel gehören, wenn der Impuls in bezug auf das Momentanzentrum senkrecht steht, zu denjenigen Regelflächen, welche De la Gournerie in seinem Werk: Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques wegen der 4 Doppelkegelschnitte mit dem Namen „Quadrispinale“ belegt hat. Die allgemeineren Eigenschaften der Fläche sind in Kap. I enthalten. In Nr. 23 ist angegeben, wie die zu einer gegebenen „assoziierte“ Quadrispinale, welche mit der gegebenen Fläche die Doppelkegelschnitte gemein hat, zu finden ist und tatsächlich ist genau diese Methode angewendet worden, um die Resultate der Seite 250 zu finden. Die Gleichung der Fläche 8. Grades hat Cayley angegeben in einer dem Werk angefügten Note S. 189 (vgl. auch Salmon-Fiedler „Analytische Geometrie des Raumes“, Teil II, Anmerkung 82). Unsern Fall, wo die Fläche Normalenfläche eines Ellipsoids für die Punkte einer sphärischen Ellipse ist, hat De la Gournerie in Nr. 268 kurz angedeutet und darauf hingewiesen, daß die Doppelkegelschnitte bei veränderlichem Parameter (D) homothetisch bleiben (vgl. die vorliegende Arbeit S. 248), sowie daß die Asymptoten der Projektion der sphärischen Ellipse auf die $[xz]$-Ebene (also auch die Kreisschnittebenen der durch die sphärische Ellipse hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung) auf den Asymptoten der Hyperbel C_B, welche den Doppelkegelschnitt in der $[xz]$-Ebene bildet, senkrecht stehen (vgl. S. 252 Mitte).

Etwas anders als De la Gournerie hat Darboux in seinem Bulletin des sciences math. et astr., Bd. II, Seite 301 ff. diese Regelflächen definiert. Er benützt, daß die Normale des Mac Cullagh'schen Ellipsoids $[Q^{-1}\mathfrak{r}|\mathfrak{r}] = D^{-1}$ in einem Punkt der sphärischen Ellipse C_0 (wir spezialisieren Darboux's Angaben für unsern Fall) Ort ist aller Pole der Berührungsebene an das Ellipsoid im selben Punkt in bezug auf die Flächen der konfokalen Schar:

$$[(Q-\lambda)^{-1}\mathfrak{r}|\mathfrak{r}] = D^{-1}.$$

Irgend einer dieser konfokalen Flächen ist dann eine Kurve C_λ zugeordnet als Reziprokalkurve der durch die Berührungsebenen längs C_0 gebildeten abwickelbaren Fläche (deren Gleichungen in Linienkoordinaten:

$$Au^2 + Bv^2 + Cw^2 = D$$

$$A^2u^2 + B^2v^2 + C^2w^2 = D^2$$

lauten.)

Das Institut für angewandte Mathematik und Mechanik.[1])

Von C. Runge und L. Prandtl in Göttingen.

Im achtzehnten Jahrhundert waren an den Universitäten Fächer der angewandten Mathematik und Mechanik in beträchtlichem Umfange vertreten. Um speziell von Göttingen zu reden, so finden wir unter



Fig. 1.



Das Institut für angewandte Mathematik und Mechanik (Altes physikalisches Institut).

den Vorlesungen von Segner, Penther, Tobias Mayer, Kästner die Themata: praktische Feldmeßkunst, Maschinenlehre, Zivil- und Kriegsbaukunst, mathematische Geographie, Hydrostatik, Hydraulik. Zur Unterstützung der Anschauung beim Unterricht diente die Modell-

1) Der vorliegende Aufsatz ist ein unwesentlich erweiterter Abdruck eines Kapitels aus der Festschrift „Die physikalischen Institute der Universität Göttingen", Leipzig 1906, herausgegeben von der „Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik".

Über das Wesen dieser von F. Klein 1898 ins Leben gerufenen Vereinigung mögen hier einige Worte Platz finden. Sie besteht zu einem Teile aus Herren der Großindustrie, zum andern Teil aus Mitgliedern der Göttinger Universität. Durch die Opferwilligkeit der industriellen Mitglieder sind im Laufe der Jahre die hier beschriebenen Institute und das Institut für angewandte Elektrizitätslehre entstanden, daneben sind andere Institute (besonders die physikalischen und chemi-

kammer“, eine Sammlung von Modellen zur Mechanik, Statik, Hydraulik, Maschinenkunde.[1]) Im neunzehnten Jahrhundert haben Thibaut (gestorben 1832) und Ulrich (gestorben 1879) den Unterricht in diesem Sinne weitergeführt. Auch Listing hat noch über Maschinenkunde und über die Theorie der Dampfmaschine gelesen. Thibaut hinterließ der Universität eine Sammlung von geodätischen Instrumenten, die auch Ulrich noch benutzt hat. Unter den Gegenständen, in denen Ulrich unterrichtete, finden wir praktische Geometrie mit Übungen im Feldmessen und Nivellieren, landwirtschaftliche Baukunde, Maschinenkunde, Hydrostatik, Hydraulik. Indessen traten diese Fächer mehr und mehr in den Hintergrund gegenüber der Entwicklung der technischen Hochschulen und den glänzenden theoretischen Erfolgen von Gauß, Dirichlet, Riemann und Clebsch. Als Ulrich im Jahre 1879 starb, wurde die Modellkammer von H. A. Schwarz, der seit 1875 den Lehrstuhl für Mathematik inne hatte, aufgelöst. Es blieb die Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle, die im wesentlichen aus der Schenkung von Thibauts geodätischen Instrumenten bestand und nun zu einer mathematischen Modellsammlung im modernen Sinne ausgestaltet wurde.

Es ist das Verdienst von F. Klein, den Unterricht in angewandter Mathematik und Mechanik neu belebt zu haben in der richtigen Erkenntnis, daß in den angewandten Fächern eine Fülle von pädagogisch wertvollen Aufgaben und Beispielen für den Mathematiker zu finden sind, und daß auch die Teilnahme an dem Fortschritt dieser Wissenschaften der Universität nicht vorenthalten bleiben darf. Seine Bestrebungen haben in der Errichtung des Instituts für angewandte Mathematik und Mechanik, das heute die Räume des alten physikalischen Instituts in Besitz genommen hat, einen gewissen Abschluß gefunden, und

schen Institute und die Königliche Bibliothek) mit namhaften Summen gefördert worden.

Über die Entstehung der Göttinger Vereinigung und ihre Entwicklung in den ersten Jahren lese man den Aufsatz von F. Klein im 1. Jahrgang der „Physikalischen Zeitschrift“ Dez. 1899: „Über die Neueinrichtungen für Elektrotechnik und allgemeine technische Physik an der Universität Göttingen“. Dieser Aufsatz ist außer im Schlußkapitel der „Festschrift“ auch in der gelegentlich des Oberlehrer-Ferienkursus 1900 zu Göttingen herausgegebenen Schrift wieder abgedruckt: F. Klein und E. Riecke: Über angewandte Mathematik und Physik in ihrer Bedeutung für den Unterricht an den höheren Schulen nebst Erläuterung der bezüglichen Göttinger Universitätseinrichtungen. B. G. Teubner 1900.

1) Vergl. Joh. Steph. Pütter, Versuch einer akademischen Gelehrtengeschichte von der Georg August-Universität zu Göttingen I, p. 243 u. f. Göttingen 1765 (1. Teil) und 1788 (2. Teil).

daher lohnt es sich, einmal die Wandlungen zu verfolgen, welche zu dem heutigen Stande der Dinge geführt haben.

Es sind zwei Reihen der Entwicklung zu betrachten, die in der jetzigen Abteilung A für angewandte Mathematik und der Abteilung B für angewandte Mechanik auslaufen.

Entwicklung der beiden Abteilungen.

Die Abteilung A geht aus von der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle, zu der sie im Haushalte der Universität noch gehört. H. A. Schwarz, der die Sammlung verwaltete, schaffte eine Anzahl von Reißzeugen an und richtete im Herbst 1889 Übungen in konstruktiver Geometrie ein, eine Art mathematischen Zeichenunterrichts, der ähnlich gehandhabt wurde wie der auf den technischen Hochschulen übliche Unterricht in der darstellenden Geometrie. In einem Hörsaale des Auditoriengebäudes waren Zeichentische aufgestellt, an denen die Studierenden die Zeichenaufgaben ausführten unter Leitung von Schwarz selbst und den Privatdozenten Hölder und Schönflies. Als Schwarz im Jahre 1892 nach Berlin berufen wurde, führte Schönflies als Extraordinarius diesen Unterricht fort und verband damit auch Vorträge über projektive und darstellende Geometrie, wozu ihn ein eigener Lehrauftrag verpflichtete. Bei Schönflies' Übersiedelung nach Königsberg im Jahre 1899 wurde als sein Nachfolger Schilling berufen und mit dem Unterricht in *darstellender Geometrie* und in *graphischer Statik* betraut. Für die Zeichenübungen wurde die frühere Amtswohnung des Direktors der Frauenklinik (Hospitalstr. 12) eingerichtet. Hier fand nun auch der geodätische Unterricht Unterkunft, den zunächst Ambronn mit Instrumenten der Sternwarte aufgenommen hatte und den jetzt E. Wiechert weiterführte[1]) und auf höhere Geodäsie ausdehnte. Leider waren inzwischen die geodätischen Instrumente, die zu der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle gehörten, an die Sternwarte und an andere Institute abgegeben worden, weil nicht vorauszusehen war, daß sich der geodätische Unter-

1) Als im Jahre 1897 Schering starb, dessen Lehrauftrag Mathematik, theoretische Astronomie, Geodäsie und mathematische Physik vereinigt hatte, wurde seine Stellung in zwei Extraordinariate verwandelt und Brendel und Wiechert als seine Nachfolger berufen. Brendel übernahm die theoretische Astronomie, Wiechert die Geophysik. Später hat Brendel auch den Lehrauftrag für Versicherungsmathematik erhalten, den vor ihm Bohlmann an dem im Jahre 1895 gegründeten Versicherungsseminar gehabt hatte. Über den Unterricht in der niederen Geodäsie, wie Wiechert ihn zunächst einrichtete, vergleiche dessen Aufsatz in der oben zitierten Schrift von F. Klein und E. Riecke, Über angewandte Mathematik und Physik usw.



richt gerade an die Sammlung mathematischer Instrumente wieder würde angliedern lassen. Hierfür wurde dadurch Ersatz geschaffen, daß einmal der Staat auf Befürworten des ersten Vorsitzenden der Göttinger Vereinigung, v. Böttinger, 2000 Mark bewilligte und andererseits die Göttinger Vereinigung in verschiedenen Raten im ganzen bis jetzt 6000 Mark für die Erwerbung geodätischer Instrumente anwies. Zugleich schenkte der Norddeutsche Lloyd im Jahre 1901 eine Sammlung seiner nautischen Instrumente (Schiffskompasse und Sextanten), und Krupp überwies der Sammlung eine Auswahl von Markscheideinstrumenten (1903).

Die neu erstandene Sammlung wurde zugleich mit den Unterrichtsmitteln der darstellenden Geometrie und graphischen Statik der Leitung Schillings unterstellt. Beides zusammen figurierte im Etat als eine Abteilung der Sammlung mathematischer Instrumente und Modelle „B. Abteilung für graphische Übungen und mathematische Instrumente", und Schilling wurde im Jahre 1903 ihr selbständiger Direktor, während die „Abteilung A für mathematische Modelle" F. Klein unterstellt blieb.

Diese Einrichtung eines regelmäßigen Unterrichts in darstellender Geometrie, graphischer Statik und Geodäsie entsprach genau der neuen Prüfungsordnung, die am 12. September 1898 für das Lehramt an höheren Schulen in Preußen erlassen worden war. Die Prüfungsordnung kennt neben der reinen Mathematik das Prüfungsfach „angewandte Mathematik" und schreibt vor (§ 22): „Von den Kandidaten, welche die Lehrbefähigung in der angewandten Mathematik nachweisen wollen, ist außer einer Lehrbefähigung in der reinen Mathematik zu fordern: Kenntnis der darstellenden Geometrie bis zur Lehre von der Zentralprojektion einschließlich und entsprechende Fertigkeit im Zeichnen; Bekanntschaft mit den mathematischen Methoden der technischen Mechanik, insbesondere der graphischen Statik, mit der niederen Geodäsie und den Elementen der höheren Geodäsie nebst Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler."

Schilling hat sich über die verschiedenen Richtungen, in denen er den Unterricht ausgestaltete, in den Vorträgen ausgelassen, die er zu Ostern 1904 für den Ferienkursus der Oberlehrer der Mathematik und Physik gehalten hat.[1])

---

1) Fr. Schilling. Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie, insbesondere über die Photogrammetrie. Zweiter Teil der „neuen Beiträge zur Frage des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen", Vorträge, gesammelt von F. Klein und E. Riecke. B. G. Teubner 1904.

Im Herbst 1904 zog Schilling als Professor für darstellende Geometrie an die technische Hochschule in Danzig. An seiner Stelle in Göttingen wurde C. Runge berufen mit dem allgemeinen Lehrauftrag für angewandte Mathematik. Damit war eine erweiterte Auffassung des Lehramts bekundet, die im Herbst 1905 *durch die Vereinigung mit der technischen Physik* in der Begründung des *Instituts für angewandte Mathematik und Mechanik* ihren abschließenden Ausdruck fand.

Die zweite Entwicklungsreihe, die zu der *Abteilung* B für angewandte Mechanik führt, geht aus von der im Beginn des Jahres 1897 gegründeten *Abteilung für technische Physik*, die dem physikalischen Institut angegliedert wurde. Sie ist mit der Entstehung der *Göttinger Vereinigung* aufs engste verknüpft. Den unmittelbaren Anlaß zur Gründung der Abteilung gab zu Weihnachten 1896 die Schenkung einer namhaften Summe für diesen Zweck seitens einiger Herren aus der Industrie. Es waren dies die Herren Dr. v. Böttinger in Elberfeld, Professor Dr. C. v. Linde in München und Kommerzienrat Krauß in München. Der Plan wurde alsbald wesentlich gefördert durch die von der Regierung bereitwillig erteilte Erlaubnis, den maschinellen Teil der bereits genehmigten elektrischen Beleuchtungsanlage für die königliche Bibliothek dem geplanten Laboratorium einzuordnen.

Zur gleichen Zeit war es, unter Angliederung eines Lehrauftrags für landwirtschaftliche Maschinenlehre, ermöglicht worden, für die Stelle des Laboratoriumleiters eine außerordentliche Professur zu begründen; auch die Stelle eines Assistenten und eines Maschinisten wurde von der Regierung bewilligt.

Die Professur wurde zu Ostern 1897 dem Privatdozenten R. Mollier in München übertragen, der jedoch schon im Herbst 1897 wieder ausschied, um als Nachfolger Zeuners an die technische Hochschule Dresden überzusiedeln.

Unter Molliers Leitung hatte man mit dem Bau eines ersten Pavillons (die Räume B1, 2 und 3 des Planes auf Seite 269) auf dem Grundstück des physikalischen Instituts begonnen, und es waren ein der erwähnten Beleuchtungsanlage dienender 10pferdiger Gasmotor, sowie eine 15pferdige Dampfmaschine mit Kesselanlage bestellt worden.

Nach dem Weggange von Mollier wurde Eugen Meyer, Dozent der technischen Hochschule Hannover, zunächst kommissarisch mit dem Ausbau der Anlage betraut, erst ein Semester später (Ostern 1898) siedelte er endgültig nach Göttingen über und übernahm zugleich mit der Professur auch das Direktorat des inzwischen zu einer selbständigen „Abteilung für technische Physik“ erhobenen Instituts. Das erste

Praktikum war bereits im Wintersemester zustande gekommen, indem im November die Gasmaschine und Anfang Januar die Dampfmaschine in Betrieb gekommen waren.

Dank der kräftigen Beihilfe der inzwischen gegründeten „Göttinger Vereinigung" konnte schon jetzt an einen weiteren Ausbau gedacht werden, zu dessen Ausführung der Staat einen namhaften Beitrag leistete. Es entstand im Frühjahr und Sommer 1898 ein Anbau, die Räume 4 und 5 des Planes auf Seite 269 enthaltend; darin gelangten zur Aufstellung eine Kältemaschinenanlage mit Kohlensäurebetrieb und eine Generatorgasanlage; im großen Maschinensaal wurden zur gleichen Zeit eine 15pferdige Dampfmaschine, System de Laval, ein 2pferdiger Petroleummotor (Geschenk des Herrn Kommerzienrat Kuhn in Stuttgart), sowie ein 20pferdiger Dieselmotor — das Prunkstück und zugleich Schmerzenskind des Laboratoriums — aufgestellt. Nachdem noch im Anfang des Jahres 1899 für die beiden Dampfmaschinen ein Oberflächenkondensator in dem jetzt mit dem Maschinensaal vereinigten früheren Hofraum 1* aufgestellt war, war eine innerhalb der gezogenen Grenzen sehr vielseitige Einrichtung für das gesamte Lehrgebiet der Wärmekraftmaschinen erreicht. Es begann nun eine an Forschungsergebnissen reiche Zeit. Besonders bekannt geworden sind die Untersuchungen am Gasmotor und an der Gasgeneratoranlage, die den speziellen Neigungen Meyers am meisten entsprachen.

Als Eugen Meyer im Sommer 1900 einen Ruf an die technische Hochschule Charlottenburg annahm, wurde H. Lorenz, bis dahin außerordentlicher Professor in Halle, für die Stelle gewonnen. Unter seiner Leitung hat das Institut einen weiteren wichtigen Schritt vorwärts getan. Um in ähnlicher Weise, wie es für die Thermodynamik geschehen war, auch für Festigkeitslehre und Hydraulik Einrichtungen zu gewinnen, beschloß die „Göttinger Vereinigung", die inzwischen durch Gewinnung neuer Mitglieder zu einer stattlichen Gesellschaft erstarkt war, einen weiteren Neubau an die bisherigen Räume anzugliedern, mit dem nun ein gewisser Abschluß erreicht werden sollte. Der Bau, der im Herbst 1901 begonnen und im darauffolgenden Herbst bezogen wurde, wurde nicht wie die bisherigen Räume in Fachwerk, sondern in massiver Bauweise ausgeführt. Er erhielt auch ein Obergeschoß, in dem neben einigen anderen Räumen eine Dienstwohnung für den Maschinisten Platz fand.

Die innere Einrichtung dieses Baues wurde vom Staat übernommen. In dem Hauptsaale kamen Ende des Jahres 1902 eine Zerreißmaschine und eine Torsionsmaschine, sowie eine elektrisch angetriebene Pumpe mit Windkessel zur Aufstellung. Später (1905) ist

Fig. 2.



Institut für angewandte Mathematik und Mechanik.

Erklärung der Bezeichnungen:

A. Abteilung für angewandte Mathematik.

1—5. Räume für Geodäsie.
6—9, 13. Räume für numerische und graphische Übungen.
10. Zimmer des Direktors.
11. Werkstätte.
12. Photographisches Zimmer.

B. Abteilung für angewandte Mechanik.

1. Wärmekraftmaschinensaal.
2. Kesselraum.
3. Arbeitszimmer.
4. Kältemaschinenraum.
5. Gasgeneratorraum.
6. Treppenhaus.
7. Maschinensaal für Festigkeitslehre und Hydraulik.
8. Arbeitszimmer.
9. Mechanische Werkstätte.
10—14. Wohnung des Maschinenmeisters.
15. Meterologisches Zimmer.
16. Photographisches Zimmer.
17. Zimmer des Direktors.
18. u. 19. Arbeitsräume für einfachere mechanische und thermische Untersuchungen.
20—22. Arbeitsräume für mikroskopische und chemische Untersuchungen.
23. Vorlesungssammlung (und Aerodynamik).

C. Gemeinsame Räume.

1. Hörsaal.
2. Lesezimmer.

die Einrichtung noch durch eine Peltonturbine und eine hydraulische Presse vervollständigt worden.

Lorenz schied Ostern 1904 aus dem Amte, um an der neugegründeten technischen Hochschule in Danzig den Lehrstuhl für Mechanik einzunehmen. Nach einem Interregnum von einem Semester, in dem E. Riecke das Institut verwaltete, wurde zum Herbst L. Prandtl, bis dahin Professor an der technischen Hochschule Hannover, zum Direktor der Abteilung berufen.

Das Jahr 1905 brachte einen letzten sehr erfreulichen Fortschritt für das Institut. Nach dem Umzuge des physikalischen Instituts in das neue Haus an der Bunsenstraße wurden die alten Räume an die „angewandte Mathematik“ und die „technische Physik“ verteilt, so zwar, daß die an das Maschinenlaboratorium angrenzenden Räume am Leinekanal den Zwecken der technischen Physik, die an der Prinzenstraße denen der angewandten Mathematik überwiesen wurden; beiden Instituten gemeinsam ist ein Hörsaal und ein Lesezimmer.

Die Zusammengehörigkeit der beiden Institute, die ja keineswegs eine bloß äußerliche ist, ist bald nachher durch die gemeinsame Bezeichnung als *„Institut für angewandte Mathematik und Mechanik“* zum Ausdruck gekommen.[1])

Beschreibung der Institutseinrichtungen.

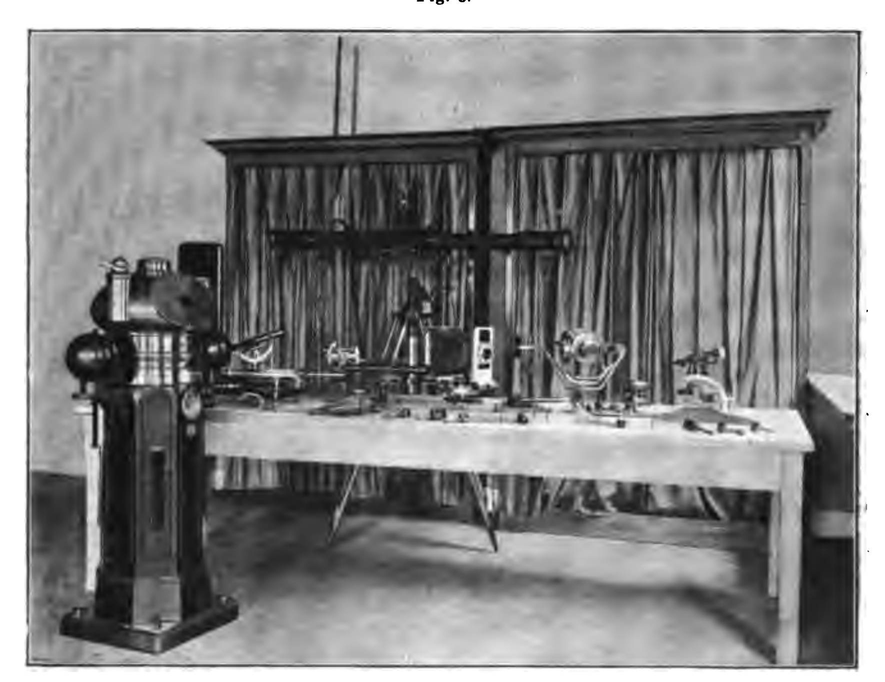
Was die Verteilung der Räume der Abteilung A betrifft (vergleiche den Plan Seite 269), so ist die Sammlung der feineren geodätischen und nautischen Instrumente im Erdgeschoß in dem auf dem Plane mit A 1 bezeichneten Raume untergebracht — vergleiche die Abbildung 3, die eine Auswahl der bemerkenswertesten Instrumente zur Anschauung bringt, von denen zwei Phototheodoliten, ein Zeißsches Telemeter (im Hintergrund), sowie ein vollständiger Schiffskompaß (links) besonders hervorgehoben werden mögen. Die Sammlung besitzt auch einen Zeißschen Stereokomparator, für den die Göttinger Vereinigung die Mittel zur Verfügung gestellt hat. Die übrigen Zimmer des Erdgeschosses (Plan A 2, 3, 4, 5) enthalten eine Sammlung von einfacheren geodätischen Geräten und sind auch für den geodätischen Unterricht bestimmt. In der ersten Etage dienen fünf Räume (Plan A 6, 7, 8, 9, 13) als Zeichensäle. Es sind hier etwa

1) Der bisherige Name „technische Physik“ ist aufgegeben worden, um das Arbeitsgebiet des Instituts von der angewandten Elektrizitätslehre wirksam zu unterscheiden, die auch zur technischen Physik gerechnet werden kann. Der Begriff Mechanik ist dabei in seinem weitesten Sinne, auch die Thermodynamik umfassend, genommen.

60 Zeichentische so aufgestellt, daß sie bei Tage ausreichend durch das Tageslicht beleuchtet sind. Zugleich ist für künstliche Beleuchtung durch Nernstlampen und Auerbrenner Sorge getragen. In dem Raume 13 ist ein geeigneter Waschtisch zum Aufspannen der Zeichenbogen vorgesehen. Raum Nr. 10 ist Direktorzimmer, Nr. 12 als Dunkelkammer und Nr. 11 als Werkstatt eingerichtet. In dem Dachgeschoß befindet sich die Wohnung für den Hausverwalter.



Fig. 3.



Geodätische Instrumente.

Eine etwas ausführlichere Beschreibung verlangen die Einrichtungen der *Abteilung B*: ein Rundgang durch die Räume mag den augenblicklichen Stand des Laboratoriums vor Augen führen.[1])

Wir beginnen mit dem Wärmekraftmaschinensaal (1), der 1905 durch Hinzunahme des früheren Durchganges (1*) vergrößert worden ist (Abb. 4). Er enthält die 15pferdige *Dampfmaschine* (a) (eine Einzylinderschiebermaschine von Knoevenagel in Hannover), die mit einem Einspritzkondensator (b) und einem Oberflächenkondensator (c)

1) Die im Text beigefügten Ziffern und Buchstaben beziehen sich auf den Plan (Seite 269), in den die Maschinen sowie die sonstigen festaufgestellten Einrichtungen eingetragen sind.

ausgerüstet ist; als Hilfsvorrichtung zur Messung von Kondensat und Kühlwasser dient ein Behälter (*d*) auf einer Dezimalwage und ein Meßgefäß (*e*). An die gleichen Leitungen wie die Dampfmaschine ist angeschlossen eine de Lavalsche *Dampfturbine* (*f*) der Maschinenbauanstalt Humboldt in Kalk bei Köln, welche bei 24000 Umdrehungen pro Minute die gleiche Leistung entwickelt wie die Dampfmaschine bei 135 Umdrehungen.

Die 10pferdige *Gasmaschine* (*g*) der Gasmotorenfabrik Deutz ist die normale Betriebsmaschine des Maschinenlaboratoriums; sie treibt unter Zwischenschaltung eines Riemendynamometers (*h*) von Fischinger, das die durchgeleitete Arbeitsleistung zu messen gestattet, die Transmissionswelle (*i*) an der Westmauer des Saales, von der aus die Kältemaschine (4*a*), sowie die Kondensatpumpe des Oberflächenkondensators betrieben wird.

Von der Gasmaschine wird ferner die Universaldynamo (*k*) der Allgemeinen Elektrizitätsgesellschaft in Berlin angetrieben, die neben Gleichstrom von 80 Volt auch Ein-, Zwei- und Dreiphasenstrom liefern kann; sie diente zusammen mit einer im Keller aufgestellten Batterie von 100 Ampère-Stunden-Kapazität, früher, wie schon erwähnt, zur Beleuchtung der königlichen Bibliothek, außerdem als Hilfsmaschine für das elektrotechnische Laboratorium; jetzt versorgt sie nur mehr das Institut mit Strom.

Die Mitte des Saales wird eingenommen von einem 20pferdigen *Dieselmotor* (*l*) der Maschinenbaugesellschaft Nürnberg, der größten Maschine des Laboratoriums. Für die thermodynamische Untersuchung der Gasmaschine und des Dieselmotors dient neben den Einrichtungen zur Messung der Gas- bezw. Petroleumzufuhr ein großer Gasmesser (*m*) von Elster in Berlin zur Messung der angesaugten Verbrennungsluft; die Gefäße *n* dienen zur Messung des Kühlwassers beider Maschinen.

An allen vorgenannten Kraftmaschinen befinden sich Bremsen und Indiziervorrichtungen zur Ermittlung der Maschinenleistung, ferner vollständige Einrichtungen zur Aufstellung der Wärmebilanz.

Ein kleiner Petroleummotor (*o*) von Kuhn in Stuttgart vervollständigt die Sammlung von Wärmekraftmaschinen, in der freilich der modernste Typ, der Automobilmotor, bis jetzt noch fehlt.

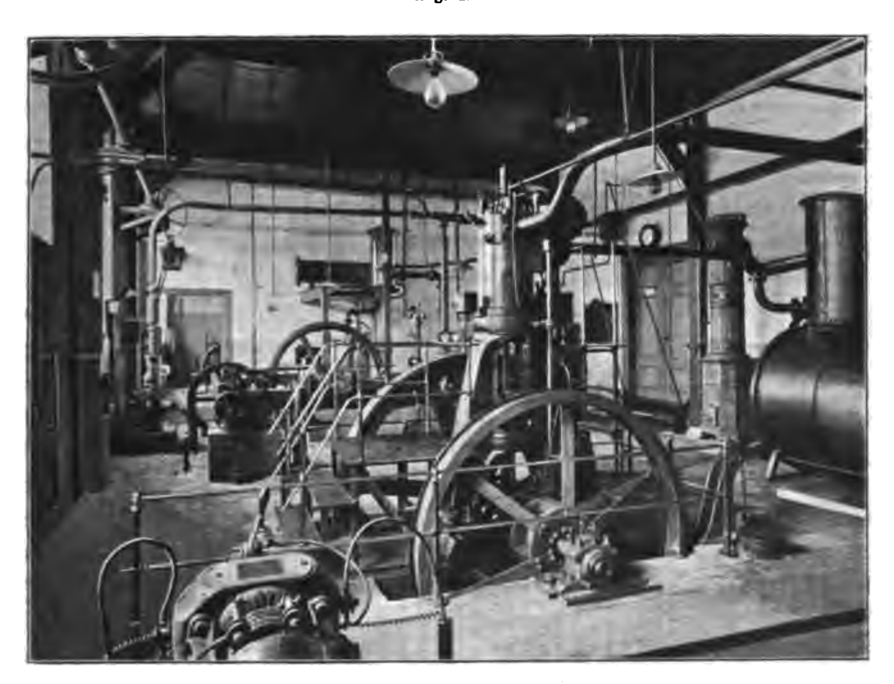
Im Raum 2 finden wir den Dampfkessel (*a*) für die Dampfmaschinenanlage, einen stehenden Siederohrkessel von 20,3 qm Heizfläche, geliefert von Knoevenagel in Hannover, hierzu gehörig ein Brunnen (*b*) zur Speisewassermessung. Der abgetrennte Teil des Raumes dient als Magazin; in einer Ecke befindet sich ein Schmiedefeuer.

Raum 3 ist das Arbeitszimmer des Assistenten und Ausgabestelle der Meßinstrumente. Hier wird auch die Besprechung und Berechnung der Praktikums-Versuche vorgenommen.

In Raum 4 befindet sich eine Kohlensäure-Kälteanlage von 8000 W.-E. pro Stunde Kälteleistung, geliefert von der Maschinenfabrik L. A. Riedinger in Augsburg; *a* ist der Kompressor, *b* der Verdampfer, in dem die flüssige Kohlensäure verdampft und dadurch die zirkulierende



Fig. 4.



Wärmekraftmaschinensaal.

Salzlösung kühlt; *c* ist der Kondensator, in dem die Kohlensäure wieder mit Hilfe von Kühlwasser verflüssigt wird.

Raum 5 enthält eine *Generatorgasanlage* (Dowsongas) von der Gasmotorenfabrik Deutz, die 200 cbm Gas pro Stunde liefern kann. *a* ist der Generator, *b* der Dampfkessel, *c* und *d* Reinigungsapparate. Im Hof befinden sich zwei Meßgasometer (*e*) zur abwechselnden Füllung und Entleerung, sowie ein Sammel-Gasometer (*f*) von größerem Inhalt. Von dort führt auch eine Leitung zum Gasmotor, der, eigentlich für Leuchtgas gebaut, auch den Betrieb mit Generatorgas zuläßt. Neuerdings hat hier ein elektrisch betriebener Ventilator zu aerodynamischen Versuchen Aufstellung gefunden.

Wir gehen nun über den Hausflur (6), von dem aus eine Treppe in die im ersten Stock befindliche Maschinistenwohnung (10—15) führt, und gelangen so in den Maschinensaal für Festigkeitslehre und Hydraulik (7) (Abb. 5). Es findet sich hier eine elektrisch angetriebene *Zerreißmaschine* (*a*) von Mohr & Federhaff in Mannheim, mit der neben Zugversuchen auch Druck-, Biege- und Scherversuche mit nicht zu starken Probekörpern ausgeführt werden können; ihre größte Kraftleistung ist 15000 kg. Ferner ist eine *Torsionsmaschine* (*b*) von Amsler-Laffon in Schaffhausen (Maximalleistung 150 mkg) und eine *hydraulische Presse* (*c*) von 150000 kg. Maximalkraft, geliefert von der Maschinenbaugesellschaft Nürnberg, vorhanden. Auf letzterer Maschine können Stücke bis zu 1,20 m Höhe gedrückt werden, so daß sie auch für Knickversuche verwendbar ist. Zur Formänderungsmessung dienen Martenssche Spiegelapparate, für feinere Kraftmessungen an der Presse dient eine Meßdose für 40000 kg Maximallast, gebaut von der Maschinenbaugesellschaft Nürnberg.

An hydraulischen Einrichtungen ist bis jetzt folgendes vorhanden: eine *Differential-Kolbenpumpe* (*d*) mit verstellbarem Hub und auswechselbaren Kolben von verschiedenen Durchmessern, für 10 Atmosphären Maximaldruck, geliefert von A. Knoevenagel in Hannover; sie wird durch einen 10pferdigen Elektromotor (*e*) mit Hilfe eines Vorgeleges angetrieben, und zwar ist die Einrichtung getroffen, durch elektrische Schaltung und auswechselbare Riemenscheiben jede Tourenzahl zwischen 60 und 400 Umdrehungen pro Minute einzustellen. Vermittels einer einfachen Hilfseinrichtung kann man die Pumpe auch als Luftkompressor laufen lassen. Mit der Pumpe steht in Verbindung ein *Windkessel* (*f*) von 1,8 cbm Inhalt und Einrichtungen zu Ausflußversuchen mit Luft und Wasser. Als Saugbehälter dient ein gemauerter Brunnen (*g*) von etwa 7 cbm Inhalt. Als Vertreter der hydraulischen Kraftmaschinen ist einstweilen ein 6pferdiges *Peltonrad* (*h*) von Breuer & Co. in Höchst a. M. vorhanden, das sein Kraftwasser von der Pumpe erhält und es behufs Messung der verbrauchten Menge in einen Behälter mit geaichten Ausflußmündungen ausgießt. Zur Vervollständigung der hydraulischen Einrichtungen ist projektiert eine Zentrifugalpumpe und eine von ihr getriebene Vollturbine. — Die in diesem Raume als Betriebsmittel verwendete Elektrizität wird dem städtischen Netz (Dreileiter mit $\pm$ 220 Volt) entnommen.

Das an den Maschinenraum angrenzende Zimmer (8) dient als Sammlungsraum für Instrumente und Festigkeitsproben, sowie während des Praktikums als Vortrags- und Rechenzimmer; hier hat auch eine von Krupp in Essen dem Institut geschenkte Sammlung von Schießproben

(Panzerplatten und Geschosse), sowie Festigkeitsproben Aufstellung gefunden. Raum 9 ist eine mechanische Werkstätte, enthaltend eine größere Leitspindeldrehbank (*a*) mit elektrischem Antrieb, eine kleinere Supportdrehbank (*b*) mit Fußbetrieb, sowie eine Fräsmaschine (*c*).

Gehen wir nun durch das ganze Haus zurück und durch eine Tür im Maschinenraum einige Stufen hinauf zu den 1905 hinzugekommenen Räumen. Dort befindet sich das photographische Dunkelzimmer 16, daneben das Zimmer (17), das dem Direktor der Abteilung zum Arbeits-



Fig. 5.



Maschinensaal für Festigkeitslehre und Hydraulik.

zimmer dient. Raum 18 ist für hydrodynamische Untersuchungen bestimmt und hat zu diesem Zweck einen wasserdichten Fußboden mit Ablauf erhalten. Bis jetzt ist ein der Vollendung entgegengehender *hydrodynamischer Universalapparat*[1]) aufgestellt, in dem sich ein durch eine Zentrifugalpumpe betriebener Wasserumlauf befindet; Leitvorrichtungen und Siebe sorgen für eine geordnete Bewegung; durch Einbau verschiedener Gerinne in den Apparat lassen sich Strömungen um Hinder-

1) Vgl. hierzu L. Prandtl, Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung, Verhandlungen des Internationalen Mathematikerkongresses zu Heidelberg 1904; Leipzig 1905, S. 484.

nisse, Überfälle, stehende Wellen, Fließen in geraden und krummen Gerinnen studieren.

Raum 19 ist für einfachere Untersuchungen über Mechanik und Wärmelehre bestimmt.

Durch das Treppenhaus gelangt man zu den Räumen 20—22, von denen 20 und 21 für mikroskopische und metallographische Untersuchungen vorgesehen sind, während 22 als chemisches Zimmer eingerichtet ist. Der Saal 22 enthält neben einer Vorlesungssammlung für Mechanik einen Rundlauf für Anemometeruntersuchung und sonstige aërodynamische Versuche.

Den *beiden Abteilungen* gemeinsam ist, wie schon erwähnt, der Hörsaal (*C* 1 im Plan S. 269) und das Lesezimmer (*C* 2). Der *Hörsaal* (der frühere physikalische Hörsaal) hat 70 Sitzplätze, die treppenförmig aufsteigen. An der Vorderwand befindet sich eine die ganze Breite einnehmende feste Wandtafel, über der herabklappbar ein großer Rechenschieber von 2,5 m Länge (ein Geschenk der Firma A. W. Faber) schwebt. Vor der Wandtafel hat ein Vorlesungstisch mit Einrichtung zum Aufbauen einfacher mechanischer Versuche Aufstellung gefunden. Ein lichtstarker Projektionsapparat, der auch die Abbildung von undurchsichtigen Gegenständen erlaubt, vervollständigt die Einrichtung. Die Mittel hierzu sind von der Göttinger Vereinigung zur Verfügung gestellt worden.

In dem *Lesezimmer* ist vorerst nur die Handbibliothek der Abteilung für angewandte Mechanik zur Aufstellung gelangt; doch ist beabsichtigt, im Laufe der Zeit die Bibliothek so zu erweitern, daß in ihr die wichtigste Literatur auf dem Gesamtgebiet der angewandten Mathematik und Mechanik zugänglich gemacht werden wird.

Unterrichtsbetrieb.

Man kann die allgemeine Aufgabe des *Instituts für angewandte Mathematik*, wie sie sich jetzt entwickelt hat, so formulieren, daß die Mathematik in ihren Beziehungen zu den experimentellen Wissenschaften gelehrt werden soll, so zwar, daß die Studierenden nicht nur die mathematischen Theorien kennen lernen, sondern auch die numerische und graphische Durchführung der Probleme. Zu dem Zwecke muß der Unterricht ähnlich gestaltet werden wie die in den experimentellen Wissenschaften schon seit langem üblichen praktischen Übungen. Die Studierenden arbeiten einzeln an den ihnen gestellten Aufgaben und werden dabei von dem Professor und seinem Assistenten beraten. Sie sollen zugleich die nötigen Fertigkeiten im Zeichnen und in der Handhabung geodätischer und mathematischer Apparate (Rechenschieber,

Rechenmaschine, Planimeter etc.) erlernen, sowie auch die Kunst, eine Rechnung geeignet anzuordnen und zu kontrollieren.

Auch für die grundlegenden Elementarvorlesungen des mathematischen Gesamtbetriebs werden solche Übungen eingerichtet. Es lassen sich die Aufgaben so wählen, daß sie sich auf wirkliche Dinge beziehen, ohne daß es doch nötig wäre, zu viel Zeit mit der Auseinandersetzung der Aufgaben zu verlieren. Dabei ist immer Gewicht darauf gelegt, daß der Studierende den Ansatz, d. h. die mathematische Formulierung des Problems zu machen hat. Die mathemati che Ausführung, nachdem der Ansatz gefunden ist, bildet in vielen Fällen den geringeren Teil der Aufgabe. Die Erfahrung lehrt, daß von dem Verständnis der mathematischen Beweise bis zu der Fähigkeit, sich der mathematischen Hilfsmittel zur Erforschung oder Beschreibung wirklicher Verhältnisse zu bedienen, noch ein weiter Schritt ist. Durch Vorlesungen allein wird diese Fähigkeit nicht genügend gepflegt.

Der individuelle Unterricht bei den Übungen hat zugleich den großen Vorzug, daß er auf die Auffassung des Einzelnen eingehen, seine Einwände widerlegen, seine Mißverständnisse beseitigen und eigene Gedankenbildungen des Schülers ermutigen und vertiefen kann.

In dieser Weise ist im Sommer 1905 und im Winter 1905/06 die Differential- und Integralrechnung, im Sommer 1906 die Theorie der Differentialgleichungen behandelt worden. Daneben stehen Spezialvorlesungen. Im Winter 1905/06 wurden Vorlesungen und Übungen über die graphischen Methoden der Physik und Mechanik abgehalten.

Alle zwei Jahre findet eine Vorlesung über darstellende Geometrie statt, verbunden mit den nötigen Übungen. In der Geodäsie erteilte E. Wiechert einen regelmäßigen Unterricht durch Vorlesungen und Übungen, dessen Kursus zwei Semester umfaßt. Die Vorlesungen behandeln niedere und höhere Geodäsie, Nautik, Markscheidekunst und verwandte Gebiete, wobei auch die Rechnungsmethoden besprochen werden. In den Übungen wird gelehrt, wie man mit den geodätischen, nautischen und Markscheideinstrumenten umgeht, wie man sie justiert und wie man ihre Fehler bestimmt. Dazu kommen praktische Vermessungsübungen im freien Felde, bestehend in einer Triangulation, einer Kleinvermessung, einer Nivellierung, einer barometrischen Höhenmessung und Aufnahmen mit tachymetrischen Instrumenten und Meßtisch. Die Ergebnisse der Messung werden teils durch Rechnung, teils durch Zeichnung verarbeitet.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird gewöhnlich als selbständige Vorlesung gelesen entsprechend dem allgemeinen Interesse, welches diese Disziplin für die verschiedensten Gebiete nicht nur des natur-

wissenschaftlichen Studiums besitzt (z. B. für das Versicherungswesen).

Der Unterricht in der *Abteilung für angewandte Mechanik* gliedert sich in Vorträge (z. T. mit Übungen), in Praktika, sowie in Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. Die Einrichtungen des Instituts dienen dabei als Anschauungsmaterial bei den Vorträgen, hauptsächlich aber als Versuchsobjekte beim Praktikum und bei experimentellen Forschungen.

Das *Praktikum* wurde bisher in zwei Abteilungen von je einem Semester abgehalten. Die erste und am meisten besuchte[1]) Abteilung umfaßt die Untersuchungen an den Wärmekraftmaschinen, einschließlich der Kältemaschine. Es werden dabei hauptsächlich diejenigen Messungen gemacht, die zur Ermittlung der indizierten und effektiven Leistung, sowie zum Nachweis der thermodynamischen Gesetze dienen: Aufnahme von Indikatordiagrammen (und Planimetrierung), Messung der Umdrehzahl, des Bremsmoments, der zugeführten Menge des Arbeitsmittels, Heizwertbestimmung, Messung der abgeführten Wärmemengen usw. In der anderen, von der ersten unabhängigen Abteilung werden die wichtigsten Versuche auf dem Gebiete der Festigkeitslehre und Hydraulik gemacht: Zug, Druck, Biegung, Scherung, Torsion, Knickung, an charakteristischen Materialien, unter Messung der feinen und groben Formveränderung; Untersuchung der Pumpe und des Peltonrades, Ausfluß von Wasser und Luft.

Die Zusammensetzung des Teilnehmermaterials ist — besonders beim Wärmemaschinenpraktikum — ziemlich bunt; hauptsächlich sind es Mathematiker und Physiker, sowie Chemiker, aus höheren und niederen Semestern. Eine systematische Vorbereitung auf das Praktikum (durch vorhergegangene Vorträge über Maschinenwesen, Wärmelehre usw.) ist bei den wenigsten vorhanden. Da man so ungeübte Leute mit einer Maschine nicht allein lassen darf, wo doch durch einen einzigen falschen Handgriff leicht die ganze Messung verdorben, wenn nicht gar ein Unglück herbeigeführt werden könnte, so muß das Praktikum im großen und ganzen als ein Demonstrationspraktikum abgehalten werden, bei dem nach einem einleitenden Vortrage die Einzelaufgaben der Messung an die Studenten verteilt werden, und dann der Versuch unter Leitung des Vortragenden vorgenommen wird; die Auswertung des Resultats geschieht in gemeinsamer Arbeit; hierauf erfolgt eine Besprechung der Ergebnisse, besonders Vergleich mit der Theorie und mit anderen Versuchsresultaten.

1) Die größte Teilnehmerzahl war bisher 22; die Gesamtfrequenz seit der Gründung beträgt augenblicklich 210 Teilnehmer.

Da die selbständige Betätigung der Studierenden auf diese Weise wenig zur Ausbildung gelangt, ist außer dem bisherigen Praktikum die Einrichtung eines *Anfängerpraktikums* geplant, welches einfachere Aufgaben aus der Mechanik der starren Körper, sowie aus der Festigkeitslehre und Hydraulik umfassen und so Gelegenheit geben soll, mit verhältnismäßig bescheidenen (und daher auch an Schulen beschaffbaren) Mitteln die wichtigsten mechanischen Messungen kennen und ausführen zu lernen.

Zu *selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten* steht die ganze Laboratoriumseinrichtung den sich Meldenden offen. Allerdings muß eine gewisse Vertrautheit mit der Behandlung der Maschinen vorausgesetzt werden; doch steht dabei sachkundige Hilfe von seiten des Personals zur Verfügung. Größere Experimentalarbeiten sind bis jetzt vorgenommen worden am Gasmotor[1][2]) und der Generatorgasanlage[1]), an der Dampfturbine[3]), am Dieselmotor[4]) und an den Festigkeitsmaschinen[5])[6]), ferner Versuche über die spezifische Wärme des Wasserdampfes.[7]) Nebenher gingen einige theoretische Arbeiten.[8])[9])[10]) Augenblicklich in Arbeit oder Vorbereitung sind Versuche über Ausströmen von Druckluft[11]),

1) Eugen Meyer, Untersuchungen am Gasmotor. Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure Bd. 45 (1901), S. 1297 und 1341, Bd. 46 (1902), S. 945, 996, 1308 und 1391; Mitteilungen über Forschungsarbeiten, herausgegeben vom Verein deutscher Ingenieure. Heft 3 (1901), S. 1 und Heft 8 (1903), S. 55.

2. G. Horovitz, Über die Wärmeausnutzung in der Gasmaschine. Dissertation 1902.

3) E. H. Schütz, Die Ausnutzung des Dampfes in den Lavalturbinen. Dissertation 1901.

4) W. Luyken, Über den Verbrennungsprozeß im Dieselmotor. Dissertation 1904.

5) H. Hort, Über die Wärmevorgänge beim Zerreißversuch. Dissertation 1906.

6) S. Berliner, Das elastische Verhalten von Gußeisen bei langsamen Belastungswechseln. Dissertation 1906.

7) H. Lorenz, Die spezifische Wärme des überhitzten Wasserdampfes. Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1904, S. 698.

8) W. Hort, Die Entwicklung des Problems der stetigen Kraftmaschinenregelung. Dissertation 1904.

9) K. Giebel, Über den Einfluß der Hemmung auf den Gang der Uhr. Dissertation 1905.

10) S. Timoschenko, Über die Stabilität der Biegung eines I-Trägers bei Belastung in Richtung der größten Steifigkeit. St. Petersburg 1906.

11) L. Prandtl, Neue Untersuchungen über die strömende Bewegung der Gase und Dämpfe, Physikalische Zeitschrift 8 (1907) S. 23. Vgl. hierzu auch L. Prandtl, Beitrage zur Theorie der Dampfströmung durch Düsen, Zeitschr. des Vereins deutsch. Ing. 48 (1904), S. 348; Über die stationären Wellen in einem Gasstrahl, Physikal. Zeitschr. 5 (1904), S. 599; ferner Encyklopädie der math. Wiss. Bd. V, 5b (Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe).

über die elastischen Eigenschaften von Gußeisen und Steinen, sowie Versuche mit den hydrodynamischen und aerodynamischen Apparaten.

Um das vorstehend entworfene Bild des Unterrichtsbetriebes zu vervollständigen, mag hier ein Verzeichnis der von den bisherigen Direktoren gehaltenen *Vorlesungen* folgen; wiederholt gehaltene Vorträge sind dabei nur einmal aufgeführt.

Allgemeine Maschinenlehre, Maschinentechnik, Technologie (für Hörer aller Fakultäten, insbesondere Juristen); landwirtschaftliche Maschinenlehre; Einführung in die Mechanik, Mechanik der Punktsysteme und starren Körper, technische Mechanik, dynamische Aufgaben der Technik, Festigkeitslehre, Hydromechanik, Hydraulik und Gasdynamik, Thermodynamik, technische Wärmelehre, Wärmemotoren, Theorie der mechanischen Meßinstrumente, technisches Zeichnen.

Die beiden Abteilungen des Instituts vereinigen sich im Seminarunterricht. Es werden hier von den Teilnehmern Vorträge gehalten, die ein Thema aus den technischen Wissenschaften behandeln. Dieser Unterricht bildet die Fortsetzung einer Reihe von Seminaren, die F. Klein seit 1899 gehalten hat.[1]) Die Vorträge werden in gemeinsamen Besprechungen vorbereitet und diskutiert. Die technischen Wissenschaften sind reich an Kapiteln, deren volles Verständnis eine tiefe mathematische Bildung erfordert. Der Unterricht setzt sich zum Ziel, die Entwicklung der mathematischen Methoden zu vereinigen mit dem vollen Verständnis der praktischen Probleme in dem Umfang und in der Fassung, wie sie sich dem ausübenden Ingenieur darbieten.

---

1) Die Gegenstände der Kleinschen Seminare waren:

Winter 1899—1900: Theorie des Schiffes. Sommer 1900: Technische Anwendungen der Elastizitätstheorie (zusammen mit Abraham). Winter 1900—1901: Anwendungen der projektiven Geometrie. Sommer 1901: Geodäsie. Winter 1901 bis 1902: Technische Mechanik. Sommer 1902: Elementare Aufgaben der himmlischen Mechanik (zusammen mit Schwarzschild). Winter 1902—1903: Prinzipien der Mechanik (zusammen mit Schwarzschild). Sommer 1903: Graphische Statik mit Festigkeitslehre (zusammen mit Schwarzschild). Winter 1903—1904: Ausgewählte Kapitel der Hydrodynamik (zusammen mit Schwarzschild). Sommer 1904: Wahrscheinlichkeitsrechnung (zusammen mit Brendel, Caratheodory und Schwarzschild). Winter 1904—1905: Elastizitätslehre (zusammen mit Prandtl, Runge und Voigt). Sommer 1905: Elektrotechnik (zusammen mit Prandtl, Runge und Simon). Die Elektrotechnik wurde zusammen mit Simon von Prandtl und Runge im Winter 1905—1906 fortgesetzt. Im Sommer 1906 hielten Prandtl und Runge ein Seminar über graphische Statik, im Winter 1906—1907 über Anwendungen der partiellen Differentialgleichungen (gemeinsam mit M. Abraham). Im Sommer 1907 sollen ausgewählte Probleme der Mechanik zur Behandlung gelangen.

Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation.

Von Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

Erste Abhandlung.

Inhalt.

Einleitung.

Zu der vorliegenden Arbeit gewann ich die äußere Anregung von den 18 kinematischen Modellen zur Verzahnungstheorie, die ich zugleich mit den ihrer Theorie gewidmeten Arbeiten in den Jahren 1899 und 1904 herausgegeben habe.[1]) Schon Herr Klein hat in seiner Vorlesung *„Einleitung in die höhere Geometrie“*[2]) darauf hingewiesen, daß die Konstruktion der Zahnräder in enger Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen steht. Diesen Zusammenhang im einzelnen sowohl analytisch durch Aufstellung der Transformationsformeln wie geometrisch anschaulich zu entwickeln, soll in erster Linie meine Aufgabe sein. Es wird sich zeigen, daß die gewöhnliche Bewegung in der Ebene ein vorzügliches Beispiel für die Veranschaulichung der grundlegenden Sätze ist, die Lie in seiner Theorie der Berührungstransfor-

---

1) Diese Modelle sind im Verlage von Martin Schilling in Halle a./S. erschienen als Serie XXIV Nr. 1—7 und Serie XXXI Nr. 1—11, die Arbeiten dagegen *„Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der zyklischen Kurven“* in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 44, 1899, S. 214—227) und *„Über neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie nebst einer geometrischen Einführung in dieses Gebiet“* ebenda Bd. 51, 1904, S. 1—29 (beide dann auch im Separatabzug bei obigem Modellverlag)

Vgl. auch meinen Hamburger Vortrag: *„Neue kinematische Modelle zur Verzahnungstheorie und ihre Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen“*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XI, S. 267—269 (1902).

2) *Autographiertes Vorlesungsheft,* ausgearbeitet von Fr. Schilling, Bd. I, Leipzig 1893, S. 551—554.

Vgl. auch Lie und Scheffers, *Geometrie der Berührungstransformationen,* Leipzig 1896, S. 66—67.

mationen entwickelt hat, und die in seinen bekannten Theoremen 1 und 2 gipfeln.[1]) Doch ist hierzu nötig, dieses Theorem 1 zunächst in einer allgemeineren Form aufzustellen, als es von Lie selbst geschehen ist, nämlich es auf den Fall auszudehnen, daß *zwei* charakteristische Gleichungen mit einem Parameter t gegeben sind.

Darüber hinaus werden wir noch den Nachweis führen, daß *einerseits* die Savarysche Formel, die ja eine sehr einfache Beziehung zwischen den Krümmungsradien einer Kurve und der Einhüllenden aller ihrer Lagen bei der gegebenen Bewegung in der Ebene darstellt, *andrerseits* die Formel, welche die der Bewegung entsprechende Berührungstransformation zur „erweiterten“ Berührungstransformation (Oskulationstransformation) erhebt, dieselbe Beziehung darstellen. Hiermit ist zugleich ein neuer strenger Beweis der Savaryschen Formel geliefert, und zwar in der allgemeinsten Form, d. h. auch für nicht reelle Krümmungselemente.

Den Schluß der Arbeit bildet die Besprechung der kinematischen Modelle grade im Hinblick auf ihre Beziehung zur Theorie der Berührungstransformationen. Man wird erkennen, daß sie aufs beste geeignet sind, die verschiedenen Sätze für die Grundlegung dieser Theorie in vielseitigster Weise zu veranschaulichen.

§ 1.

Aufstellung der charakteristischen Gleichungen für die Kreisbewegung.

Die kinematische Theorie der ebenen Bewegung baut sich auf dem (von Chasles zuerst aufgestellten) Satze auf:

1. *Jede Bewegung eines ebenen Systems Σ_1 in der festen Ebene Σ läßt sich (von der gewöhnlichen Translation und überhaupt jeder Parallelbewegung abgesehen) dadurch erzeugen, daß auf einer festen Polbahn k eine mit Σ_1 unveränderlich verbundene Polbahn k_1 ohne Gleiten abrollt.*[2])

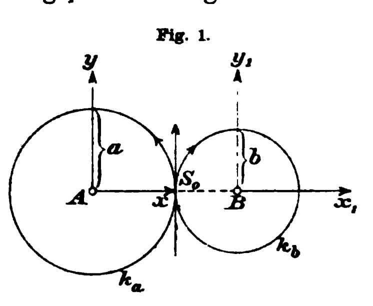
Wir wollen unsre folgende Betrachtung, um zugleich volle Anschaulichkeit zu gewinnen, vorerst an den einfachsten speziellen Fall anlehnen, daß die beiden Polbahnen *sich äußerlich berührende Kreise* k_a und k_b mit den Radien a, b sind; die ebene Bewegung der Systeme Σ, Σ_1 wollen wir demgemäß kurz als *„äußere Kreisbewegung“* bezeichnen (Fig. 1). Wir wissen, bei der Abrollung dieser beiden Polbahnen aufeinander beschreibt jeder Punkt des einen der Systeme Σ und Σ_1 im andern eine verschlungene, gespitzte oder gestreckte Epitrochoide, je

1) Vgl. Lie und Scheffers, l. c. Kap. 1—3, insbesondere S. 54 und 73.

2) *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* Bd. IV, 1. S. 210 (Kinematik von Schoenflies und Grübler).

nachdem der Punkt außerhalb, auf oder innerhalb des Polkreises seines Systems gelegen ist. Die Gleichungen dieser Kurven in den beiden Systemen gilt es zunächst aufzustellen. Wir denken zu dem Zweck in der Anfangslage der beiden Polkreise zueinander die positive Richtung der gemeinsamen Tangente des Berührungspunktes ausgezeichnet — diese positive Richtung möge auf dem Kreise k_a einen positiven[1]), auf k_b also einen negativen Umlaufungssinn ergeben — und in Σ und Σ_1 gleichsinnige rechtwinklige Koordinatensysteme (x, y) und (x_1, y_1) festgelegt, deren Anfangspunkte die Kreismittelpunkte A, B sind und deren positive Ordinatenachsen in der Anfangslage der positiven Tangentenrichtung der Polkreise parallel sind (Fig. 1). Ein beliebiger Punkt des Systems Σ oder Σ_1 sei dann bezw. durch die komplexe Variable $z = x + iy$, $z_1 = x_1 + iy_1$ bezeichnet.

Fig. 1.



Anstatt allein das System Σ_1 sich im System Σ durch Abrollung von k_b auf k_a bewegen zu lassen, kann man auch, da es ja nur auf die relative Lage der beiden Systeme zueinander ankommt, *beide* Systeme bezw. um ihren festen Mittelpunkt A oder B mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten $-\omega$ und ω_1 sich drehen lassen, wobei

$$\omega : \omega_1 = b : a \tag{1}$$

ist. Demgemäß kann die Endlage des Systems Σ_1 im *festgehaltenen* System Σ nach Verlauf der beliebigen Zeit t auch durch zwei Drehungen herbeigeführt werden, nämlich durch die Drehung des Systems Σ_1 um die Anfangslage des Punktes B durch den Winkel $\omega_1 t$ und die darauf folgende Drehung um den Punkt A durch den Winkel ωt. Hiernach nimmt ein gegebener Punkt z_1 des Systems Σ_1 im System Σ nach der ersten Drehung die Lage

$$z^* = (a + b) + z_1 \cdot e^{i\omega_1 t}$$

und nach der zweiten Drehung die Endlage

$$z = z^* \cdot e^{i\omega t}$$

oder

$$z = (a + b)e^{i\omega t} + z_1 e^{i(\omega + \omega_1)t} \tag{2}$$

---

1) *Positiv* sei stets die Drehung oder die Winkelgeschwindigkeit gewählt, die dem Uhrzeigersinne *entgegengesetzt* ist.

ein. Indem wir jetzt t als Variable ansehen, stellt diese Gleichung *die Bahnkurve eines gegebenen Punktes* z_1 *im System* Σ dar. Wenn wir noch nach der Gleichung (1)

$$\omega = b, \quad \omega_1 = a$$

wählen, da ja nur das Verhältnis dieser Größen wesentlich ist, so ergibt die Gleichung (2)

$$z \cdot e^{-ibt} - z_1 e^{iat} = a + b. \tag{3}$$

Diese Gleichung (3) stellt zugleich auch die Bahnkurve eines gegebenen Punktes z im System Σ_1 dar, wenn man in ihr z_1 als abhängige Variable in Beziehung zum Parameter t ansieht. Wenn man die beiden Seiten der Gleichung (3) in die reellen und imaginären Teile zerlegt, so folgt schließlich:

$$\begin{aligned} x\cos bt + y\sin bt - x_1 \cos at + y_1 \sin at - (a+b) &= 0 \\ -x\sin bt + y\cos bt - x_1 \sin at - y_1 \cos at &= 0. \end{aligned} \tag{4a,b}$$

Wir haben so das allgemeine Resultat gewonnen:

2. *Die Bahnkurven, die bei Abrollung der beiden Polkreise aufeinander oder bei der äußeren Kreisbewegung, wie wir kurz sagen wollten, von jedem Punkt* z_1 *im System* Σ *und von jedem Punkt* z *im System* Σ_1 *beschrieben werden, sind durch dieselbe Gleichung* (3) *oder durch die entsprechenden Gleichungen* (4a,b) *mit dem Parameter* t *gegeben, je nachdem man in ihnen* z *und* x, y *als abhängige Variable und* z_1 *und* x_1, y_1 *als Konstante, oder umgekehrt, ansieht.*

§ 2.

Die Verallgemeinerung des Theorems 1 von Lie.

In seiner „*Geometrie der Berührungstransformationen*“[1]) hat Lie die folgenden Sätze aufgestellt:

„*Jede Berührungstransformation in* x, y, y', *die nicht bloß eine erweiterte Punkttransformation ist, ordnet den* ∞^2 *Punkten* (x, y) *der Ebene* ∞^2 *verschiedene Kurven zu, die durch eine Gleichung von der Form*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$$

in den laufenden Koordinaten x_1, y_1 *definiert werden. Umgekehrt definiert jede solche Gleichung*

$$\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0,$$

die ∞^2 *verschiedene Kurven in* x_1, y_1 *darstellt, sobald* x, y *als Parameter betrachtet werden, eine bestimmte Berührungstransformation in der vorhergehenden Weise.*“

1) l. c. Bd. I, Satz (7) und (8), S. 50 und 51.

„Ordnet die Gleichung $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ den ∞^2 Punkten (x, y) ∞^2 voneinander verschiedene Kurven in x_1, y_1 zu, so ordnet sie auch den ∞^2 Punkten (x_1, y_1) ∞^2 voneinander verschiedene Kurven in x, y zu.“

An die Stelle der einen Gleichung $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ sind bei uns die 2 Gleichungen (4a,b) mit dem Parameter t getreten, was an sich keinen Unterschied macht. Wir wissen ferner schon aus unsrer geometrischen Betrachtung, daß in unserm Falle durch die Gleichungen (4a,b) in der Tat den ∞^2 Punkten (x, y) des Systems Σ ∞^2 Kurven im System Σ_1 und umgekehrt den ∞^2 Punkten (x_1, y_1) des Systems Σ_1 ∞^2 Kurven im System Σ zugeordnet werden. Folglich können wir sogleich den Satz aufstellen:

3. *Durch die Gleichungen* (4a,b), *d. h. durch die äußere Kreisbewegung, ist zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine Berührungstransformation festgelegt, „die Berührungstransformation der äußern Kreisbewegung“, wie wir sie kurz nennen wollen.*

Diese Berührungstransformation wollen wir nun in ihrer Eigenart im einzelnen studieren. Sie soll uns eben als Beispiel dienen, um an ihr die allgemeinen Sätze der Berührungstransformationen im Anschluß an die genannte Darstellung von Lie und Scheffers selbst zu veranschaulichen. Der Eigenart der Gleichungen (4a,b) entsprechend werden wir in diesem Paragraphen zunächst zu einer formalen Verallgemeinerung der Lieschen Sätze geführt.

Lies analytische Untersuchung zur Bestimmung aller Berührungstransformationen in der Ebene gipfelt in seinem *Theorem* 1:[1])

„Jede Berührungstransformation der Ebene, die nicht bloß die Erweiterung einer Punkttransformation ist, wird bestimmt durch ein Gleichungssystem von der Form:

$$\text{(5a,b,c)} \qquad \Omega(x, y, x_1, y_1) = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} + p\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial \Omega}{\partial y_1} = 0.$$

Die Gleichung $\Omega = 0$ ist dabei nur der einen Bedingung unterworfen, daß die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Omega}{\partial x} & \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial x_1} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y_1} & \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y \partial y_1} \end{vmatrix}$$

nicht infolge von $\Omega = 0$ verschwinden darf“.[2])

1) l. c. S. 54.

2) Die Determinante dieses Satzes ist, wie Lie l. c. nicht unmittelbar angibt (vgl. Lie und Scheffers S. 52 und 53, insbesondere Satz 10 daselbst), mit dem

Wir werfen die Frage auf, *wie dieses wichtige Theorem sich für die formale Verallgemeinerung ausspricht, daß an Stelle der einen Gleichung $\Omega = 0$ 2 Gleichungen mit einem Parameter t, wie in unserm Beispiel, gegeben sind.* Diese zwei Gleichungen seien allgemein in der Form gegeben:

$$\text{(6a,b)} \qquad \begin{aligned} \Omega_1(x, y, x_1, y_1, t) = 0, \\ \Omega_2(x, y, x_1, y_1, t) = 0. \end{aligned}$$

Besonders interessiert natürlich der Fall, daß diese Gleichungen nicht explicite die Variable t aus ihnen zu eliminieren gestatten, um so unmittelbar die Liesche Gleichung $\Omega = 0$ wiederzugewinnen. Andererseits setzen wir als selbstverständlich voraus, daß die Funktionen Ω_1 und Ω_2 analytische Funktionen ihrer Argumente sind und sich innerhalb der in Betracht zu ziehenden Bereiche regulär verhalten.[1])

Von vornherein werden wir fordern müssen, daß nicht gleichzeitig $\frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \equiv 0$ und $\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \equiv 0$ vermöge der Gleichungen (6a, b) ist (d. h. daß in den Potenzentwicklungen der Funktionen

$$\Omega_1 = \alpha_0 + \alpha_1 (t - t_0) + \alpha_2 (t - t_0)^2 + \cdots$$
$$\Omega_2 = \beta_0 + \beta_1 (t - t_0) + \beta_2 (t - t_0)^2 + \cdots$$

nicht gleichzeitig $\alpha_i \equiv 0$ und $\beta_i \equiv 0$ (für $i = 1, 2 \ldots$) ist vermöge $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$). Denn anderenfalls würden die gegebenen Gleichungen (6a, b) die Variable t überhaupt nicht enthalten, oder aber es würde aus ihnen doch nicht die Variable t sich als Funktion der übrigen ausdrücken

---

Faktor $\frac{\partial \Omega}{\partial y} : \frac{\partial \Omega}{\partial y_1}$ $\left(\text{bezw. } \frac{\partial \Omega}{\partial y_1} : \frac{\partial \Omega}{\partial y}\right)$ multipliziert, die Funktionaldeterminante der 3 Funktionen auf den linken Seiten der Gleichungen (5a, b, c) genommen nach den Variablen x, y, p (bezw. x_1, y_1, p_1). Denn, wenn wir $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = \Omega_x$, $\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x \partial y} = \Omega_{xy}$ usw. setzen, so ist z. B. die erste Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y & 0 \\ \Omega_{xx} + p\,\Omega_{xy} & \Omega_{xy} + p\,\Omega_{yy} & \Omega_y \\ \Omega_{xx_1} + p_1\,\Omega_{xy_1} & \Omega_{yx_1} + p_1\,\Omega_{yy_1} & 0 \end{vmatrix} = -\Omega_y \begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_{xx_1} + p_1\,\Omega_{xy_1} & \Omega_{yx_1} + p_1\,\Omega_{yy_1} \end{vmatrix},$$

oder, da $p_1 = -\frac{\Omega_{x_1}}{\Omega_{y_1}}$ ist,

$$= -\frac{\Omega_y}{\Omega_{y_1}} \begin{vmatrix} \Omega_x & \Omega_y \\ \Omega_{y_1}\Omega_{xx_1} - \Omega_{x_1}\Omega_{xy_1} & \Omega_{y_1}\Omega_{yx_1} - \Omega_{x_1}\Omega_{yy_1} \end{vmatrix} = \frac{\Omega_y}{\Omega_{y_1}} \cdot \Delta .$$

1) Vgl. Lie und Scheffers, l. c. S. 14 oben und S. 44 Anm. 1.

lassen, so daß auf jeden Fall die Einführung der Variablen t zwecklos wäre.[1])

Wir wollen hiernach die *Annahme* machen, was unser Problem nicht spezialisiert, daß auch vermöge $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$

$$\frac{\partial \Omega_2}{\partial t} \not\equiv 0 \tag{7}$$

sei. Dann gestattet die Gleichung (6b), die Variable t als Funktion der übrigen auszudrücken. Betrachtet man demgemäß in der Gleichung (6a) die Variable t als Funktion der übrigen, so kann man nun die Gleichung (6a) der Gleichung (5a) des Theorems 1 entsprechen lassen und aus ihr analog den Gleichungen (5b, c) die folgenden Gleichungen entwickeln:

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}\right) + p\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x_1}\right) + p_1\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \Omega_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y_1}\right) = 0, \tag{9}$$

oder, da nach Gleichung (6b)

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial \Omega_2}{\partial x}}{\frac{\partial \Omega_2}{\partial t}}$$

usf. ist,

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}\right) + p\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial y} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}\right) = 0, \tag{8'}$$

$$\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}\right) + p_1\left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \Omega_2}{\partial t} - \frac{\partial \Omega_2}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \Omega_1}{\partial t}\right) = 0. \tag{9'}$$

Wir wollen nun fernerhin

$$\frac{\partial \Omega_1}{\partial x} = \Omega_1^x, \quad \frac{\partial^2 \Omega_1}{\partial x \partial y} = \Omega_1^{xy}$$

usw. setzen und für die linken Seiten der Gleichungen (8′) und (9′) die Abkürzungen Ω_3 und Ω_4, für die Ausdrücke in den Klammern aber folgende Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned} A &= \Omega_1^x \Omega_2^t - \Omega_2^x \Omega_1^t = \Omega_2^t \frac{d\Omega_1}{dx}, \\ B &= \Omega_1^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_1^t = \Omega_2^t \frac{d\Omega_1}{dy}, \end{aligned} \tag{10a, b}$$

und

$$\begin{aligned} A_1 &= \Omega_1^{x_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{x_1} \Omega_1^t = \Omega_2^t \frac{d\Omega_1}{dx_1}, \\ B_1 &= \Omega_1^{y_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{y_1} \Omega_1^t = \Omega_2^t \frac{d\Omega_1}{dy_1}. \end{aligned} \tag{11a, b}$$

---

1) Hierdurch ist beispielsweise der Fall, daß die Funktion Ω_1 die Variable t nicht enthält und $\Omega_2 = t \cdot \Omega_1$ ist, ausgeschlossen.

Dann lauten die Gleichungen (8′) und (9′) also einfacher:

$$(8'') \qquad \Omega_3 = A + pB = 0,$$

$$(9'') \qquad \Omega_4 = A_1 + p_1 B_1 = 0.$$

In unserm Fall sind demnach an die Stelle der 3 Gleichungen (5a, b, c) die 4 Gleichungen (6a, b), (8″) und (9″) getreten. Auf ihn überträgt sich daher der im Lieschen Theorem 1 ausgesprochene Inhalt zunächst unmittelbar durch folgenden Satz (vgl. Satz 10, S. 52 bei Lie und Scheffers und unsere Anm. 2 S. 285):

4. *Die Gleichungen $\Omega_i = 0$ (für $i = 1, 2, 3, 4$) bestimmen stets dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn die 3 Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_3 = 0$, $\Omega_4 = 0$ ebensowohl nach x, y, p wie nach x_1, y_1, p_1 auflösbar sind, wobei t als Funktion der übrigen Variablen x, y, x_1, y_1 vermöge $\Omega_2 = 0$, $\Omega_2^t \neq 0$ anzusehen ist. Diese Bedingung für die Auflösbarkeit nach x, y, p bezw. x_1, y_1, p_1 wird aber durch das Nichtverschwinden der beiden Funktionaldeterminanten gegeben:*

$$\begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} & \frac{d\Omega_1}{dp} \\ \frac{d\Omega_3}{dx} & \frac{d\Omega_3}{dy} & \frac{d\Omega_3}{dp} \\ \frac{d\Omega_4}{dx} & \frac{d\Omega_4}{dy} & \frac{d\Omega_4}{dp} \end{vmatrix} \quad \textit{und} \quad \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx_1} & \frac{d\Omega_1}{dy_1} & \frac{d\Omega_1}{dp_1} \\ \frac{d\Omega_3}{dx_1} & \frac{d\Omega_3}{dy_1} & \frac{d\Omega_3}{dp_1} \\ \frac{d\Omega_4}{dx_1} & \frac{d\Omega_4}{dy_1} & \frac{d\Omega_4}{dp_1} \end{vmatrix},$$

wo hier wie auch später z. B. $\frac{d\Omega_1}{dx} = \frac{\partial\Omega_1}{\partial x} + \frac{\partial\Omega_1}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}$ *und* $\frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial\Omega_2}{\partial x}}{\frac{\partial\Omega_2}{\partial t}}$ *ist.*

Die erste dieser Funktionaldeterminanten ist nun

$$= \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} & 0 \\ \frac{dA}{dx} + p\frac{dB}{dx} & \frac{dA}{dy} + p\frac{dB}{dy} & B \\ \frac{dA_1}{dx} + p_1\frac{dB_1}{dx} & \frac{dA_1}{dy} + p_1\frac{dB_1}{dy} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -B \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} \\ \frac{dA_1}{dx} + p_1\frac{dB_1}{dx} & \frac{dA_1}{dy} + p_1\frac{dB_1}{dy} \end{vmatrix},$$

oder, da nach den Gleichungen (11a, b) und (9″):

$$\frac{dA_1}{dx} + p_1\frac{dB_1}{dx} = \frac{\Omega_2^t}{\frac{d\Omega_1}{dy_1}}\left(\frac{d\Omega_1}{dy_1}\cdot\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dx_1} - \frac{d\Omega_1}{dx_1}\cdot\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy_1}\right),$$

$$\frac{dA_1}{dy} + p_1\frac{dB_1}{dy} = \frac{\Omega_2^t}{\frac{d\Omega_1}{dy_1}}\left(\frac{d\Omega_1}{dy_1}\cdot\frac{d^2\Omega_1}{dy\,dx_1} - \frac{d\Omega_1}{dx_1}\cdot\frac{d^2\Omega_1}{dy\,dy_1}\right)$$

ist:

$$= -(\Omega_2')^2 \frac{\frac{d\Omega_1}{dy}}{\frac{d\Omega_1}{dy_1}} \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} \\ \frac{d\Omega_1}{dy_1}\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dx_1} - \frac{d\Omega_1}{dx_1}\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy_1} & \frac{d\Omega_1}{dy_1}\frac{d^2\Omega_1}{dy\,dx_1} - \frac{d\Omega_1}{dx_1}\frac{d^2\Omega_1}{dy\,dy_1} \end{vmatrix},$$

also ebenso wie in der Anmerkung 2 S. 285 und 286:

$$= (\Omega_2')^2 \frac{\frac{d\Omega_1}{dy}}{\frac{d\Omega_1}{dy_1}} \begin{vmatrix} 0 & \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} \\ \frac{d\Omega_1}{dx_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dx\,dx_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dy\,dx_1} \\ \frac{d\Omega_1}{dy_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dy\,dy_1} \end{vmatrix} = (\Omega_2')^2 \frac{\frac{d\Omega_1}{dy}}{\frac{d\Omega_1}{dy_1}} \cdot \Delta^*,$$

d. h. es ist schließlich

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} & \frac{d\Omega_1}{dp} \\ \frac{d\Omega_3}{dx} & \frac{d\Omega_3}{dy} & \frac{d\Omega_3}{dp} \\ \frac{d\Omega_4}{dx} & \frac{d\Omega_4}{dy} & \frac{d\Omega_4}{dp} \end{vmatrix} = (\Omega_2')^2 \cdot \frac{B}{B_1} \cdot \Delta^*,$$

wo

$$(13) \qquad \Delta^* = \begin{vmatrix} 0 & \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} \\ \frac{d\Omega_1}{dx_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dx\,dx_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dy\,dx_1} \\ \frac{d\Omega_1}{dy_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dy\,dy_1} \end{vmatrix} \text{ ist.}$$

Analoges ergibt sich für die zweite Funktionaldeterminante, und da Δ^* verschwindet, wenn $\frac{d\Omega_1}{dy} = 0$ oder $\frac{d\Omega_1}{dy_1} = 0$ ist, so ist die Bedingung des Nichtverschwindens beider Funktionaldeterminanten wieder durch die des Nichtverschwindens von Δ^* zu ersetzen. Demnach ergibt sich dem Theorem 1 von Lie analog der Satz:

5. *Die Gleichungen* $\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ *bestimmen stets dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn die Determinante*

$$\Delta^* = \begin{vmatrix} 0 & \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} \\ \frac{d\Omega_1}{dx_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dx\,dx_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dy\,dx_1} \\ \frac{d\Omega_1}{dy_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dx\,dy_1} & \frac{d^2\Omega_1}{dy\,dy_1} \end{vmatrix}$$

nicht infolge von $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, *wo* $\Omega_2' \not\equiv 0$ *ist, verschwindet.*

Doch diese Sätze 4 und 5 können uns nicht befriedigen, da in ihnen, insbesondere in der Form der Determinante Δ^*, die Funktionen Ω_1 und Ω_2 nicht symmetrisch auftreten.[1]) Wir wollen daher an ihre Stelle sogleich einfachere Sätze treten lassen, die diesen Nachteil vermeiden.

Gemäß der Annahme $\Omega_2^t \not\equiv 0$ ist ja aus der Gleichung $\Omega_2 = 0$ die Variable t als Funktion der übrigen x, y, x_1, y_1 auszudrücken. Folglich können wir dem Satze 4 auch die folgende Form geben, wobei wir unsere ursprüngliche Voraussetzung nicht besonders auszudrücken brauchen, daß nämlich nicht gleichzeitig $\Omega_1^t \equiv 0$ und $\Omega_2^t \equiv 0$ sein soll.

6. *Die gegebenen Gleichungen $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ bestimmen stets dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn die 4 Gleichungen $\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ sowohl nach x, y, p, t wie nach x_1, y_1, p_1, t auflösbar sind.*

Nun gilt bezüglich für die beiden Funktionaldeterminanten, da $\Omega_1^p = \Omega_2^p = \Omega_4^p = 0$ ist:

$$(14)\quad \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x, y, p, t)} = \begin{vmatrix} \Omega_1^x & \Omega_1^y & \Omega_1^p & \Omega_1^t \\ \Omega_2^x & \Omega_2^y & \Omega_2^p & \Omega_2^t \\ \Omega_3^x & \Omega_3^y & \Omega_3^p & \Omega_3^t \\ \Omega_4^x & \Omega_4^y & \Omega_4^p & \Omega_4^t \end{vmatrix} = \Omega_3^p \cdot \begin{vmatrix} \Omega_1^x & \Omega_1^y & \Omega_1^t \\ \Omega_2^x & \Omega_2^y & \Omega_2^t \\ \Omega_4^x & \Omega_4^y & \Omega_4^t \end{vmatrix} = B \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)}$$

und

$$(15)\quad \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x_1, y_1, p_1, t)} = \begin{vmatrix} \Omega_1^{x_1} & \Omega_1^{y_1} & \Omega_1^{p_1} & \Omega_1^t \\ \Omega_2^{x_1} & \Omega_2^{y_1} & \Omega_2^{p_1} & \Omega_2^t \\ \Omega_3^{x_1} & \Omega_3^{y_1} & \Omega_3^{p_1} & \Omega_3^t \\ \Omega_4^{x_1} & \Omega_4^{y_1} & \Omega_4^{p_1} & \Omega_4^t \end{vmatrix} = -\Omega_4^{p_1} \cdot \begin{vmatrix} \Omega_1^{x_1} & \Omega_1^{y_1} & \Omega_1^t \\ \Omega_2^{x_1} & \Omega_2^{y_1} & \Omega_2^t \\ \Omega_3^{x_1} & \Omega_3^{y_1} & \Omega_3^t \end{vmatrix} = -B_1 \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)}{\partial(x_1, y_1, t)},$$

d. h.:

7. *Damit die 4 Gleichungen $\Omega_i = 0$ sowohl nach x, y, p, t wie nach x_1, y_1, p_1, t auflösbar sind, ist notwendig und hinreichend, daß die 4 Größen $B, B_1, \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)}, \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)}{\partial(x_1, y_1, t)}$ nicht verschwinden.*

---

1) In extenso geschrieben führen auch die totalen Differentialquotienten in Δ^* zu nicht sehr übersichtlichen und daher für die Anwendung nicht brauchbaren Formeln. Ist doch z. B.

$$\frac{d^2\Omega_1}{dx\,dx_1} = \frac{1}{(\Omega_2^t)^3}\big[(\Omega_2^t)^2(\Omega_1^{xx_1}\Omega_2^t - \Omega_2^{xx_1}\Omega_1^t)$$
$$- \Omega_2^{x_1}\Omega_2^t(\Omega_1^{xt}\Omega_2^t - \Omega_2^{xt}\Omega_1^t) - \Omega_2^x\Omega_2^t(\Omega_1^{x_1t}\Omega_2^t - \Omega_2^{x_1t}\Omega_1^t)$$
$$+ \Omega_2^x\Omega_2^{x_1}(\Omega_1^{tt}\Omega_2^t - \Omega_2^{tt}\Omega_1^t)\big].$$

Die Vergleichung der Funktionaldeterminanten dieses Satzes mit der Determinante $\varDelta^*$ des Satzes 5 wird uns dazu führen, die Bedingungen des letzten Satzes noch zu vereinfachen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} = \frac{1}{(\Omega_2^t)^2} \begin{vmatrix} \Omega_1^x \cdot \Omega_2^t & \Omega_1^y \cdot \Omega_2^t & \Omega_1^t \\ \Omega_2^x \cdot \Omega_2^t & \Omega_2^y \cdot \Omega_2^t & \Omega_2^t \\ \Omega_4^x \cdot \Omega_2^t & \Omega_4^y \cdot \Omega_2^t & \Omega_4^t \end{vmatrix}$$

oder, wenn man die mit Ω_2^x (bez. Ω_2^y) multiplizierten Elemente der dritten Kolonne von der ersten (bez. zweiten) subtrahiert:

$$= \frac{1}{(\Omega_2^t)^2} \begin{vmatrix} \Omega_1^x \Omega_2^t - \Omega_2^x \Omega_1^t & \Omega_1^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_1^t & \Omega_1^t \\ 0 & 0 & \Omega_2^t \\ \Omega_4^x \Omega_2^t - \Omega_2^x \Omega_4^t & \Omega_4^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_4^t & \Omega_4^t \end{vmatrix}$$

$$= - \frac{1}{\Omega_2^t} \begin{vmatrix} \Omega_1^x \Omega_2^t - \Omega_2^x \Omega_1^t & \Omega_1^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_1^t \\ \Omega_4^x \Omega_2^t - \Omega_2^x \Omega_4^t & \Omega_4^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_4^t \end{vmatrix}$$

$$= - \Omega_2^t \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} \\ \frac{d\Omega_4}{dx} & \frac{d\Omega_4}{dy} \end{vmatrix},$$

oder, da ja

$$\frac{d\Omega_1}{dp} = 0, \quad \frac{d\Omega_2}{dp} = B, \quad \frac{d\Omega_4}{dp} = 0$$

ist,

$$= \frac{\Omega_2^t}{B} \cdot \begin{vmatrix} \frac{d\Omega_1}{dx} & \frac{d\Omega_1}{dy} & \frac{d\Omega_1}{dp} \\ \frac{d\Omega_2}{dx} & \frac{d\Omega_2}{dy} & \frac{d\Omega_2}{dp} \\ \frac{d\Omega_4}{dx} & \frac{d\Omega_4}{dy} & \frac{d\Omega_4}{dp} \end{vmatrix}$$

oder nach der Gleichung (12):

$$\text{(16)} \qquad \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} = (\Omega_2^t)^3 \cdot \frac{\varDelta^*}{B_1}.$$

Ebenso ergibt sich

$$\text{(17)} \qquad \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)}{\partial(x_1, y_1, t)} = (\Omega_2^t)^3 \cdot \frac{\varDelta^*}{B}.$$

Weiß man daher, daß $B_1 \not\equiv 0$ und $\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} \not\equiv 0$ ist, so folgt aus Gleichung (16), daß auch $\varDelta^* \not\equiv 0$ ist. Dann aber muß auch $B \not\equiv 0$ sein, da ja für $B \not\equiv 0$ auch $\varDelta^* \equiv 0$ ist. So werden wir zu dem folgenden einfachen Satze geführt, der hier an die Stelle des Theorems 1 von Lie tritt:

8. *Die Gleichungen* $\Omega_1 = 0$ *und* $\Omega_2 = 0$ *bestimmen zusammen mit den aus ihnen abgeleiteten Gleichungen* $\Omega_3 = 0$ *und* $\Omega_4 = 0$ *stets dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn das Produkt* $B_1 \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} = B \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)}{\partial(x_1, y_1, t)}$ *nicht vermöge* $\Omega_i = 0$ *identisch verschwindet.*

Aus den Gleichungen (14) und (15) in Verbindung mit (16) und (17) folgt endlich die später uns noch interessierende Beziehung

$$\frac{\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x, y, p, t)}}{\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x_1, y_1, p_1, t)}} = -\left(\frac{B}{B_1}\right)^2. \tag{18}$$

Zusatz 1. Die ausführliche Ausrechnung des ersten Produkts des Satzes 8 ergibt, wenn wir noch den Gleichungen (10a, b) und (11a, b) die Abkürzungen

$$\begin{aligned} C &= \Omega_1^y \Omega_2^x - \Omega_2^y \Omega_1^x, \\ C_1 &= \Omega_1^{y_1} \Omega_2^{x_1} - \Omega_2^{y_1} \Omega_1^{x_1} \end{aligned} \tag{19a, b}$$

hinzufügen:

$$B_1 \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} = B_1 \cdot \begin{vmatrix} \Omega_1^x & \Omega_1^y & \Omega_1^t \\ \Omega_2^x & \Omega_2^y & \Omega_2^t \\ A_1^x + p_1 B_1^x & A_1^y + p_1 B_1^y & A_1^t + p_1 B_1^t \end{vmatrix}$$

oder, da $p_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ ist:

$$= \begin{vmatrix} \Omega_1^x & \Omega_1^y & \Omega_1^t \\ \Omega_2^x & \Omega_2^y & \Omega_2^t \\ B_1 A_1^x - A_1 B_1^x & B_1 A_1^y - A_1 B_1^y & B_1 A_1^t - A_1 B_1^t \end{vmatrix}$$

$$= -A(B_1 A_1^y - A_1 B_1^y) + B(B_1 A_1^x - A_1 B_1^x) - C(B_1 A_1^t - A_1 B_1^t),$$

oder, da

$$\begin{aligned} B_1 A_1^x - A_1 B_1^x = &- A_1(\Omega_1^{x y_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{x y_1} \Omega_1^t) + B_1(\Omega_1^{x x_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{x x_1} \Omega_1^t) \\ &- C_1(\Omega_1^{x t} \Omega_2^t - \Omega_2^{x t} \Omega_1^t) \end{aligned}$$

ist und analoge Formeln für $(B_1 A_1^y - A_1 B_1^y)$ und $(B_1 A_1^t - A_1 B_1^t)$ gelten, so wird schließlich:

$$B_1 \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} = \tag{20}$$

$$\begin{aligned} &A[A_1(\Omega_1^{y y_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{y y_1} \Omega_1^t) - B_1(\Omega_1^{y x_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{y x_1} \Omega_1^t) + C_1(\Omega_1^{y t} \Omega_2^t - \Omega_2^{y t} \Omega_1^t)] \\ - &B[A_1(\Omega_1^{x y_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{x y_1} \Omega_1^t) - B_1(\Omega_1^{x x_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{x x_1} \Omega_1^t) + C_1(\Omega_1^{x t} \Omega_2^t - \Omega_2^{x t} \Omega_1^t)] \\ + &C[A_1(\Omega_1^{y_1 t} \Omega_2^t - \Omega_2^{y_1 t} \Omega_1^t) - B_1(\Omega_1^{x_1 t} \Omega_2^t - \Omega_2^{x_1 t} \Omega_1^t) + C_1(\Omega_1^{t t} \Omega_2^t - \Omega_2^{t t} \Omega_1^t)]. \end{aligned}$$

Diese neue Form des Produkts enthält dann nur die Funktionen Ω_1, Ω_2 und ihre partiellen ersten und zweiten Ableitungen; sie ist dementsprechend auch *sowohl inbezug auf* Ω_1, Ω_2 *wie auf* (x, y), (x_1, y_1) *symmetrisch gebaut.* Zu demselben Ausdruck würde uns daher auch das zweite Produkt des Satzes 8 geführt haben.

9. *Die in dem Satz 8 genannten einander gleichen Produkte führen in extenso geschrieben zu dem übersichtlichen Ausdruck der Formel (20), der in seinen 18 Gliedern 18 partielle zweite Differentialquotienten der Funktionen* Ω_1 *und* Ω_2 *enthält und dessen Nichtverschwinden daher auch die Form für die Bedingung der Berührungstransformation darstellt.*

Zusatz 2. Durch unsere bisherige Untersuchung ist im Anschluß an die Darstellung von Lie und Scheffers ja der Beweis bereits erbracht, daß wirklich eine *Berührungstransformation* vorliegt, wenn nur die Gleichungen $\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ überhaupt eine Transformation zwischen den Variablen x, y, p und x_1, y_1, p_1 bestimmen, d. h. wenn diese Gleichungen sowohl nach x, y, p, t, wie nach x_1, y_1, p_1, t auflösbar sind. Ich möchte jedoch, um eine unmittelbare Einsicht in diese Verhältnisse zu gewähren, den direkten Beweis (nach Analogie von Lie und Scheffers l. c. S. 52) nachträglich hier noch hinzufügen.

Diesem Beweis liegt die allgemeine Definition der Berührungstransformation zugrunde:

Eine Transformation der Veränderlichen x, y, p:

$$x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p)$$

heißt dann und nur dann eine Berührungstransformation, wenn vermöge der Transformation eine Relation von der Form

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho(x, y, p) \cdot (dy - p dx)$$

besteht. (Lie und Scheffers l. c. S. 44, vgl. auch daselbst Satz 4, S. 45).

Es sei also jetzt vorausgesetzt, daß die Gleichungen $\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ eine Transformation der Variablen (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1) bestimmen gemäß der Bedingung des Satzes 8. Aus $\Omega_1 = 0$ und $\Omega_2 = 0$ folgt nun:

$$\Omega_1^x dx + \Omega_1^y dy + \Omega_1^{x_1} dx_1 + \Omega_1^{y_1} dy_1 + \Omega_1^t dt = 0.$$
$$\Omega_2^x dx + \Omega_2^y dy + \Omega_2^{x_1} dx_1 + \Omega_2^{y_1} dy_1 + \Omega_2^t dt = 0.$$

Unter der Annahme $\Omega_2^t \neq 0$ können wir aus der zweiten dieser Gleichungen den Wert für dt in die erste einsetzen. Es ergibt sich dann:

$$(\Omega_1^x \Omega_2^t - \Omega_2^x \Omega_1^t) dx + (\Omega_1^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_1^t) dy$$
$$+ (\Omega_1^{x_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{x_1} \Omega_1^t) dx_1 + (\Omega_1^{y_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{y_1} \Omega_1^t) dy_1 = 0$$

oder

$$A dx + B dy + A_1 dx_1 + B_1 dy_1 = 0,$$

oder, wenn wir wegen der Gleichungen $\Omega_3 = 0$ und $\Omega_4 = 0$

$$A = -p \cdot B,$$
$$A_1 = -p_1 \cdot B_1$$

setzen:

$$B(dy - p dx) = -B_1(dy_1 - p_1 dx_1),$$

d. h. also

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho(dy - p dx),$$

wo

(21) $$\varrho = -\frac{B}{B_1} \neq 0$$

ist[1]), d. h.

10. *Der Faktor ϱ in der allgemeinen Differentialgleichung einer Berührungstransformation ist in unserm Falle, wo die charakteristischen Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ gegeben sind, gleich* $-\frac{B}{B_1} = -\frac{\Omega_1^y \Omega_2^t - \Omega_2^y \Omega_1^t}{\Omega_1^{y_1} \Omega_2^t - \Omega_2^{y_1} \Omega_1^t}$.

Daß übrigens unsere allgemeinere Form des Theorems 1 auch den von Lie behandelten Fall umfaßt, daß nur *eine* Gleichung $\Omega(x, y, x_1, y_1) = 0$ (ohne den Parameter t) gegeben ist, ersieht man leicht folgendermaßen: Man kann eine solche Gleichung als die Gleichung $\Omega_1 = 0$ wählen und dazu einfach $\Omega_2 = t - \text{const.} = 0$ (oder auch $\Omega_2 = t - f(x, y, x_1, y_1) = 0$) hinzunehmen, wo dann $\Omega_1^t = 0$, $\Omega_2^t = 1$ ist. Für solche zwei Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ gehen dann unsere obigen Sätze und die zugehörigen Formeln unmittelbar in die speziellen von Lie über (z. B. der Ausdruck (20) in den Ausdruck Δ S. 285).

§ 3.

Die Berührungstransformation der äußeren Kreisbewegung als Beispiel für das Theorem 1; Entwicklung ihrer geometrischen Eigenschaften.

Wir wenden uns nun zu unserem Beispiel zurück, wo die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ durch die Formeln S. 284.

(4a, b) $$\Omega_1 = x \cos bt + y \sin bt - x_1 \cos at + y_1 \sin at - (a + b) = 0,$$
$$\Omega_2 = -x \sin bt + y \cos bt - x_1 \sin at - y_1 \cos at = 0$$

---

1) Also ist nach der Gleichung (18) auch

(21a) $$\frac{\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x, y, p, t)}}{\dfrac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x_1, y_1, p_1, t)}} = -\varrho^2.$$

gegeben sind, und wollen dazu übergehen, die allgemeinen Sätze des vorigen Paragraphen an ihm zu veranschaulichen und dann vor allem die geometrischen Eigenschaften unseres Beispiels zu entwickeln.

Indem wir die Gleichungen (4a, b) selbst zur Vereinfachung der folgenden Rechnung benutzen, ergibt sich aus ihnen zunächst:

$$(22\text{a})\quad \Omega_1^t = -xb\sin bt + yb\cos bt + x_1 a\sin at + y_1 a\cos at$$
$$= (a+b)\cdot[x_1\sin at + y_1\cos at] = (a+b)\cdot[-x\sin bt + y\cos bt],$$

$$(22\text{b})\quad \Omega_2^t = -xb\cos bt - yb\sin bt - x_1 a\cos at + y_1 a\sin at$$
$$= (a+b)\cdot[-x_1\cos at + y_1\sin at - b]$$
$$= (a+b)\cdot[-x\cos bt - y\sin bt + a]$$

und

$$(23)\quad \Omega_1^x = \cos bt,\quad \Omega_1^y = \sin bt,\quad \Omega_1^{x_1} = -\cos at,\quad \Omega_1^{y_1} = \sin at,$$
$$\Omega_2^x = -\sin bt,\quad \Omega_2^y = \cos bt,\quad \Omega_2^{x_1} = -\sin at,\quad \Omega_2^{y_1} = -\cos at.$$

Hieraus aber folgt, wenn wir der Einfachheit halber von dem Faktor $(a+b)$ bei den folgenden Größen absehen, nach den Gleichungen (10a, b) und (11a, b) S. 287:

$$(24\text{a})\quad A = -x + a\cos bt,\quad B = -y + a\sin bt \qquad \text{und}\qquad (24\text{b})\quad A_1 = x_1 + b\cos at,\quad B_1 = y_1 - b\sin at,$$

und hierdurch sind dann auch die Gleichungen

$$(25\text{a, b})\qquad \Omega_3 = A + Bp = 0,\qquad \Omega_4 = A_1 + B_1 p_1 = 0$$

bestimmt.

Nach diesen Vorbereitungen ergibt sich nun für das Produkt des Satzes (8):

$$B_1\cdot\frac{\partial(\Omega_1,\Omega_2,\Omega_4)}{\partial(x,y,t)} = B_1\cdot\begin{vmatrix}\Omega_1^x & \Omega_1^y & \Omega_1^t\\ \Omega_2^x & \Omega_2^y & \Omega_2^t\\ \Omega_4^x & \Omega_4^y & \Omega_4^t\end{vmatrix}$$
$$= B_1\cdot\begin{vmatrix}\cos bt & \sin bt & \Omega_1^t\\ -\sin bt & \cos bt & \Omega_2^t\\ 0 & 0 & -ab(\sin at + p_1\cos at)\end{vmatrix}$$

oder, da $p_1 = -\frac{A_1}{B_1}$ ist:

$$= -ab(B_1\sin at - A_1\cos at),$$

d. h.

$$B_1 \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_4)}{\partial(x, y, t)} = ab \cdot (x_1 \cos at - y_1 \sin at + b). \tag{26}$$

Ebenso ergibt sich:

$$B \cdot \frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)}{\partial(x_1, y_1, t)} = ab \cdot (x \cos bt + y \sin bt - a). \tag{26a}$$

Wir sehen also:

a) Ein Blick auf die Formel (4a) bestätigt zunächst die Gleichheit dieser beiden Produkte.[1])

b) Unsere Formeln zeigen unmittelbar, daß diese Produkte nicht identisch vermöge $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ verschwinden (ebensowenig auch Ω_1' und Ω_2' in den Gleichungen (22a, b)); nach dem Satz 8 ist also durch die Gleichungen $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$ eine Berührungstransformation bestimmt (was wir natürlich schon nach Satz 3 S. 285 aus geometrischen Überlegungen wissen).

c) Nach der Formel (21) ist in unserm Beispiel

$$\varrho = \frac{y - a \sin bt}{y_1 - b \sin at} \tag{27}$$

(vgl. auch die Formeln (18) und (21a)).

Unser Beispiel erweist sich daher in der Tat als sehr geeignet, die von uns entwickelten allgemeinen Sätze der Theorie der Berührungstransformationen zu veranschaulichen.

Jetzt gehen wir sogleich dazu über, die geometrischen Eigenschaften unserer „Berührungstransformation der Kreisbewegung“ anschaulich zu entwickeln.

Wir substituieren

$$\begin{aligned} x &= a \cos \lambda + l \cos (\lambda + \mu), \\ y &= a \sin \lambda + l \sin (\lambda + \mu), \\ p &= -\operatorname{cotg} (\lambda + \mu), \end{aligned} \tag{28a, b, c}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= -b \cos \lambda_1 + l_1 \cos (\lambda_1 + \mu_1), \\ y_1 &= -b \sin \lambda_1 + l_1 \sin (\lambda_1 + \mu_1), \\ p_1 &= -\operatorname{cotg} (\lambda_1 + \mu_1). \end{aligned} \tag{29a, b, c}$$

---

1) Auch die direkte Ausrechnung des Ausdruckes auf der rechten Seite der Formel (20) ergibt den oben gefundenen Wert für das Produkt, da $C = C_1 = -1$ ist.

Es ist nun die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(\lambda,\mu,l)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \lambda} & \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial x}{\partial l} \\ \frac{\partial y}{\partial \lambda} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial l} \\ \frac{\partial p}{\partial \lambda} & \frac{\partial p}{\partial \mu} & \frac{\partial p}{\partial l} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a\sin\lambda - l\sin(\lambda+\mu) & -l\sin(\lambda+\mu) & \cos(\lambda+\mu) \\ a\cos\lambda + l\cos(\lambda+\mu) & l\cos(\lambda+\mu) & \sin(\lambda+\mu) \\ \frac{1}{\sin^2(\lambda+\mu)} & \frac{1}{\sin^2(\lambda+\mu)} & 0 \end{vmatrix}$$

oder

(30a) $$\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(\lambda,\mu,l)} = \frac{a\cos\mu}{\sin^2(\lambda+\mu)},$$

ebenso

(30b) $$\frac{\partial(x_1,y_1,p_1)}{\partial(\lambda_1,\mu_1,l_1)} = -\frac{b\cos\mu_1}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)}.$$

Da diese Ausdrücke nicht identisch verschwinden, so stellen die Gleichungen (28a, b, c) und (29a, b, c) bez. eine *Transformation* der Größen x, y, p durch λ, μ, l und der Größen x_1, y_1, p_1 durch λ_1, μ_1, l_1 dar, d. h. diese Gleichungen sind bez. auch nach λ, μ, l und λ_1, μ_1, l_1 auflösbar.

Die zu gegebenen Werten x, y, p gehörigen Werte λ, μ, l, z. B. (die wir gleichsam als neue Koordinaten des Linienelementes (x, y, p) ansehen können) berechnet man bequem nach folgenden aus den Gleichungen (28a, b, c) sich ergebenden Formeln:

(31a, b, c, d)
$$\begin{aligned} \lambda + \mu &= \operatorname{arc\,cotg}(-p), \\ l &= x\cos(\lambda+\mu) + y\sin(\lambda+\mu) \\ &\quad \pm\sqrt{[x\cos(\lambda+\mu)+y\sin(\lambda+\mu)]^2 + (a^2-x^2-y^2)} \\ &= x\cos(\lambda+\mu) + y\sin(\lambda+\mu) \\ &\quad \pm\sqrt{a^2 - [x\sin(\lambda+\mu) - y\cos(\lambda+\mu)]^2}, \\ \cos\lambda &= \frac{x - l\cos(\lambda+\mu)}{a}, \\ \sin\lambda &= \frac{y - l\sin(\lambda+\mu)}{a}. \end{aligned}$$ [1]

1) Man kann auch zunächst λ bestimmen aus der Gleichung

$$x - a\cos\lambda = -p(y - a\sin\lambda),$$

Wir werden sogleich über die eindeutige Auswahl für $\lambda + \mu$ unter den Werten von $\operatorname{arc\,cotg}(-p)$ und entsprechend auch für λ und μ selbst nähere Festsetzungen treffen, und zwar an der Hand der *geometrischen Deutung der Größen* λ, μ, l, zu der wir uns jetzt wenden wollen.

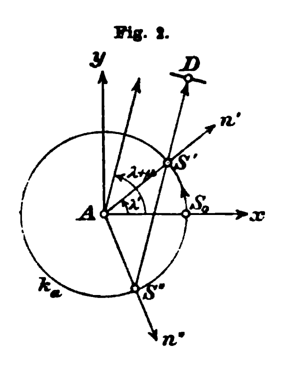


Fig. 2.

Es sei ein beliebiges (*reelles*) Linienelement (x, y, p) im Punkte D des Systems Σ gegeben (Fig. 2).

Unter dem Winkel $\lambda + \mu$ *verstehen wir der Gleichung* (28c) *entsprechend eindeutig den Winkel, durch den man die positive* x*-Achse um den Koordinatenanfangspunkt* O *drehen muß, bis sie zum ersten Male der Normalen des Linienelements parallel wird.* Die durch diesen Winkel $\lambda + \mu$ bestimmte Richtung der Normalen soll dementsprechend auch als ihre positive Richtung gewählt werden. Es gelten also die Ungleichungen

$$0 \leqq \lambda + \mu < \pi, \tag{32}$$

denen entsprechend auch die Gleichung (31a) eindeutig den Winkel $\lambda + \mu$ bestimmt. *Die Größe* $\lambda + \mu$ *ist für reelle Linienelemente stets reell.*[1])

Ferner verstehen wir unter l *der zweiten Gleichung (31) und ihrem doppelten Vorzeichen entsprechend den Wert der Strecken* $\overrightarrow{S'D} = l'$ *oder* $\overrightarrow{S''D} = l''$, *wo* S', S'' *die Schnittpunkte der Normalen mit dem Polkreise* k_a *bedeuten.* Diese Werte l', l'' sind reell oder komplex, je nachdem die Normale des Linienelements den Polkreis reell schneidet oder nicht, d. h. je nachdem

$$|x \sin(\lambda + \mu) - y \cos(\lambda + \mu)| \leqq a \text{ oder } > a$$

---

die für $\operatorname{tg}\frac{\lambda}{2}$ quadratisch ist, und darauf l, μ aus den Gleichungen

$$l^2 = (x - a\cos\lambda)^2 + (y - a\sin\lambda)^2,$$

$$\cos(\lambda + \mu) = \frac{x - a\cos\lambda}{l},$$

$$\sin(\lambda + \mu) = \frac{y - a\sin\lambda}{l},$$

wo das Vorzeichen von l sich durch die Ungleichungen (32) des Textes

$$0 \leqq \lambda + \mu < \pi$$

bestimmt.

1) Für ein Linienelement (x, y, p) mit komplexem Werte p sollen diese Ungleichungen (32) für die reellen Teile $\bar{\lambda} + \bar{\mu}$ der Größen λ, μ gelten. (Die Größe $\lambda + \mu$ kann übrigens auch für nicht reelle Linienelemente reell sein.)

ist. In dem Falle, daß l', l'' reell sind, ist dann l' (bez. l'') positiv oder negativ, je nachdem die Richtung $\overrightarrow{S'D}$ (bez. $\overrightarrow{S''D}$) mit der positiven Richtung der Normalen des Linienelements übereinstimmt oder nicht.

Jedem der Werte l', l'' gehört den Formeln (31c, d) gemäß *ein* bestimmter Wert λ' bez. λ'' zu, indem wir noch die Ungleichungen

$$(33) \qquad -\pi < \bar{\lambda}', \quad \bar{\lambda}'' \leqq \pi$$

hinzunehmen, wo $\bar{\lambda}'$, $\bar{\lambda}''$ die reellen Teile von λ', λ'' bedeuten. Diese Werte λ', λ'' sind reell, wenn l', l'' reell sind, und *jeder von den Werten λ', λ'' bedeutet dann den Winkel, durch den man (in positivem oder negativem Sinne den Ungleichungen (33) entsprechend) die positive x-Achse treffen muß, bis sie zum ersten Male mit der positiven Normalenrichtung im Punkte S' bez. S'' des Polkreises zusammenfällt (Fig. 2), wobei als positive Normalenrichtung diejenige angesehen ist, die zur positiven Tangentenrichtung* (*vgl. S. 283*) *liegt wie die positive x-Achse zur positiven y-Achse.*

Den beiden Werten λ', λ'' entsprechen endlich bez. eindeutig *die beiden Werte μ', μ'' der Größe μ*, deren geometrische Bedeutung aus dem Vorstehenden von selbst sich ergibt. Es gelten stets die Gleichungen:

$$(34) \qquad \lambda' + \mu' = \lambda'' + \mu'' = \lambda + \mu.$$ [1]

11. *Jedem Linienelement* (x, y, p) *entsprechen also zwei (im allgemeinen verschiedene) Wertetripel* (λ', μ', l') *und* (λ'', μ'', l'').

Um noch *die zwischen diesen beiden Wertetripeln bestehenden Beziehungen* abzuleiten, von denen wir sogleich Gebrauch zu machen haben, gehen wir zunächst aus von der Gleichung (31b):

$$l' + l'' = 2x \cos(\lambda + \mu) + 2y \sin(\lambda + \mu).$$

Setzen wir hier nach den Gleichungen (28a, b):

$$x = a \cos \lambda' + l' \cos(\lambda' + \mu'),$$
$$y = a \sin \lambda' + l' \sin(\lambda' + \mu'),$$

so folgt

$$(35) \qquad l'' = l' + 2a \cos \mu'.$$

---

1) Die reellen Teile $\bar{\mu}'$, $\bar{\mu}''$ der Größen μ', μ'' genügen den Ungleichungen

$$-\pi \leqq \bar{\mu}', \ \bar{\mu}'' < 2\pi;$$

denn für jeden Wert $\lambda + \mu$ ergibt sich der höchste mögliche Wert von $\bar{\mu}$, wenn die Größe $\bar{\lambda}$ möglichst klein, und der niedrigste mögliche Wert von μ, wenn $\bar{\lambda}$ möglichst groß (gleich π) ist. Genauer gilt nach den Ungleichungen (32), daß für jeden Wert $\bar{\lambda}$ der Wert $\bar{\mu}$ nur noch beliebig in dem durch folgende Ungleichungen bestimmten Intervall liegen kann:

$$-\bar{\lambda} \leqq \bar{\mu} < \pi - \bar{\lambda}.$$

Ferner ist nach der Gleichung (31c) und der Gleichung (34):

$$\cos\lambda'' = \frac{x - l''\cos(\lambda' + \mu')}{a} = \cos\lambda' - \frac{(l'' - l')\cos(\lambda' + \mu')}{a}$$

oder nach der Gleichung (35):

$$\cos\lambda'' = \cos(\lambda' + 2\mu' - \pi).$$

Ebenso ergibt die Gleichung (31d):

$$\sin\lambda'' = \sin(\lambda' + 2\mu' - \pi).$$

Hieraus aber folgt:

$$\lambda'' = \lambda' + 2\mu' + (2k - 1)\pi \tag{36}$$

und gemäß der Gleichung (34):

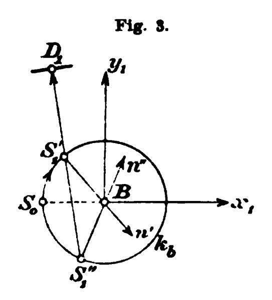
$$\mu'' = -\mu' + (1 - 2k)\pi, \tag{37}$$

wo k eine ganze Zahl ist, die sich durch die Ungleichungen (33) $-\pi < \lambda'' \leqq \pi$ bestimmt.[1])

12. *Zu dem einen Wertetripel λ', μ', l' eines Linienelements* (x, y, p) *findet man also das entsprechende zweite Wertetripel λ'', μ'', l'' nach den Gleichungen* (35), (36), (37).

Die analogen Betrachtungen, wie wir sie hier für die Größen (x, y, p) und (λ, μ, l) durchgeführt haben, gelten natürlich auch für die Größen (x_1, y_1, p_1) und (λ_1, μ_1, l_1). Doch wollen wir ausdrücklich hervorheben, daß die *positive Normalenrichtung eines Punktes des Polkreises k_b stets nach dem Punkt B hin gerichtet ist* im Gegensatz zu dem System Σ, unserer Festsetzung auf S. 283 entsprechend, wonach der Pol gleichzeitig den Kreis k_a in positivem, den Kreis k_b in negativem Sinne umläuft.[2]) (Fig. 3). —

Fig. 3.



Wir stellen uns nun die Aufgabe, *für ein gegebenes (reelles) Linienelement* (x, y, p) *des Systems Σ alle die (reellen) Linienelemente* (x_1, y_1, p_1) *zu finden, die jenem im System Σ_1 durch unsere Berührungstransformation der Kreisbewegung*, d. h. *durch die Gleichungen* $\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, *zugeordnet sind.*

---

1) Es gelten stets die Ungleichungen:

$$-\pi \leqq \lambda' + 2\mu' < 3\pi,$$

und es ist im Texte

$$k = +1, \quad \text{wenn} \quad -\pi \leqq \lambda' + 2\mu' \leqq 0,$$
$$k = \;\;\, 0, \quad \text{wenn} \quad 0 < \lambda' + 2\mu' \leqq 2\pi,$$
$$k = -1, \quad \text{wenn} \quad 2\pi < \lambda' + 2\mu' < 3\pi$$

ist.

2) An die Stelle von λ, μ, l könnte man zur neuen Bestimmung des gegebenen

Von vornherein wissen wir nach Satz (11), daß dem Linienelement (x, y, p) 2 Wertetripel (λ', μ', l') und (λ'', μ'', l'') zugehören. Doch wollen wir diese in der folgenden Rechnung noch zunächst gemeinsam mit (λ, μ, l) bezeichnen. Durch die Substitutionen (28) und (29) nehmen die 4 Gleichungen $\Omega_i = 0$ (die Gleichungen (4a, b) und (25a, b) S. 294 und 295) folgende Form an:

$$\begin{aligned} &a\cos(\lambda - bt) + b\cos(\lambda_1 + at) + l\cos(\lambda + \mu - bt) \\ &\qquad - l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1 + at) = a + b, \\ &a\sin(\lambda - bt) + b\sin(\lambda_1 + at) + l\sin(\lambda + \mu - bt) \\ &\qquad - l_1\sin(\lambda_1 + \mu_1 + at) = 0. \\ &\sin\mu = \sin(\lambda + \mu - bt) \\ &\sin\mu_1 = \sin(\lambda_1 + \mu_1 + at).^{1)} \end{aligned} \tag{38a, b, c, d}$$

Linienelements (x, y, p) auch drei andere Größen Λ, M, L wählen, für welche die den Gleichungen (28a, b, c) ganz gleichen Formeln gelten:

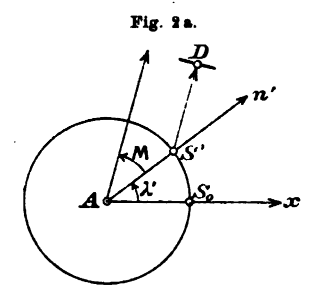
$$\begin{aligned} x &= a\cos\Lambda + L\cos(\Lambda + \mathrm{M}) \\ y &= a\sin\Lambda + L\sin(\Lambda + \mathrm{M}) \\ p &= -\operatorname{cotg}(\Lambda + \mathrm{M}). \end{aligned} \tag{28'a, b, c}$$

Die Größe Λ soll mit λ identisch sein und ist also durch die der Gleichung (31') (Anm. S. 297) analoge Gleichung zweideutig in Rücksicht auf die Ungleichungen (33) bestimmt. Die Definition der Größen M und L sei zunächst geometrisch für den Fall gegeben, daß das Linienelement (x, y, p) reell ist. (Fig. 2a.) Unter M soll dann der (positive oder negative) Winkel M' (bez. M'') verstanden sein, durch den man den Ungleichungen

$$-\frac{\pi}{2} < \mathrm{M} \leqq +\frac{\pi}{2}$$

entsprechend in positivem oder negativem Sinne die durch $\bar{\lambda}'$ (bez. $\bar{\lambda}''$) gegebene Richtung (d. h. für *reelle* Werte λ die positive Normalenrichtung der Polbahn) drehen muß, bis sie zum ersten Male mit der Normalenrichtung des Linienelements zusammenfällt. Die hierdurch bestimmte Normalenrichtung des Linienelements soll dann wieder als die positive gelten und dementsprechend die Größe L auch dem Vorzeichen nach durch $\overrightarrow{S'D}$ (bez. $\overrightarrow{S''D}$) gegeben sein, wo wieder S', S'' die (reellen oder konjugiert-komplexen) Schnittpunkte mit dem Polkreis bedeuten (vgl. das Beispiel der Figur). Die eindeutige Definition der Größen M und L durch die analytischen Formeln auch für nicht reelle Linienelemente ergibt sich dann hieraus von selbst. Doch schien mir die Einführung der Größen λ, μ, l des Textes für die ganze Untersuchung übersichtlicher, da dann bei einem reellen Linienelement auch für nicht reelle Punkte S', S'' noch immer die Größe $\lambda + \mu$ anschaulich gegeben ist.

Fig. 2a.



1) Bei der Ableitung der letzten beiden Gleichungen ist beiderseits mit $\sin(\lambda + \mu)$ bez. $\sin(\lambda_1 + \mu_1)$ multipliziert; wir können diese Faktoren von 0 ver-

Aus den letzten beiden Gleichungen folgen je die beiden Möglichkeiten:

(39a, b) $bt = \lambda + 2n\pi$ und $bt = \lambda + 2\mu + (2n - 1)\pi$,

(40a, b) $at = -\lambda_1 - 2n_1\pi$ und $at = -\lambda_1 - 2\mu_1 - (2n_1 - 1)\pi$,

wo n, n_1 beliebige (positive oder negative) ganze Zahlen bedeuten.

Man sieht nun, im Hinblick auf die Gleichung (36) und ihre analoge

$$\lambda' = \lambda'' + 2\mu'' + (2k - 1)\pi,$$

daß die Gleichungen (39a, b) — mögen bei gegebenen Werten (x, y, p) für (λ, μ, l) von vornherein die Werte (λ', μ', l') *oder* (λ'', μ'', l'') gewählt sein — stets in die beiden folgenden übergehen:

(39'a, b) $bt = \lambda' + 2n\pi$ und $bt = \lambda'' + 2n\pi$,

d. h.

(39''a, b) $t = \frac{\lambda' + 2n\pi}{b}$ und $= \frac{\lambda'' + 2n\pi}{b}$.

Für gegebene Werte (x, y, p) hat also die Variable t alle die verschiedenen Werte, welche durch diese Gleichungen angegeben sind, wo n eine beliebige ganze Zahl und λ', λ'' die beiden zu (x, y, p) gehörenden Werte bezeichnen.

Wir setzen nun die Werte für t in die Gleichungen (40a, b) ein und wollen der Substitution (39''a) bez. (39''b) entsprechend die Größe λ_1 in der Gleichung (40a) mit λ_1' bez. λ_1'', in der Gleichung (40b) mit λ_1'' bez. λ_1' bezeichnen, was offenbar erlaubt ist. Dann werden wir wieder im Hinblick auf die der Gleichung (36) analogen Gleichungen $[\lambda_1'' = \lambda_1' + 2\mu_1' + (2k - 1)\pi$ und $\lambda_1' = \lambda_1'' + 2\mu_1'' + (2k - 1)\pi]$ zu den folgenden Resultaten[1]) geführt:

---

schieden voraussetzen, da dies im anderen Fall sich wieder durch Änderung des Koordinatensystems erreichen ließe.

1) An sich würde z. B., wie wir doch noch ausdrücklich bemerken wollen, dem Tripel λ', μ', l' *außer* dem Tripel λ_1', μ_1', l_1' das sich aus den Gleichungen (41a) und (45a, b) oder (47a, b, c) für jeden bestimmten Wert n ergibt, auch noch das Tripel (vgl. Satz 12)

$$\lambda_1'' = \lambda_1' + 2\mu_1' + (2k - 1)\pi,$$
$$\mu_1'' = -\mu_1' + (1 - 2k)\pi,$$
$$l_1'' = l_1' - 2b\cos\mu_1'$$

entsprechen. In der Tat überzeugt man sich leicht, daß auch diese beiden Wertetripel (λ', μ', l') und $(\lambda_1'', \mu_1'', l_1'')$ die Gleichungen (38a, b, c, d) befriedigen. Doch da diese Werte $(\lambda_1'', \mu_1'', l_1'')$ zu demselben Linienelement (x_1, y_1, p_1), auf das es uns doch allein ankommt, führen wie die Werte $(\lambda_1', \mu_1', l_1')$, können wir sie sogleich außer acht lassen und demgemäß die Rechnung des Textes vereinfachen, wie es geschehen ist.

(41a, b)
$$\lambda_1' = -\frac{a}{b}(\lambda' + 2n\pi) - 2n_1\pi,$$
$$\lambda_1'' = -\frac{a}{b}(\lambda'' + 2n\pi) - 2n_1\pi,$$

wo für jede ganze Zahl n in jeder dieser Formeln für sich diejenige ganze Zahl n_1 zu wählen ist, daß entsprechend (33) die Ungleichungen

(42)
$$-\pi < \bar{\lambda}_1', \quad \bar{\lambda}_1'' \leqq \pi$$

erfüllt sind.

Unseren Festsetzungen entsprechend gelten also jetzt gleichzeitig die beiden Formeln:

(43a, b)
$$\lambda' = bt - 2n\pi,$$
$$\lambda_1' = -at - 2n_1\pi$$

oder

(44a, b)
$$\lambda'' = bt - 2n\pi,$$
$$\lambda_1'' = -at - 2n_1\pi.$$

Setzen wir nun in die Gleichungen (38a, b) für λ und λ_1 ihre Werte nach den Formeln (43a, b) ein, so kommt

$$l' \cos\mu' - l_1' \cos\mu_1' = 0$$

und

$$l' \sin\mu' - l_1' \sin\mu_1' = 0.$$

Hieraus folgt zunächst formal:

(45a, b)
$$\mu_1' = \mu' + m\pi,$$
$$l_1' = (-1)^m \cdot l',$$

wo m eine beliebige ganze Zahl sein kann. Durch die zu erfüllenden Ungleichungen

(46)
$$0 \leqq \bar{\lambda}_1' + \bar{\mu}_1' < \pi$$

(vgl. (32) und die zugehörige Anm. S. 298) ist jedoch diese ganze Zahl m *eindeutig* bestimmt. Analog verläuft die Rechnung, wenn wir in die Gleichungen (38a, b) für λ und λ_1 ihre Werte nach den Formeln (44a, b) einsetzen. Wir gewinnen daher zusammenfassend als Endresultat den Satz:

13. *Die Berührungstransformation der äußeren Kreisbewegung ist analytisch durch die Gleichungen* (28a, b, c), (29a, b, c) S. 296 *und*

(47a, b, c)
$$\lambda_1 = -\frac{a}{b}(\lambda + 2n\pi) - 2n_1\pi$$
$$\mu_1 = \mu + m\pi$$
$$l_1 = (-1)^m l$$

bestimmt, wo für (λ, μ, l) *sowohl* (λ', μ', l') *wie* (λ'', μ'', l'') *zu setzen ist, ferner* n *eine beliebige (positive oder negative) ganze Zahl bedeutet und jedesmal für* n_1, m *solche ganzen Zahlen zu setzen sind, daß die Ungleichungen*

$$(42) \qquad -\pi < \bar{\lambda}_1 \leqq \pi$$

$$(32) \qquad 0 \leqq \bar{\lambda}_1 + \bar{\mu}_1 < \pi$$

erfüllt sind.

13a. *Alle einem gegebenen Linienelement* (x, y, p) *des Systems* Σ *entsprechenden Linienelemente* (x_1, y_1, p_1) *des Systems* Σ_1 *gewinnt man daher wie folgt:*

Man bestimmt zunächst nach dem Satze (11) S. 299 *und den Formeln* (31a, b, c, d) S. 297 *die beiden zu* (x, y, p) *gehörenden Wertetripel* (λ', μ', l') *und* (λ'', μ'', l'') *und berechnet dann die verschiedenen Werte* λ_1, μ_1, l_1 *nach den Formeln* (47a, b, c). *Endlich setzt man die so gefundenen Werte* λ_1, μ_1, l_1 *in die Formeln* (29a, b, c) S. 296 *ein.*

In Rücksicht darauf, daß in den Formeln (29a, b, c) indes nur die trigonometrischen Funktionen der Winkel λ_1 und μ_1 vorkommen, können wir schließlich diesen Satz 13a noch einfacher aussprechen in der folgenden Form:

13b. *Bei der Berührungstransformation der äußeren Kreisbewegung erhält man alle dem Linienelement* (x, y, p) *des Systems* Σ *entsprechenden Linienelemente* (x_1, y_1, p_1) *des Systems* Σ_1 *wie folgt:*

Nachdem man die beiden zu (x, y, p) *gehörenden Wertetripel* (λ', μ', l') *und* (λ'', μ'', l'') *nach den Formeln (31a, b, c, d) bestimmt hat, setzt man in die Gleichungen*

$$(29\text{a, b, c}) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -b\cos\lambda_1 + l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1) \\ y_1 &= -b\sin\lambda_1 + l_1\sin(\lambda_1 + \mu_1) \\ p_1 &= -\operatorname{cotg}(\lambda_1 + \mu_1) \end{aligned}$$

an die Stelle von λ_1, μ_1, l_1 *gemäß den Formeln* (47a, b, c) *bez. die (ihnen nicht gleichen) Größen* $-\frac{a}{b}(\lambda + 2n\pi)$, μ, l *ein, wählt dann für* λ, μ, l *sowohl* λ' μ', l' *wie* λ'', μ'', l'' *und nimmt*

$n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots \pm \infty$ *für ein irrationales Verhältnis* $a : b$, *bez.* $n = 0, 1, 2 \ldots \beta - 1$ *für ein rationales Verhältnis* $a : b = \alpha : \beta$, *wo* α *und* β *teilerfremde positive ganze Zahlen sind.*

Analog bestimmen sich natürlich für jedes Linienelement (x_1, y_1, p_1) alle entsprechenden Linienelemente (x, y, p).

13c. *Je nachdem* $a : b$ *irrational oder rational gleich* $\alpha : \beta$ *ist, entsprechen also jedem gegebenen Linienelement des Systems* Σ *(bez.* Σ_1*)*

allgemein im andern System ∞ viele oder 2β (bez. 2α) Linienelemente, (die jedoch in dem speziellen Fall zu je zweien zusammenfallen, wenn die Normale des gegebenen Linienelementes seinen Polkreis berührt).

Auf den Fall des rationalen Verhältnisses $a : b$ werden wir sogleich noch näher eingehen. Vorerst wollen wir jedoch *das gefundene analytische Resultat anschaulich geometrisch diskutieren*, soweit *reelle* Linienelemente in Betracht kommen.

Gemäß den Formeln (28c) und (29c) S. 296 (vgl. S. 298) entspricht einem *reellen* Linienelement (x, y, p) oder (x_1, y_1, p_1) stets ein *reeller* Wert $\lambda + \mu$ oder $\lambda_1 + \mu_1$. Aus den Formeln (47a, b) folgt aber

$$\lambda_1 + \mu_1 = (\lambda + \mu) - \lambda\left(\frac{a}{b} + 1\right) - \left(\frac{a}{b} \cdot 2n + 2n_1 + m\right)\pi.$$

Dem *reellen* Linienelement (x, y, p) entspricht also nur dann wieder ein *reelles* Linienelement (x_1, y_1, p_1), wenn λ (d. h. λ', λ'') reell ist. Da ferner, wenn bei einem *reellen* Linienelement (x, y, p) λ reell ist, auch alle nach dem Satze (13) entsprechenden Größen (λ_1, μ_1, l_1) und damit alle entsprechenden Linienelemente (x_1, y_1, p_1) reell sind, so ergibt sich:

14. *Stets dann und nur dann entsprechen einem reellen Linienelement (x, y, p) wieder reelle Linienelemente (x_1, y_1, p_1), wenn λ reell ist, d. h. wenn (vgl. S. 299) die Normale des Linienelements (x, y, p) den Polkreis k_a reell schneidet (oder berührt), und zwar sind dann auch alle entsprechenden Linienelemente (x_1, y_1, p_1) reell.*

Fig. 4.

14a. *Betrachten wir alle Linienelemente desselben Trägers (x, y) (einen „Punktelementenverein"), so entsprechen also ihnen allen nur dann wieder reelle Linienelemente, wenn der Punkt (x, y) innerhalb oder auf dem Polkreise k_a liegt, im andern Fall dagegen nur der Gesamtheit von ihnen, deren Normalen den Polkreis reell treffen.* (Fig. 4.)

Ferner ergibt die Gleichung (47a):

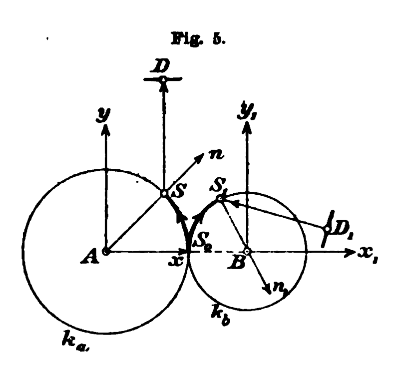
$$b(\lambda_1 + 2n_1\pi) = -a(\lambda + 2n\pi);$$

hieraus und aus den Gleichungen (47b, c) folgt, wenn wir dem Satze (13) gemäß für n und damit für n_1, m spezielle zulässige Werte gewählt denken:

15. *Das einzelne reelle Linienelement (x_1, y_1, p_1), das einem gegebenen reellen Linienelement (x, y, p) für einen bestimmten Wert von n entspricht, kommt gerade dann mit letzterem zur Deckung, wenn von den beiden Polkreisen k_a und k_b die gleichen Bogen $a(\lambda + 2n\pi)$ und $-b(\lambda_1 + 2n_1\pi)$ aufeinander abgerollt sind* (Fig. 5). In diesem Moment

gehen also die zusammengefallenen Normalen der beiden Linienelemente (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1) durch den Berührungspunkt der Polkreise, den momentanen Pol der Bewegung. Und der Polkreis k_a ist dann von der ursprünglich angenommenen Anfangslage aus gerechnet,

Fig. 5.



wenn $\lambda > 0$ ist, n- oder $(n-1)$-mal, je nachdem $n \geqq 0$ oder $n < 0$ ist,
wenn $\lambda = 0$ ist, stets n-mal,
wenn $\lambda < 0$ ist, n- oder $(n-1)$-mal, je nachdem $n \leqq 0$ oder > 0 ist,

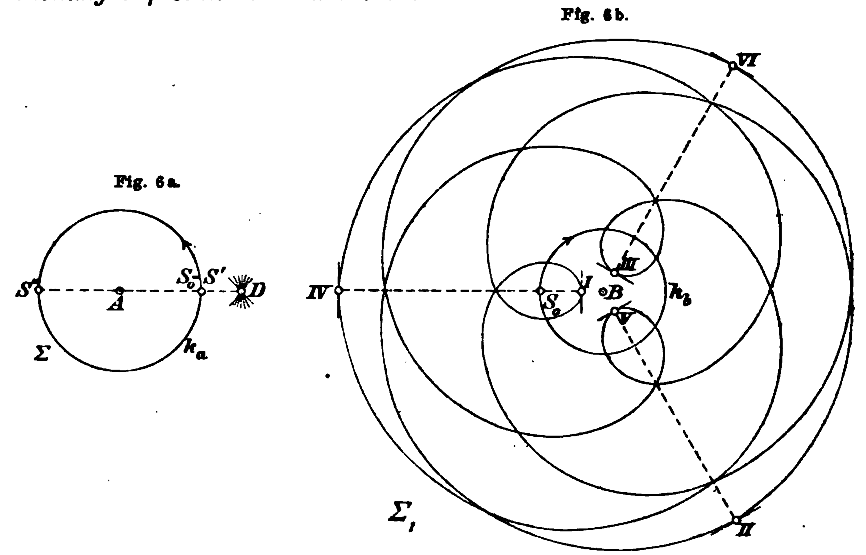
(entsprechend in positivem oder negativem Sinne) vollständig abgerollt außer dem eine volle Peripherie nicht mehr ausmachenden Restbogen. Entsprechendes gilt für den Polkreis k_b. (Fig. 5; in ihr ist speziell $a : b = 4 : 3$, $n = 0$, $\lambda = \frac{\pi}{4}$, $\mu = \frac{\pi}{4}$, $l = 1{,}5$ cm gewählt, woraus sich

$n_1 = 0$, $m = 1$, $\lambda_1 = -\frac{\pi}{3}$, $\mu_1 = \frac{5}{4}\pi$, $l_1 = -l = -1{,}5$ cm ergibt).

Der Satz 14a aber wird durch folgenden Satz fortgeführt:

16. *Bei der Bewegung der beiden Systeme Σ, Σ_1 „rollen" gleichsam die Linienelemente (x, y, p) desselben Trägers $D = (x, y)$ unter dessen Gleitung auf seiner Bahnkurve ab.*

Fig. 6a. Fig. 6b.



Die Figuren 6ab mit dem Radienverhältnis $a : b = 4 : 3$ zeigen die durch einen Punkt D gehenden Linienelemente des Systems Σ und die

ihnen entsprechende Bahnkurve, eine verschlungene Epitrochoide, im System Σ_1; in der Anfangslage sind beide Figuren so auf einander zu legen, daß die Polkreise sich in S_0 wie in Fig. 1 S. 283 berühren.

Alle diese Betrachtungen führen schließlich zu dem Gesamtresultat:

17. *Um geometrisch* alle reellen *Linienelemente* (x_1, y_1, p_1) *im Systeme* Σ_1 *zu erhalten (Fig. 6a, b), die einem gegebenen reellen Linienelemente* (x, y, p) *des Systems* Σ *entsprechen, hat man zunächst die Schnittpunkte* S', S'' *der Normalen des Linienelements* (x, y, p) *mit dem Polkreis* k_a *zu konstruieren, die reell sein müssen, wenn überhaupt sich wieder* reelle *Linienelemente* (x_1, y_1, p_1) *ergeben sollen; darauf hat der Polkreis* k_a, *wenn das Radienverhältnis* $\frac{a}{b}$ *irrational ist, im einen wie im andern Sinn auf dem Polkreis* k_b *unendlich oft, dagegen, wenn* $\frac{a}{b}$ *rational und gleich* $\frac{\alpha}{\beta}$ *ist, wo* α *und* β *teilerfremde positive ganze Zahlen sind, nur in einem Sinne* β*-mal abzurollen. Jedesmal, wenn hierbei* S' *oder* S'' *auf den Polkreis* k_b *fällt, ergibt die Lage des Linienelements* (x, y, p) *im System* Σ_1 *ein zugehöriges Linienelement* (x_1, y_1, p_1) *an. (Vgl. die Sätze 13a, b, c S. 304).*

In der Figur 6b sind demgemäß, mit den Ziffern I—VI bezeichnet, die 6 Linienelemente besonders hervorgehoben, welche in Fig. 6a dem Linienelement in D mit der Normalen AD entsprechen.

Um nun im Falle eines rationalen Verhältnisses $a : b = \alpha : \beta$ den algebraischen Charakter der Berührungstransformation noch klarer zum Ausdruck zu bringen, wollen wir folgende neuen Größen einführen:

$$(48)\qquad u = l\cos\mu,\quad v = l\sin\mu,\quad w = \operatorname{tg}\frac{\lambda}{2},\qquad\qquad (49)\qquad u_1 = l_1\cos\mu_1,\quad v_1 = l_1\sin\mu_1,\quad w_1 = \operatorname{tg}\frac{\lambda_1}{2}.$$

Durch diese Substitutionen gehen die Gleichungen (28a, b, c) und (29a, b, c) S. 296 über in

$$(28'\text{a, b, c})\qquad x = \frac{a(1-w^2)+u(1-w^2)-2vw}{1+w^2},\quad y = \frac{2aw+v(1-w^2)+2uw}{1+w^2},\quad p = -\frac{u(1-w^2)-2vw}{v(1-w^2)+2uw}$$

und

$$x_1 = \frac{-b(1-w_1^2)+u_1(1-w_1^2)-2u_1w_1}{1+w_1^2},$$

(29′a, b, c)
$$y_1 = \frac{-2bw_1+v_1(1-w_1^2)+2u_1w_1}{1+w_1^2},$$

$$p_1 = \frac{u_1(1-w_1^2)-2v_1w_1}{v_1(1-w_1^2)+2u_1w_1}.$$

Die Auflösung der Gleichungen (28′a, b, c) nach den Größen u, v, w gelingt dann am einfachsten, wenn man zunächst aus der sich aus jenen ergebenden Gleichung (vgl. die Anm. S. 297)

$$x(1+w^2)-a(1-w^2) = -p(y(1+w^2)-2aw)$$

die beiden Werte w', w'' berechnet und dann nach den Gleichungen (28′a, b) die zugehörigen Werte u', u'' und v', v''. Es wird also

$$w = \frac{ap \pm \sqrt{a^2p^2+(a-x-py)(a+x+py)}}{a+x+py}$$

(50)
$$= \frac{ap \pm \sqrt{(a^2-x^2)+p^2(a^2-y^2)-2pxy}}{a+x+py},$$

$$u = \frac{-a(1+w^2)+x(1-w^2)+2yw}{1+w^2},$$

$$v = \frac{-2xw+y(1-w^2)}{1+w^2}.$$

Die Gleichungen (47b, c) S. 303 endlich ergeben durch die Substitutionen (48) und (49):

(51a, b)
$$u_1 = u,$$
$$v_1 = v,$$

und die Gleichungen (47a), (43a, b) und (44a, b) S. 303, wenn man noch

$a = \alpha \cdot \varkappa$, $b = \beta \cdot \varkappa$, $\operatorname{tg}\frac{\varkappa t}{2} = \tau$ setzt:

$$w = \operatorname{tg}\frac{bt}{2} = \operatorname{tg}\left(\beta \cdot \frac{\varkappa t}{2}\right),$$

$$w_1 = -\operatorname{tg}\frac{at}{2} = -\operatorname{tg}\left(\alpha \cdot \frac{\varkappa t}{2}\right)$$

oder

(52a, b)
$$w = F_\beta(\tau),$$
$$w_1 = F_\alpha(\tau),$$

wo dann die Funktionen F_β und F_α rationale gebrochene Funktionen spezieller Bauart vom Grade β und α sind. Für $a:b = 4:3$ ist z. B.:

(52′a, b)
$$w = \frac{3\tau - \tau^3}{1 - 3\tau^2},$$
$$w_1 = -\frac{4\tau - 4\tau^3}{1 - 6\tau^2 + \tau^4}.$$

Wir erhalten demgemäß analog den Sätzen (13a, b, c) S. 304 das folgende Schlußergebnis, bei dem es sich, wie man unmittelbar erkennt, nur um die Auflösung *rationaler* Gleichungen handelt:

18. *Ist $a:b$ rational, so gewinnt man alle einem gegebenen Linienelement (x, y, p) entsprechenden Linienelemente (x_1, y_1, p_1) wie folgt: Man bestimmt zunächst nach den Formeln* (50) *die zu (x, y, p) gehörenden Wertetripel (u', v', w') und (u'', v'', w'') und berechnet darauf nach der Formel* (52a) *die zu w', w'' gehörenden 2β Werte τ_n', τ_n''* $(n = 0, 1, 2, \ldots, \beta - 1)$.[1] *Die Formeln* (51a, b) *und* (52b) *ergeben dann die entsprechenden 2β Wertetripel (u_1, v_1, w_1) und die Gleichungen* (29′a, b, c) *endlich aus ihnen die gesuchten 2β Linienelemente (x_1, y_1, p_1).*

§ 4.

Die Berührungstransformation der Kreisbewegung in Beziehung zum Theorem 2 von Lie.

Das dritte Kapitel in Lie und Scheffers Geometrie der Berührungstransformationen gruppiert sich um das Theorem 2 (S. 73 daselbst):

Die Gleichungen

(53a, b, c) $\quad x_1 = X(x, y, p), \quad y_1 = Y(x, y, p), \quad p_1 = P(x, y, p)$

stellen dann und nur dann eine Berührungstransformation dar, wenn

(54a, b, c) $\quad [XY] \equiv 0, \quad [PX] \equiv \varrho, \quad [PY] \equiv \varrho P$

ist, wobei ϱ irgend eine von Null verschiedene Funktion von (x, y, p) sein darf. Insbesondere ist dann

(55) $$dY - P\,dX \equiv \varrho(dy - p\,dx).$$

Dem Vorworte getreu, unsere Berührungstransformation der Kreisbewegung überhaupt als ein Beispiel für die allgemeine Theorie hinzustellen, wollen wir jene jetzt auch hinsichtlich dieses zweiten Theorems näher diskutieren. Dies wird wesentlich darauf hinauskommen, die drei Klammerausdrücke $[XY]$, $[PX]$, $[PY]$ in unserm Falle wirklich auszurechnen.

---

1) nämlich $\tau_n = \operatorname{tg}\frac{bt}{2\beta} = \operatorname{tg}\frac{\lambda + 2n\pi}{2\beta}$ für $n = 0, 1, 2, \ldots, \beta - 1$.

An die Stelle der Gleichungen (53) sind jetzt die Gleichungen (28a, b, c), (29a, b, c) S. 296 und (47a, b, c) S. 303 getreten, d. h. die Größen x_1, y_1, p_1 sind hier nicht explicite als Funktionen von x, y, p gegeben, sondern mit Hilfe der aufeinander bezogenen Parameter λ, μ, l und λ_1, μ_1, l_1, was ja an sich keinen wesentlichen Unterschied ausmacht. Wir haben ferner jetzt die Berührungstransformation nicht mehr in ihrem ganzen Verlaufe, sondern nur in der Umgebung zweier entsprechender Linienelemente (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1) zu betrachten, d. h. den Zahlen n, n_1, und m der Gleichungen (47a, b, c) können wir ganz bestimmte Werte beigelegt denken. Wir wollen insbesondere, was bei zweckmäßiger Wahl der (x, y)- und (x_1, y_1)-Koordinatensysteme immer möglich ist[1]),

$$n = n_1 = m = 0$$

wählen; der Allgemeinheit unserer folgenden Betrachtung tut dies keinen Abbruch. Dann treten an die Stelle der Gleichungen (47a, b, c) die einfacheren

$$\text{(47'a, b, c)} \qquad \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{a}{b}\lambda, \\ \mu_1 &= \mu, \\ l_1 &= l. \end{aligned}$$

Wir haben den Faktor ϱ in der Identität (55) bereits oben in der Formel (27) S. 296 ausgerechnet:

$$\text{(27)} \qquad \varrho = \frac{y - a \sin bt}{y_1 - b \sin at}.$$

Setzen wir noch nach den Gleichungen (43) und (44) S. 303

$$\sin at = -\sin \lambda_1, \qquad \sin bt = \sin \lambda$$

und führen für y, y_1 ihre Werte nach den Gleichungen (28b), (29b) S. 296 ein, so folgt

$$\text{(56)} \qquad \varrho = \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin(\lambda_1 + \mu_1)}.\,^{2)}$$

Dieser Wert für ϱ muß sich nun auch aus den obigen Gleichungen (54a, b, c) ergeben.

Schon die symmetrische Form, welche die Gleichungen (53) in unserm Falle annehmen, zeigt nun unmittelbar — was wir natürlich längst von früher her wissen —, daß ebenso wie x_1, y_1, p_1 *Funktionen* von x, y, p sind, auch umgekehrt x, y, p *Funktionen* von x_1, y_1, p_1

1) Denn in der Umgebung von $\bar{\lambda} = 0$ ist für $n = 0$ auch $n_1 = m = 0$.

2) Für allgemeine Werte n, n_1 und m ergibt sich entsprechend

$$\varrho = (-1)^m \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin(\lambda_1 + \mu_1)}.$$

sind, d. h. daß wir in unsern Gleichungen es wirklich mit einer *Transformation* zu tun haben. Im übrigen gilt für die Funktionaldeterminante der Funktionen x_1, y_1, p_1 nach x, y, p:

$$\frac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(x, y, p)} = \frac{\frac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(\lambda_1, \mu_1, l_1)} \cdot \frac{\partial(\lambda_1, \mu_1, l_1)}{\partial(\lambda, \mu, l)}}{\frac{\partial(x, y, p)}{\partial(\lambda, \mu, l)}}.$$

Nun gelten die Gleichungen (30a, b) S. 297, und es ist ferner

$$\frac{\partial(\lambda_1, \mu_1, l_1)}{\partial(\lambda, \mu, l)} = -\frac{a}{b},$$

folglich ist

$$\frac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(x, y, p)} = \frac{\sin^2(\lambda + \mu)}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)} = \varrho^2. \tag{57}$$

Dieses Resultat veranschaulicht in unserm Beispiel den allgemeingültigen (von Lie und Scheffers nicht erwähnten) Satz:

19. *Bei jeder durch die Gleichungen (53) gegebenen Berührungstransformation gilt, daß die Funktionaldeterminante*

$$\frac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(x, y, p)} = \varrho^2$$

ist, wo ϱ den charakteristischen Faktor der Berührungstransformation bedeutet[1]).

1) Wir wollen zugleich auch noch auf die folgende allgemeingültige Beziehung hinweisen:

$$\frac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(x, y, p)} = -\frac{\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x, y, p, t)}}{\frac{\partial(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4)}{\partial(x_1, y_1, p_1, t)}}, \tag{57a}$$

die hier unmittelbar aus der Gleichung (21a) in der Anm. S. 294 folgt (vgl. auch die Formeln (14), (15) S. 290 und (21), (26), (26a) S. 294 und 296 für unser Beispiel). Diese Formel (57a) ergibt sich auch aus dem Satze der Determinantentheorie (Baltzer, *Theorie und Anwendung der Determinanten*, 5. Aufl. Leipzig 1881, S. 146, § 12,5):

Wenn $n > m$ und zufolge von n Gleichungen

$$F_1(y_1 \ldots y_n, x_1 \ldots x_m) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(y_1 \ldots y_n, x_1 \ldots x_m) = 0$$

die Größen y implizite gegebene Funktionen der Größen x sind, so ist

$$\frac{\partial(y_1, y_2 \ldots y_m)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_m)} = (-1)^m \frac{\frac{\partial(F_1 \ldots F_n)}{\partial(x_1, x_2 \ldots x_m, y_{m+1} \ldots y_n)}}{\frac{\partial(F_1 \ldots F_n)}{\partial(y_1 \ldots y_n)}}.$$

In unserm Falle sind die Gleichungen $F_i = 0$, die Variablen y_i und x_k durch die Gleichungen $\Omega_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, die Variablen (x_1, y_1, p_1, t) und (x, y, p) gegeben $(m = 3,\ n = 4)$.

Nach diesen Vorbemerkungen wenden wir uns nun zur *Berechnung der Klammerausdrücke* $[x_1, y_1]$, $[p_1, x_1]$ und $[p_1, y_1]$ in unserm Beispiel. Hierbei werden wir von folgendem Theorem der Determinantentheorie Gebrauch machen:

Es sei

$$(58)\qquad y_1 = y_1(x_1, x_2, x_3),\quad y_2 = y_2(x_1, x_2, x_3),\quad y_3 = y_3(x_1, x_2, x_3)$$

und

$$\Delta = \frac{\partial(y_1, y_2, y_3)}{\partial(x_1, x_2, x_3)} \neq 0,$$

sodaß die Gleichungen auch nach den Größen x_1, x_2, x_3 *auflösbar sind:*

$$(58')\qquad x_1 = x_1(y_1, y_2, y_3),\quad x_2 = x_2(y_1, y_2, y_3),\quad x_3 = x_3(y_1, y_2, y_3).$$

Dann gilt:

$$(59)\qquad y_k^{x_1} \cdot x_1^{y_i} + y_k^{x_2} \cdot x_2^{y_i} + y_k^{x_3} \cdot x_3^{y_i} = 1 \text{ oder } 0,$$

jenachdem $i = k$ oder $i \neq k$ *ist, wobei die partiellen Differentialquotienten* $y_k^{x_i} = \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$ *aus den Gleichungen (58) und* $x_k^{y_i} = \frac{\partial x_k}{\partial y_i}$ *aus den Gleichungen (58′) zu nehmen sind.*

Der Beweis folgt direkt aus der Relation $x_k^{y_i} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta}$, wo Δ_{ik} die zum Element der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne der Determinante Δ gehörende Subdeterminante, die „Adjunkte" zum Element $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$, bezeichnet[1]); denn die Relationen (59) sind hiernach identisch mit den folgenden:

$$y_k^{x_1}\Delta_{i1} + y_k^{x_2}\Delta_{i2} + y_k^{x_3}\Delta_{i3} = \Delta \cdot 1 \quad \text{oder} \quad \Delta \cdot 0.$$

In unsrer Anwendung sind die Größen y_1, y_2, y_3; x_1, x_2, x_3 durch x, y, p; λ_1, μ_1, l_1 und die Gleichungen (58), (58′) durch die Gleichungen (28a, b, c) S. 296 und ihre Umkehrungen in Verbindung mit den Gleichungen (47′a, b, c) S. 310 gegeben; es ist also z. B.

$$(59')\qquad \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial \mu_1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} = 1,$$

$$(59'')\qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \mu_1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x} = 0,$$

wo

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial x}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda_1} = -\frac{b}{a}\frac{\partial x}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x} = -\frac{a}{b} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} \quad \text{usw. ist.}$$

---

1) Man sehe Baltzer, l. c. S. 142, § 12, 2 No. II. Die Relationen (59) selbst sind bei Baltzer nicht gegeben.

Für die linken Seiten dieser Gleichungen (59′) und (59″) wollen wir die Abkürzungen $\frac{dx}{dx}$ und $\frac{dy}{dx}$ und entsprechend analoge benutzen.

I. Der *erste Klammerausdruck* ist jetzt (Lie und Scheffers, l. c. S. 69):

$$[x_1, y_1] = \begin{vmatrix} x_1^x & x_1^y & x_1^p \\ y_1^x & y_1^y & y_1^p \\ -p & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1^x & x_1^y & x_1^p \\ y_1^x & y_1^y & y_1^p \\ -p\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx} & -p\frac{dx}{dy} + \frac{dy}{dy} & -p\frac{dx}{dp} + \frac{dy}{dp} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1} & x_1^{\mu_1} & x_1^{l_1} \\ y_1^{\lambda_1} & y_1^{\mu_1} & y_1^{l_1} \\ -\frac{b}{a}(-px^\lambda + y^\lambda) & -px^\mu + y^\mu & -px^l + y^l \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} & \frac{\partial \mu_1}{\partial x} & \frac{\partial l_1}{\partial x} \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} & \frac{\partial \mu_1}{\partial y} & \frac{\partial l_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \lambda_1}{\partial p} & \frac{\partial \mu_1}{\partial p} & \frac{\partial l_1}{\partial p} \end{vmatrix}.$$

Der *zweite* Faktor ist ersichtlich gleich

$$-\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\frac{\partial (x, y, p)}{\partial (\lambda, \mu, l)}} = -\frac{\sin^2(\lambda + \mu)}{b \cos \mu} \neq 0$$

(vgl. Formel (30a) S. 297); der *erste* dagegen ist nach den Gleichungen (28a, b) und (29a, b) S. 296 gleich:

$$\begin{vmatrix} b \sin \lambda_1 - l_1 \sin(\lambda_1 + \mu_1) & -l_1 \sin(\lambda_1 + \mu_1) & \cos(\lambda_1 + \mu_1) \\ -b \cos \lambda_1 + l_1 \cos(\lambda_1 + \mu_1) & l_1 \cos(\lambda_1 + \mu_1) & \sin(\lambda_1 + \mu_1) \\ -b(p \sin \lambda + \cos \lambda) & 0 & -p\cos(\lambda + \mu) + \sin(\lambda + \mu) \end{vmatrix}$$

oder unter Benutzung der Gleichung (28c) S. 296:

$$= \frac{b \cdot l_1}{\sin(\lambda + \mu)} \begin{vmatrix} \sin \lambda_1 & -\sin(\lambda_1 + \mu_1) & \cos(\lambda_1 + \mu_1) \\ -\cos \lambda_1 & \cos(\lambda_1 + \mu_1) & \sin(\lambda_1 + \mu_1) \\ -\sin \mu & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{b \cdot l_1}{\sin(\lambda + \mu)} (\sin \mu - \sin \mu_1) = 0$$

nach der Gleichung (47′b) S. 310.

II. Für den *zweiten Klammerausdruck* gilt ferner in analoger Weise:

$$[p_1 x_1] = \begin{vmatrix} p_1^x & p_1^y & p_1^p \\ x_1^x & x_1^y & x_1^p \\ -p & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} p_1^{\lambda_1} & p_1^{\mu_1} & p_1^{l_1} \\ x_1^{\lambda_1} & x_1^{\mu_1} & x_1^{l_1} \\ -\frac{b}{a}(-px^\lambda + y^\lambda) & -px^\mu + y^\mu & -px^l + y^l \end{vmatrix} \cdot \frac{-\frac{a}{b}}{\frac{\partial(x, y, p)}{\partial(\lambda, \mu, l)}}$$

$$= - \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)} & \frac{1}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)} & 0 \\ b\sin\lambda_1 - l\sin(\lambda_1 + \mu_1) & -l_1\sin(\lambda_1 + \mu_1) & \cos(\lambda_1 + \mu_1) \\ -b(p\sin\lambda + \cos\lambda) & 0 & -p\cos(\lambda + \mu) + \sin(\lambda + \mu) \end{vmatrix} \cdot \frac{\sin^2(\lambda + \mu)}{b\cos\mu}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b\sin\lambda_1 & -l_1\sin(\lambda_1 + \mu_1) & \cos(\lambda_1 + \mu_1) \\ -b\sin\mu & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{b\cos\mu \cdot \sin^2(\lambda_1 + \mu_1)}$$

$$= \frac{\sin\lambda_1 + \sin\mu\cos(\lambda_1 + \mu_1)}{\cos\mu} \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)} = \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin(\lambda_1 + \mu_1)} = \varrho$$

nach der Gleichung (56) S. 310.

III. Der *dritte Klammerausdruck* endlich ist

$$[p_1 y_1] = \begin{vmatrix} p_1^x & p_1^y & p_1^p \\ y_1^x & y_1^y & y_1^p \\ -p & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} p_1^{\lambda_1} & p_1^{\mu_1} & p_1^{l_1} \\ y_1^{\lambda_1} & y_1^{\mu_1} & y_1^{l_1} \\ -\frac{b}{a}(-px^\lambda + y^\mu) & -px^\mu + y^\mu & -px^l + y^l \end{vmatrix} \cdot \frac{-\frac{a}{b}}{\frac{\partial(x, y, p)}{\partial(\lambda, \mu, l)}}$$

$$= - \begin{vmatrix} \frac{1}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)} & \frac{1}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)} & 0 \\ -b\cos\lambda_1 + l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1) & l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1) & \sin(\lambda_1 + \mu_1) \\ -b(p\sin\lambda + \cos\lambda) & 0 & -p\cos(\lambda + \mu) + \sin(\lambda + \mu) \end{vmatrix} \cdot \frac{\sin^2(\lambda + \mu)}{b\cos\mu}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -b\cos\lambda_1 & l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1) & \sin(\lambda_1 + \mu_1) \\ -b\sin\mu & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{b\cos\mu\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)}$$

$$= -\frac{\cos\lambda_1 - \sin\mu\sin(\lambda_1 + \mu_1)}{\cos\mu} \cdot \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin^2(\lambda_1 + \mu_1)}$$

$$= -\operatorname{cötg}(\lambda_1 + \mu_1)\frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin(\lambda_1 + \mu_1)} = p_1 \cdot \varrho.$$

Zusatz. Wir wollen noch ein Beispiel für die Anwendung der Formeln unserer Berührungstransformation (28a, b, c), (29a, b, c) S. 296 und (47′a, b, c) S. 310 hinzufügen, welche ganz auf den Anschauungen der Lieschen Theorie fußt:

Wir gehen aus von der Gleichung im System Σ

$$y = 0 \tag{60}$$

und fassen sie als eine Differentialgleichung im Lieschen Sinne auf (vgl. Lie und Scheffers, l. c. S. 41). Sie umfaßt, geometrisch ausgesprochen, alle Linienelemente, deren Träger die Punkte der x-Achse sind; ihre „Integralgebilde" (Elementvereine, Lie und Scheffers S. 38) sind diese einzelnen Punkte selbst, so daß ihre „Enveloppe" oder das „singuläre Integralgebilde" die x-Achse selbst ist. Welches sind nun die entsprechenden Integralgebilde im System Σ_1?

Den einzelnen Punkten $x = C$ der x-Achse entsprechen, wie wir wissen, gestreckte, gespitzte oder verschlungene Epitrochoiden als ihre Bahnkurven im System Σ_1 (vgl. Satz 16 S. 306), den beiden Schnittpunkten S_0, S_1 der x-Achse mit dem Polkreis k_a außerdem die Elementvereine, die durch die Spitzen der von S_0, S_1 beschriebenen Epicykloiden getragen werden. Die Gleichungen dieser Epitrochoiden gewinnen wir so:

Aus den Gleichungen (60) und (28b) S. 296 ergibt sich:

$$a \sin \lambda + l \sin (\lambda + \mu) = 0$$

oder nach den Gleichungen (47'a, b, c) S. 310:

$$-a \sin \frac{b\lambda_1}{a} + l_1 \sin \left(-\frac{b\lambda_1}{a} + \mu_1\right) = 0 \tag{60'}$$

oder

$$l_1 \sin \mu_1 \cdot \cos \frac{b\lambda_1}{a} - l_1 \cos \mu_1 \cdot \sin \frac{b\lambda_1}{a} = a \sin \frac{b\lambda_1}{a}. \tag{60''}$$

Für $x = C$ folgt weiter nach der Gleichung (28a) S 296:

$$a \cos \frac{b\lambda_1}{a} + l_1 \cos \left(-\frac{b}{a}\lambda_1 + \mu_1\right) = C$$

oder

$$l_1 \sin \mu_1 \cdot \sin \frac{b\lambda_1}{a} + l_1 \cos \mu_1 \cdot \cos \frac{b\lambda_1}{a} = C - a \cos \frac{b\lambda_1}{a}. \tag{61}$$

Diese Gleichungen (60'') und (61) aber ergeben:

$$l_1 \sin \mu_1 = C \sin \frac{b\lambda_1}{a},$$

$$l_1 \cos \mu_1 = C \cos \frac{b\lambda_1}{a} - a.$$

Setzt man dann für $l_1 \sin \mu_1$ und $l_1 \cos \mu_1$ die hiernach ihnen gleichen Werte in die Gleichungen (29a, b) S. 296 ein, so erhält man endlich:

$$\begin{aligned} -x_1 &= (a+b)\cos \lambda_1 - C \cos\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right), \\ -y_1 &= (a+b)\sin \lambda_1 - C \sin\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right), \end{aligned} \tag{62a, b}$$

d. h. die Gleichungen für die Bahnkurven der Punkte $x = C$, $y = 0$, die Epitrochoiden, im System Σ_1.[1]) Sie sind die Integralgebilde der entsprechenden Differentialgleichung im System Σ_1 mit der Integrationskonstante C (vgl. Fig. 6a, b S. 306).

Zu den Gleichungen (62a, b) tritt schließlich noch als dritte Gleichung hinzu:

$$(62c)\qquad p_1 = -\frac{x_1 + b\cos\lambda_1}{y_1 + b\sin\lambda_1} = -\frac{a\cos\lambda_1 - C\cos\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right)}{a\sin\lambda_1 - C\sin\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right)}.$$

Das *singuläre* Integralgebilde im System Σ_1 geht aus den Linienelementen der x-Achse selbst hervor (Fig. 7a). Für diese gilt außer der Gleichung (60) oder (60′) noch $p = 0$ oder $\lambda + \mu = \frac{\pi}{2}$, d. h.

$$\mu_1 = \frac{b\lambda_1}{a} + \frac{\pi}{2}$$

und folglich nach der Gleichung (60′):

$$l_1 = a\sin\frac{b\lambda_1}{a}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergibt sich dann

$$l_1\cos(\lambda_1 + \mu_1) = -a\sin\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right)\sin\frac{b\lambda_1}{a},$$

$$l_1\sin(\lambda_1 + \mu_1) = \quad a\cos\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right)\sin\frac{b\lambda_1}{a},$$

also nach den Gleichungen (29a, b) S. 296:

$$-x_1 = b\cos\lambda_1 + a\sin\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right)\sin\frac{b\lambda_1}{a},$$

$$-y_1 = b\sin\lambda_1 - a\cos\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right)\sin\frac{b\lambda_1}{a}$$

oder

$$(63a, b)\qquad -x_1 = \left(b + \frac{a}{2}\right)\cos\lambda_1 - \frac{a}{2}\cos\left(\frac{b + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\lambda_1\right),$$

$$-y_1 = \left(b + \frac{a}{2}\right)\sin\lambda_1 - \frac{a}{2}\sin\left(\frac{b + \frac{a}{2}}{\frac{a}{2}}\lambda_1\right).$$

---

1) Vgl. z. B. meine Arbeit: Über neue kinematische Modelle, sowie eine neue Einführung in die Theorie der zyklischen Kurven, Zeitschrift für Math. u. Physik, Bd. 44, 1899, S. 223 Formel (11a), (Separatabzug S. 11). — Die Gleichungen (62a, b) folgen natürlich unmittelbar auch aus den Gleichungen (4a, b) S. 284 für $x = C$, $y = 0$, $at = -\lambda_1$ (Formeln (43b) und (44b) S. 303.)

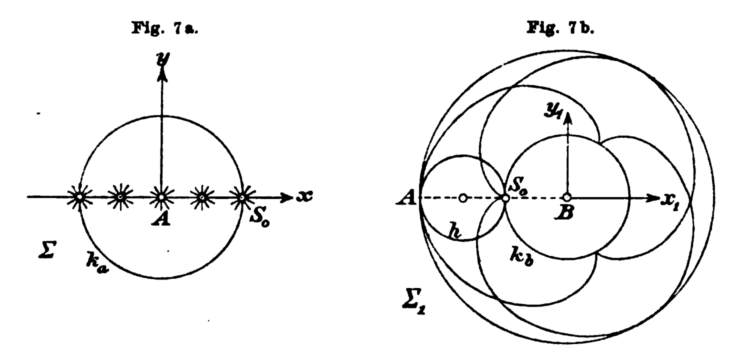
Diese Gleichungen stellen aber eine *Epizykloide im System* Σ_1 dar.[1]) Zu ihnen tritt wieder als dritte Gleichung nach (29c) S. 296 hinzu:

$$p_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{a+b}{a}\lambda_1\right). \tag{63c}$$

Wir gewinnen somit als Resultat den Satz:

20. *Rollt ein Kreis* k_a *auf einem ihn äußerlich berührenden Kreis* k_b *ab und achtet man hierbei auf die gestreckten, gespitzten und verschlungenen Epitrochoiden, welche von allen Punkten einer Durchmessergeraden von* k_a *im andern System beschrieben werden, so haben nur die gestreckten Epitrochoiden eine reelle Enveloppe, nämlich als solche ebenfalls eine Epicykloide des Kreises* k_b. *Letztere wird durch gleichzeitige äußere Abrollung eines Hilfskreises h mit dem Radius* $\frac{a}{2}$ *auf dem Kreise* k_b *im System* Σ_1 *beschrieben und zwar von demjenigen Peripheriepunkte von h,*

Fig. 7a. Fig. 7b.



der in der Anfangslage mit dem Berührungspunkte S_0 *der Polkreise* k_a *und* k_b *zusammenfällt (Fig. 7b). Die Spitzen der Enveloppenzykloide fallen also mit den Spitzen der beiden Bahnkurvenzykloiden zusammen, welche von den Endpunkten* S_0, S_1 *des Durchmessers von* k_a *beschrieben werden.*

Die Durchmessergerade des Kreises k_a berührt also während der beschriebenen gleichzeitigen Abrollung von k_a und h auf k_b stets die Enveloppenzykloide, d. h.

21. *Die Epizykloide, welche die Enveloppe der Schar von Epitrochoiden darstellt, ist zugleich die Enveloppe aller Lagen der Durchmessergeraden im System* Σ_1 *bei der Bewegung.*

Hiermit gewinnen wir den engsten Anschluß an die Dissertation des Herrn *Engel: Zur Theorie der Berührungstransformationen*[2]), worauf näher einzugehen wir uns indes versagen wollen.

---

1) Fig. 7b zeigt für das Radienverhältnis $a : b = 4 : 3$ außer dieser Epizykloide noch die Bahnkurve von A, den Kreis um B mit $a + b$ als Radius.

2) Math. Ann. Bd. 23, S. 1 (1884); vgl. auch Lie und Scheffers l. c. S. 66 und 67.

(Schluß folgt.)

Nachtrag und Berichtigung zu der Abhandlung: Über die Knicksicherheit der Stege von Walzwerkprofilen.[1])

Von A. Sommerfeld in München.

Herr Reißner hat mich freundlichst darauf aufmerksam gemacht, daß das in der zit. Arbeit behandelte elastische Problem wesentlich verwickelter liegt als ich angenommen habe; infolgedessen liefert meine Untersuchung nicht den wahren Wert der betreffenden Knicklasten, sondern nur eine *untere Grenze* derselben. Nach der hier folgenden berichtigten Formulierung des elastischen Problems scheint es kaum möglich, den genauen Wert der Knicklasten theoretisch zu gewinnen. Andrerseits genügt für die unmittelbare praktische Anwendung, die ich im Auge hatte, bereits die Kenntnis einer unteren Grenze der Knicklast. Insbesondere bleibt das Schlußresultat meiner Arbeit (vgl. den letzten Absatz auf S. 153) sowie die Diskussion der Beobachtungen ungeändert. Der Vergrößerungsfaktor, der an den von mir gefundenen Knicklasten anzubringen ist, wird durch Versuche festgestellt, die in Aachen ausgeführt werden. Noch möchte ich hervorheben, daß das von mir behandelte mathematische Randwertproblem in sich widerspruchsfrei und richtig gelöst ist; nur entspricht es eben nicht den wahren elastischen Verhältnissen.

Die berichtigte Differentialgleichung des Problems.

In meiner Arbeit habe ich an Love[2]) II § 380 angeknüpft. Die von Love benutzten Zeichen bedeuten in der bei uns üblichen Schreibweise:

$$P_1 = \sigma_x, \quad P_2 = \sigma_y, \quad U_1 = U_2 = \tau_{xy}, \quad T_1 = \tau_{xy}, \quad T_2 = \tau_{yx}.$$

Hierbei sind die σ und τ Normal- und Schubspannungen, gerechnet für ein Rechteck von der Seitenlänge 1 in der x- oder y-Richtung und von der Seitenlänge s (Plattendicke) in der z-Richtung (Dimension: kg/cm).

Die Überlegungen von Love liefern unter Vernachlässigung höherer Potenzen der transversalen Plattenausbiegung w die Differentialgleichung:

$$\Delta\Delta w + \sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0. \tag{1}$$

---

1) Diese Zeitschr. Bd. 54, 1906, S. 113.

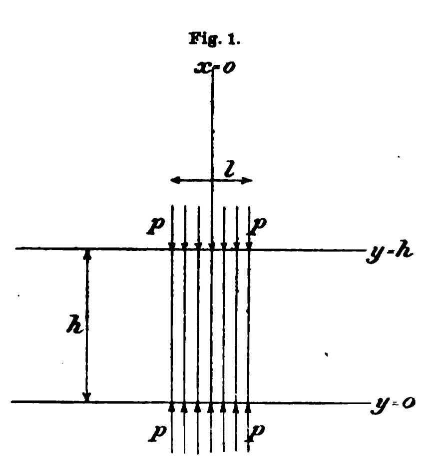
2) A Treatise of the Mathem. Theory of Elasticity, Cambridge 1893. Deutsche Übersetzung von A. Timpe, Leipzig 1907 § 387.

Hier darf man unter σ_x, σ_y, $\tau = \tau_{xy}$ die betr. Spannungen verstehen, die bei der aufgebrachten Belastung im ebenen Bleche (für $w = 0$) entstehen. Ich habe nun (vgl. Fig. 1) gesetzt

$$(2) \quad \sigma_y = p \text{ für } |x| < l/2 \text{ bez. } = 0 \text{ für } |x| > l/2, \qquad \sigma_x = \tau = 0.$$

Dies ist aber kein möglicher elastischer Zustand, da er an der Grenze des schraffierten Druckgebietes den Gleichgewichtsbedingungen der Spannungen widerspricht. (Die entsprechende Annahme in dem einfacheren Loveschen Falle ist dagegen berechtigt.) Vielmehr werden die Spannungstrajektorien von der Druckstelle aus seitlich ausweichen und es wird nötig, zunächst das ebene Problem dieser Spannungsverteilung zu lösen; die so gefundenen, schon nicht ganz einfachen Werte von σ_x, σ_y und τ sind in Gl. (1) einzutragen, welche somit variable Koeffizienten erhält.

Fig. 1.



Nimmt man aber statt ihrer die konstanten oder, richtiger gesagt, sprungweise veränderlichen Werte (2), so konzentriert man die Spannungen und erleichtert dadurch das Ausknicken. Die Lösung der Differentialgleichungen I und II meiner ursprünglichen Arbeit, die mit den Spannungen (2) gebildet waren, muß daher ein zu frühes Eintreten der Knickung, d. h. eine *untere Grenze für die wirkliche Knicklast* liefern.

Das vorbereitende ebene Problem.

Es handelt sich nun darum, statt der Werte (2) die wirkliche Verteilung der σ_x, σ_y, τ in dem ebenen, noch nicht ausgeknickten Blech zu finden. Hierzu können direkt die Formeln meiner früheren Arbeit dienen. Dabei beschränke ich mich auf den Fall, der auch dort die Hauptrolle spielte, daß die Lasten p in eine Punktlast P zusammenrücken. Das so entstehende Problem ähnelt dem Boussinesq-Ceruttischen, nur daß es sich bei uns nicht einfach um die Halbebene (Halbraum), sondern um den Streifen handelt.

Um den statischen Bedingungen zwischen den Spannungen zu genügen, führt man am besten eine Spannungsfunktion F[1]) ein, derart, daß

$$(3) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

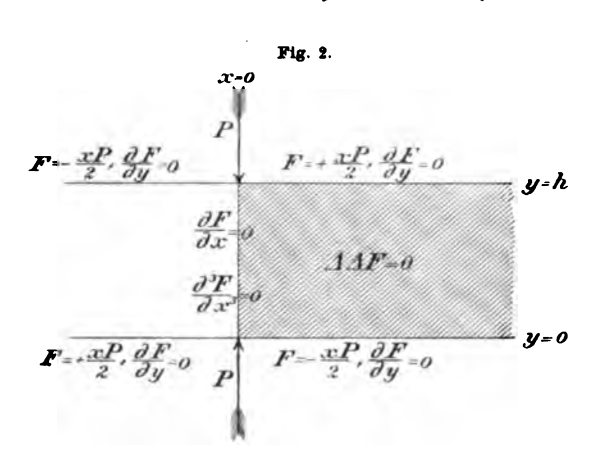
1) Vgl. z. B. das zit. Werk von Love, Deutsche Übersetzung § 144.

Wegen der elastischen Bedingungen ist dieses F der Differentialgleichung

$$\Delta\Delta F = 0$$

zu unterwerfen. Die Grenzbedingungen sind in Fig. 2 eingetragen. Zu ihrer Erläuterung diene folgendes. Auf den Rändern $y = 0$ und $y = h$ hat man wegen $\tau = 0$ zunächst $\partial F / \partial y = \text{const.}$; hierfür kann man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit $\partial F / \partial y = 0$ nehmen. Wegen $\sigma_y = 0$ für $x \neq 0$ und $y = 0$ oder h ergibt sich auch $\partial F / \partial x = \text{const.}$ $\partial F / \partial x$ erleidet aber für $x = 0$ einen Sprung von der Größe $\pm P$, so daß die Konstante für $x > 0$ und $x < 0$ verschiedene Werte hat. Man kann ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Konstante gleich $\pm P/2$ nehmen (wegen des Vorzeichens vgl. die Fig.) und dementsprechend $F = \pm xP/2$ vorschreiben. Statt des ganzen Streifens kann man aber, was bequemer ist, den Halbstreifen $x > 0$ betrachten und dafür auf $x = 0$ geeignete Grenzbedingungen einführen. Diese ergeben sich daraus, daß nach Symmetrie die Linie $x = 0$ eine Hauptspannungsrichtung wird ($\tau = 0$) und daß auf ihr der Druck σ_y ein Maximum wird ($\partial \sigma_y / \partial x = 0$). Man schließt hieraus für F:

Fig. 2.



$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0.$$

Die erstere dieser Bedingungen kann durch Integration ersetzt werden durch $\partial F / \partial x = \text{const.}$, wobei nach Symmetrie der Wert der Konstanten Null sein muß (man vgl. die rechte Hälfte des Bedingungsschemas in Fig. 2 mit der im Vorzeichen umgekehrten linken Hälfte).

Lösung des ebenen Problems.

Im Anschluß an § 3 Gleichung (11) meiner früheren Arbeit setzen wir F in folgender Form an:

$$F = \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha \, A(\lambda, \alpha) \cos \lambda x \, f(y). \tag{4}$$

Hier möge $f(y)$ die Bedeutung aus der dortigen Gleichung (10) mit $A = 1$, $m = 1$ haben, so daß (s. die dortige Gleichung (8) und (9)) gilt:

$$f'(0) = f'(h) = 0, \qquad f(0) = -f(h).$$

Es sei demnach

$$(5) \quad \begin{cases} f(y) = \mathfrak{Sin}\,\lambda(y-h) - \lambda y\,\mathfrak{Cos}\,\lambda(y-h) + \mathfrak{Sin}\,\lambda y - \lambda(y-h)\,\mathfrak{Cos}\,\lambda y, \\ f(0) = -(\mathfrak{Sin}\,\lambda h - \lambda h). \end{cases}$$

Alsdann haben wir ersichtlich, was auch die Funktion $A(\lambda, \alpha)$ bedeuten möge:

für $x = 0$: $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0,$$

für $y = 0$ und $y = h$: $$\frac{\partial F}{\partial y} = 0, \qquad F_{y=0} = -F_{y=h}.$$

Es bleibt also nur noch die Grenzbedingung zu erfüllen:

$$(6) \qquad \text{für } y = 0 \text{ und } x > 0: \quad F = -\frac{P}{2}x.$$

Wir genügen ihr nach der Theorie der Fourierschen Integrale durch Wahl von $A(\lambda, \alpha)$. Da aber das Integral für $F = -\frac{P}{2}x$ divergieren würde, ersetzen wir diese Bedingung zunächst durch

$$(6') \qquad F = -\frac{P}{2}xe^{-kx},$$

unter k eine Zahl verstanden, die wir schließlich zu Null abnehmen lassen. Wir verlangen nun nach (4) und (6'):

$$-\frac{P}{2}xe^{-kx} = \int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha A(\lambda, \alpha)\cos\lambda x f(0)$$

und machen dementsprechend, ähnlich wie in § 3 Gleichung (13) meiner früheren Arbeit:

$$A(\lambda, \alpha) = -\frac{P}{\pi}\alpha e^{-k\alpha}\frac{\cos\lambda\alpha}{f(0)}.$$

Aus (4) wird nun:

$$F = -\frac{P}{\pi}\int_0^\infty d\lambda \int_0^\infty d\alpha\,\alpha e^{-k\alpha}\cos\lambda x\cos\lambda\alpha\frac{f(y)}{f(0)},$$

oder, wenn wir die Integration nach α ausführen:

$$(7) \qquad F = \frac{P}{\pi}\int_0^\infty d\lambda\frac{\lambda^2 - k^2}{(\lambda^2 + k^2)^2}\cos\lambda x\frac{f(y)}{f(0)}.$$

Diese Funktion genügt allen Bedingungen des Problems, wobei nur (6') an Stelle von (6) getreten ist.

Diskussion der Spannungsverteilung.

Gehen wir nun gemäß Gleichung (3) zu den Spannungen selbst über, so können wir z. B. in τ direkt unter dem Integralzeichen $k = 0$ setzen, was in F unzulässig gewesen wäre:

$$\tau = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \frac{f'(y)}{f(0)}. \tag{8}$$

Wir wünschen diese Größe für kleine x anzunähern, d. h. genauer gesagt, für:

x klein gegen y und zugleich x klein gegen $h - y$.

Man denke sich zu dem Zweck $\lambda x = \mu$ eingeführt, so treten in $\Phi(y) = \frac{f'(y)}{f(0)}$ die nach Voraussetzung großen Verhältnisse y/x, $(h-y)/x$, h/x auf. Infolgedessen kann man $\Phi(y)$ für alle nicht verschwindenden Werte von μ dadurch vereinfachen, daß man alle mit $x = 0$ exponentiell relativ verschwindenden Terme fortläßt. Da sich aber für verschwindende μ der Integrand von τ endlich und stetig verhält, so liefert die Umgebung von $\mu = 0$ nur einen verschwindenden Beitrag zu τ und es darf die erwähnte Näherungsformel für das ganze Integrationsintervall benutzt werden. Dieselbe lautet, wenn man von μ wieder zu λ zurückgeht:

$$\Phi(y) = -\lambda^2 y e^{-\lambda y} + \lambda^2 (h - y) e^{-\lambda(h-y)}.$$

Die Integration nach λ in (8) läßt sich jetzt ausführen und liefert

$$\tau = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2P}{\pi} \frac{(h-y)^2 x}{(x^2 + (h-y)^2)^2}. \tag{9}$$

Aus τ gewinnt man nach den statischen Bedingungen durch Differentiation und Integration nach x oder y leicht die Spannungen σ_x und σ_y, wobei man am bequemsten mit dem Verhältnis y/x operiert, nämlich

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi} \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2P}{\pi} \frac{x^2 (h-y)}{(x^2 + (h-y)^2)^2}, \tag{9a}$$

$$\sigma_y = -\frac{2P}{\pi} \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2P}{\pi} \frac{(h-y)^3}{(x^2 + (h-y)^2)^2}. \tag{9b}$$

In der unteren Hälfte $y < h/2$ unseres Streifens überwiegt der erste Term der rechten Seite von (9), (9a) oder (9b), in der oberen Hälfte $y > h/2$ der zweite Term; in der Nähe der Mitte $y = h/2$ werden beide Terme von gleicher Größenordnung. Die ersten bez. zweiten Terme, für sich genommen, sind genau identisch mit der Lösung des Boussinesq-Ceruttischen Problems für die durch $y = 0$ bez. $y = h$ begrenzte Halbebene.

Wir wollen noch den Maximalwert der Spannung (erste Hauptspannung) nach der bekannten Formel

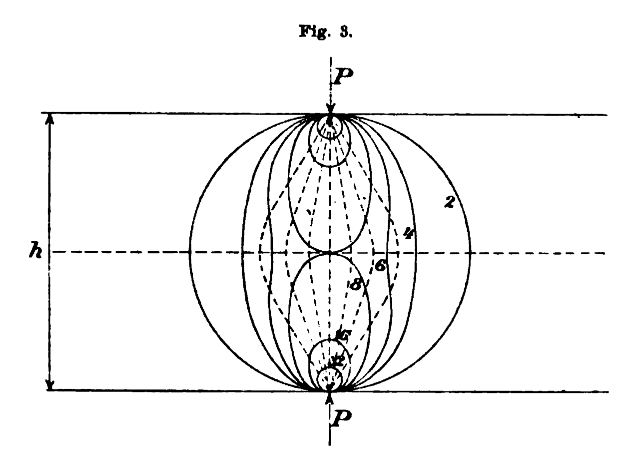
$$\sigma_{\max} = \frac{\sigma_y + \sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

sowie die Spannungstrajektorien aus ihrer Neigung φ gegen die x-Achse nach der Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x}$$

berechnen. Dabei dürfen wir uns nach dem soeben Gesagten auf den ersten (zweiten) Term in (9) ... beschränken, wenn es sich um die

Fig. 3.



Nähe der unteren (oberen) Kante handelt und müssen beide Terme nur im mittleren Gebiet berücksichtigen.

Auf solche Weise ergibt sich für die Nähe der unteren Kante

$$\sigma_{\max} = -\frac{2P}{\pi}\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2xy}{y^2 - x^2}.$$

Die Kurven $\sigma_{\max} = \text{const.}$ sind also Kreise, vgl. Fig. 3; die angeschriebene Ziffer, mit $-P/\pi h$ multipliziert, bedeutet den auf dem betr. Kreise konstanten Wert von $\sigma_{\max}$. Die Spannungstrajektorien ferner sind in der Nähe der unteren Kante die Geraden $y/x = \text{const.}$; sie sind in Fig. 3 punktiert eingezeichnet.

Auf der Mittellinie $y = h/2$ des Streifens ist $\tau = 0$, daher

$$\sigma_{\max} = \sigma_y = -\frac{8P}{\pi h}\frac{1}{\left(1 + \left(\frac{2x}{h}\right)^2\right)^2}, \quad \operatorname{tg} 2\varphi = 0;$$

für unsere Trajektorien ergibt sich $2\varphi = \pi$; die von dem einen Druckpunkt $x = y = 0$ ausstrahlenden Trajektorien biegen also an der Mittel-

linie um und schneiden diese senkrecht, um in den anderen Druckpunkt $x = 0$, $y = h$ einzumünden. Die größte Hauptspannung auf der Mittellinie beträgt $-8P/\pi h$. Die in der Nähe der Druckpunkte kreisförmig verlaufenden Linien gleichen σ_{max} erscheinen nach der Mittellinie hinübergezogen.

Ihrer Ableitung nach ist diese Figur nur in einer gewissen Umgebung von $x = 0$ zuverlässig, wir können mit Rücksicht auf die oben angegebenen genaueren Bedingungen etwa sagen: nur in dem von den punktierten Trajektorien überdeckten Rhombus der Fig. 3.

In unserer Knickungsgleichung (1) sind natürlich strenge genommen nicht die dieser Figur entsprechenden Näherungswerte (9), sondern der allgemeingültige Wert (8) von τ und die nach den statischen Bedingungen damit zusammenhängenden allgemeingültigen Werte von σ_x und σ_y einzutragen. Die weitere Integration jener Gleichung dürfte aber selbst mit den Näherungswerten (9) undurchführbar sein, so daß man sich mit der Kenntnis der von mir früher ermittelten unteren Grenze der Knicklast wird begnügen müssen.

Kleinere Mitteilungen.

Über einen Satz aus der Statik.

Im Archiv der Mathematik und Physik (3) 2 (1902), S. 279 hat Herr Schubert analytisch den Satz bewiesen: Wenn vier Kräfte, die auf eine starre Gerade senkrecht zu ihr wirken, sich das Gleichgewicht halten, und man zieht durch einen beliebigen Punkt Parallelen zu ihren Wirkungslinien, so erhält man vier Strahlen, die projektiv den Angriffspunkten der Kräfte sind. Als ich diesen Satz vor kurzem las, konnte ich für das Auftreten des rechten Winkels darin keinen Grund einsehen und es schien mir, daß er noch gelten müsse, wenn die Wirkungslinien der vier Kräfte überhaupt einer und derselben Ebene parallel sind, einerlei ob diese Ebene zu der Geraden, auf welche die Kräfte wirken, senkrecht ist oder nicht. Die folgende einfache Überlegung zeigt die Richtigkeit dieser Vermutung.

Wenn die Wirkungslinien von vier Kräften, die sich an einem starren Punktsystem das Gleichgewicht halten, weder in einer Ebene liegen noch durch einen Punkt gehen, so haben sie bekanntlich hyperboloidische Lage, d. h. sie gehören einer und derselben Schar von geraden Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids an. Die Gerade, auf die nach der Voraussetzung die vier Kräfte wirken, gehört zur anderen Schar von Erzeugenden des Hyperboloids, und es werden daher die Wirkungslinien der vier Kräfte von jeder Erzeugenden dieser anderen Schar in vier Punkten geschnitten, die

dasselbe Doppelverhältnis haben, wie die Angriffspunkte der Kräfte. Hierin ist der Satz des Herrn Schubert samt der angedeuteten Verallgemeinerung als besonderer Fall enthalten. Denn sobald die Wirkungslinien der vier gegebenen Kräfte einer und derselben Ebene parallel sind, erhält man statt des erwähnten Hyperboloids ein hyperbolisches Paraboloid und die unendlich fernen Punkte der Wirkungslinien fallen in eine Gerade, bilden also eine Punktreihe projektiv zur Punktreihe der Angriffspunkte und werden folglich aus einem beliebigen endlichen Punkt durch einen Strahlenbüschel projiziert, der zur Punktreihe der Angriffspunkte projektiv ist. Offenbar lassen sich diese Sätze in leicht zu erkennender Weise umkehren. R. Mehmke.

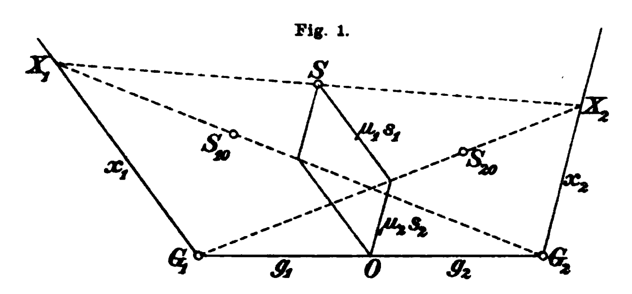
Der Schwerpunkt des dreigliedrigen Gelenksystems.

Der folgende Satz, welcher auch für räumliche Systeme richtig ist, scheint nicht bekannt zu sein:

Auf den Längsachsen der Endglieder eines dreigliedrigen Gelenksystems gibt es feste Punkte, deren Verbindungsstrecke bei allen Stellungen des Systems den Schwerpunkt enthält und durch denselben in konstantem Verhältnis geteilt wird. Voraussetzung ist dabei, daß der Schwerpunkt des Mittelgliedes auf der Verbindungslinie der Gelenke liegt.

Von einem zunächst beliebigen Anfangspunkt gehen zu den Gelenken G_1 und G_2 die Vektoren $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, bis zu dem Schwerpunkt des Mittelglieds

Fig. 1.



der Vektor $\mathfrak{s}_0$. Vom Gelenk G_1 gehe weiter bis zum Schwerpunkt des einen Endglieds der dessen Längsachse bestimmende Vektor $\mathfrak{s}_1$ und ebenso sei durch den von G_2 ausgehenden Vektor $\mathfrak{s}_2$ der Schwerpunkt des anderen Endglieds bestimmt. Dann gilt für den Gesamtschwerpunkt:

$$(m_0 + m_1 + m_2)\mathfrak{s} = m_0\mathfrak{s}_0 + m_1(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{s}_1) + m_2(\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{s}_2).$$

Wählt man jetzt den Anfangspunkt so, daß

$$m_0\mathfrak{s}_0 + m_1\mathfrak{g}_1 + m_2\mathfrak{g}_2 = 0\,, \tag{1}$$

so wird, wenn noch zur Abkürzung die durch die Gesamtmasse dividierte Masse m_i mit μ_i bezeichnet wird:

$$\mathfrak{s} = \mu_1\mathfrak{s}_1 + \mu_2\mathfrak{s}_2\,. \tag{2}$$

Der neue Anfangspunkt ist der Schwerpunkt eines „reduzierten" Systems, welches entsteht, wenn man dem Mittelglied die Masse m_1 in G_1 und m_2 in G_2 hinzufügt; von Herrn O. Fischer wurde dieser Punkt Hauptpunkt des Mittelglieds genannt.[1]) Die Teile g_1 und g_2, in welche die Längsachse $G_1 G_2$ zerfällt unter der Voraussetzung, daß der Schwerpunkt des Mittelglieds auf $G_1 G_2$ liegt, sind die „Hauptstrecken" des Mittelglieds.

Auf der Längsachse des einen Endglieds liege ein Punkt X_1, zu dem von G_1 aus der Vektor $\mathfrak{x}_1$ gehen möge; ebenso gehe von G_2 bis X_2 der Vektor $\mathfrak{x}_2$, sodaß der Schwerpunkt des zweiten Endglieds auf der Linie $G_2 H_2$ liegt. Wir untersuchen die Bedingungen, unter welchen der Gesamtschwerpunkt auf $X_1 X_2$ liegt. Es muß dann gelten:

$$\lambda_1(\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{x}_1) + \lambda_2(\mathfrak{g}_2 + \mathfrak{x}_2) = (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 \mathfrak{s}_1 + \mu_2 \mathfrak{s}_2). \tag{3}$$

Die Gleichung kann befriedigt werden, wenn:

$$\lambda_1 \mathfrak{g}_1 + \lambda_2 \mathfrak{g}_2 = 0$$

ist, d. h. $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ müssen parallel sein, etwa entgegengesetzt gerichtet und daher muß der Anfangspunkt und somit auch der Schwerpunkt des Mittelglieds auf der Linie $G_1 G_2$ liegen. Ferner müssen λ_1 und λ_2 sich umgekehrt verhalten wie die Längen von $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, die mit g_1 und g_2 bezeichnet sein mögen. So wird:

$$\begin{aligned} g_2 \mathfrak{x}_1 &= (g_1 + g_2)\,\mu_1 \mathfrak{s}_1 \\ g_1 \mathfrak{x}_2 &= (g_1 + g_2)\,\mu_2 \mathfrak{s}_2. \end{aligned} \tag{4}$$

Daraus folgt, daß $G_2 \mathfrak{x}_1$ durch den Endpunkt von $\mu_1 \mathfrak{s}_1$ geht.

Dreht man das zweite Endglied, bis dessen Längsachse in die Richtung von $X_1 G_2$ fällt, so liegt auf dieser Linie der Gesamtschwerpunkt, der Schwerpunkt des zweiten Endglieds und also auch der gemeinsame Schwerpunkt des Mittelglieds und des ersten Endglieds, welcher S_{10} heißen soll. Weil aber S_{10} von der Drehung des zweiten Endglieds unabhängig ist, so liegt S_{10} überhaupt immer auf $X_1 G_2$; ebenso liegt der Schwerpunkt S_{20} des Mittelglieds und zweiten Endglieds auf $G_1 X_2$.

Um den Punkt X_1 zu finden, suche man daher S_{10}, verbinde diesen Punkt mit G_2, so schneidet diese Linie die Längsachse des ersten Glieds in X_1. Ist X_1 und entsprechend X_2 gefunden, so liefert die Teilung von $X_1 X_2$ im Verhältnis $g_1 : g_2$ für jede Systemlage den Schwerpunkt. Dieses Verhältnis ergibt sich leicht aus (1) in der Form:

$$[m_0 r_1 + m_2(r_1 + r_2)] : [m_0 r_2 + m_1(r_1 + r_2)],$$

wenn der Schwerpunkt des Mittelglieds die Strecke $G_1 G_2$ in die Teile r_1 und r_2 zerlegt.

Aber auch wenn der Schwerpunkt und damit der Hauptpunkt des Mittelglieds nicht auf $G_1 G_2$ fällt, sind die Punkte X_1 und X_2 von Bedeutung. Teilt man nach (3) $X_1 X_2$ im Verhältnis $g_1 : g_2$, so findet man, daß vom Schwerpunkt bis zu diesem Teilpunkt der Vektor

$$\frac{g_2 \mathfrak{g}_1 + g_1 \mathfrak{g}_2}{g_1 + g_2}$$

1) Vgl. diese Zeitschr. Bd. 47 (1902), S. 432.

geht. Trägt man ihn vom Anfangspunkt O aus ab, so teilt sein Endpunkt $G_1 G_2$ im Verhältnis $g_1 : g_2$, er wird also dargestellt durch die Mediane aus O im Dreieck $O G_1 G_2$. Vgl. Fig. 2.

Von jetzt ab sei wieder O auf $G_1 G_2$ vorausgetzt:

In dieser Zeitschrift Bd. 49 (1903), S. 48 hat Herr Somoff von dem Fischerschen verschiedene Gelenkmechanismen angegeben, welche am 3-gliedrigen Gelenksystem angebracht, bei jeder Systemlage den Schwerpunkt bestimmen. Sie beruhen darauf, daß der Schwerpunkt mit den Schwerpunkten der Teilsysteme und Einzelglieder eine Konfiguration bildet, welche zu sich selbst affin bleibt.

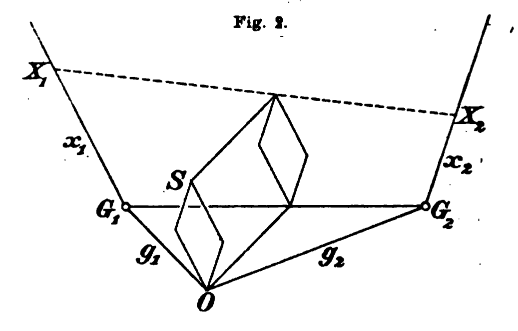


Fig. 2.

Nach dem angegebenen Satze läßt sich dasselbe erreichen durch einen einzigen Pantographen, der in X_1 und X_2 gelenkig mit dem System verbunden ist und $X_1 X_2$ im Verhältnis $g_1 : g_2$ teilt.

Die Tatsache, daß $X_1 X_2$ durch den Schwerpunkt geht, kann auch leicht durch ein Modell veranschaulicht werden. Wird das dreigliedrige Gelenksystem an einem Faden aufgehängt, welcher durch X_2 geht und in X_1 befestigt ist, so muß derselbe bei jeder Lage des Systems gradlinig und senkrecht bleiben.

Für die Dynamik des dreigliedrigen Gelenksystems folgt aus unserem Satze:

Sind die Hauptstrecken $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ von Null verschieden, so bleibt der Gesamtschwerpunkt bei der Bewegung des Systems dann und nur dann in Ruhe, wenn X_1 und X_2 stets Geschwindigkeiten haben, welche gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, wenn $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, und deren Längen sich wie $g_1 : g_2$ verhalten. Der wichtigste Fall wird der sein, wo X_1 und X_2 festgehalten werden.

Ist eine der Hauptstrecken des Mittelglieds, etwa g_1, gleich Null, so wird X_2 ins Unendliche rücken; von X_1 geht zum Schwerpunkt der Vektor $u_2 \mathfrak{s}_2$. Der Schwerpunkt S bleibt also in Ruhe, wenn X_1 einen Kreis um ihn beschreibt und das zweite Endglied zu $X_1 S$ parallel bleibt. Anwendung auf den Ausgleich des resultierenden Massendrucks beim Schubkurbelgetriebe s. O. Fischer a. a. O.

Stuttgart. E. Stübler.

Bücherschau.

Dr. Wilhelm Fiedler: Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage. 4. Auflage. I. Teil. Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie. Mit zahlreichen Figuren im Text und auf 2 Tafeln. Leipzig, B. G. Teubner 1904. XXIV u. 431 S. Preis *M* 10, geb. *M* 11.

Die neuere und die darstellende Geometrie haben noch keine andere, gemeinsame Darstellung gefunden als in Fiedlers großartig angelegtem, dreibändigem Werke, das wir jetzt seit über 40 Jahren mit Stolz unser eigen nennen. Von dem 1. Teil ist nun eine vierte Auflage erschienen und diese soll im Interesse derjenigen, welche das Buch noch nicht kennen, hier kurz besprochen werden.

Die neue Auflage ist gegen die letzte um etwa zwanzig Figuren im Text vermehrt, zwei lithographische Tafeln enthalten größere Figuren; eine eigene Erläuterung der Figuren ist dem Inhaltsverzeichnis angefügt. Das ganze Buch zerfällt in vier Abschnitte. Der erste A) ist betitelt: Die Zentralprojektion als Darstellungsmethode und nach ihren allgemeinen Gesetzen. Er gibt in freier Perspektive eine Behandlung der Elementaraufgaben. Ausdrücklich wird betont, daß an Stelle der unendlich fernen Ebene auch irgend eine andere, nicht durch das Zentrum gehende, Fixebene treten kann. Daran schließt sich sofort die Betrachtung perspektiver und projektiver Grundgebilde erster Stufe, der Involution und endlich der kollinearen Systeme, also der Grundgebilde zweiter Stufe. Im Abschnitt B: „Die konstruktive Theorie der Kegelschnitte als Kreisprojektionen" werden die Kegelschnitte als Zentralprojektionen des Kreises definiert. Die beiden Sätze, daß alle Peripheriewinkel eines Kreises über dem gleichen Bogen gleich groß sind und daß das von zwei festen Tangenten eines Kreises begrenzte Stück einer beweglichen Tangente vom Mittelpunkt aus unter konstantem Winkel gesehen wird, liefern übertragen die fundamentalen Eigenschaften dieser Kurven: den Pascalschen und Brianchonschen Satz, sowie die Erzeugung aus projektiven Grundgebilden erster Stufe; zur Übertragung und Ausführung der Konstruktionen dient die zentrische Kollineation. Im Abschnitt C, der betitelt ist: „Die zentrische Kollineation räumlicher Systeme als Theorie der Modellierungsmethoden" finden wir zunächst die Zentral-Kollineation behandelt als allgemeine Methode, um von einem räumlichen Gegenstand ein Modell herzustellen. Als Reliefperspektive dient diese Abbildung auch künstlerischen Zwecken; im speziellen Fall der Ähnlichkeit findet sie in der Technik allgemein Verwendung. Die Abbildung, wie sie die Perspektive liefert, ergibt sich als spezieller Fall eines Reliefs von verschwindender Tiefe. Die allgemeine räumliche Kollineation bildet den Schluß. Der letzte Abschnitt D) mit dem Titel: „Die Grundgesetze der orthogonalen Parallelprojektion, ihre Transformationen und die Axonometrie" führt uns zur Darstellung in drei aufeinander senkrechten Tafeln; es werden die mathematischen Beziehungen, stets mit bezug auf die drei Tafeln, ausführlich erledigt. Die Aufgaben

der Umlegung und Aufrichtung einer Ebene, der Drehung des Gegenstandes oder der Tafeln, die Schnitte von Ebenen mit Polyedern oder von Polyedern untereinander u. s. f. gelangen in großen Umrissen zur Behandlung. Die früheren Entwicklungen erlauben überall die mathematischen Eigenschaften hervorzuheben. Die orthogonale und schiefe Axonometrie beschließt diesen Abschnitt. Zahlreiche Beispiele sind überall eingeflochten; zusammenfassende Überblicke betonen die Hauptgesichtspunkte; die metrischen Eigenschaften sind in gleicher Weise wie die projektiven berücksichtigt. Die Involution dient als Mittel, um aus projektiven Eigenschaften metrische zu erhalten, z. B. die Gesetze der Symmetrie. Endlich gibt der Verfasser in einer Reihe besonders bezeichneter Paragraphen eine Theorie der Zyklographie, der von ihm entdeckten Abbildung der Punkte des Raumes auf die Kreise der Ebene. Irgend einem Punkte wird der Kreis zugeordnet, der um seine Projektion in diese Ebene beschrieben wird und zwar mit einem Radius gleich dem Abstand dieses Punktes von der Ebene. Diese Abbildung führt zu den Systemen von Kreisen, den Kreisbüscheln u. s. f. Beispielsweise ist das Bild aller Kreise, die einen gegebenen Kreis unter festem Winkel scheiden, ein Rotationshyperboloid durch diesen Kreis.

Das Buch ist nicht für Anfänger geschrieben; es werden vielmehr die Elemente der darstellenden Geometrie vorausgesetzt. Aber auch der schon Orientierte wird manchen Schwierigkeiten begegnen. Die oft schwerfällig gebauten Sätze erschweren die Übersicht. Konzessionen, die im Interesse einer leichteren Verständlichkeit liegen, werden nicht gemacht, sondern stets die allgemeinen Betrachtungen vorausgeschickt; Sätze, die für den Zusammenhang der allgemeinen Darstellung unbedingt notwendig sind, finden sich in den Beispielen. Daß ferner bei einem so umfangreichen Werke der eine oder andere Punkt noch einer Verbesserung fähig erscheint, wird niemand als einen Tadel empfinden. So sind die Beweise für die ebene (S. 120) und räumliche (S. 294) Kollineation ungenügend. Die Konstruktion des Achsenkreuzes einer orthogonal-axonometrischen Darstellung aus den Verhältniszahlen e_1, e_2, e_3, wie sie auf S. 369 gegeben wird oder die, welche aus dem Satze auf der folgenden Seite entnommen werden kann, sind beide unbequem und ungenau, und man wird besser eine Näherungsmethode benutzen. Im Anschluß an den Pohlkeschen Satz (S. 379) könnten auch neuere Lösungen (Schur) eine Stelle finden. Bequemer wäre es, die Figuren durchlaufend zu numerieren und manche Bezeichnungen nicht bloß in dem Inhaltsverzeichnis, sondern auch in dem Texte zu erwähnen. All das sind aber nur Kleinigkeiten einem Werke gegenüber, das in bezug auf Reichhaltigkeit der Methoden und der praktischen Bemerkungen, der Sätze und namentlich der Aufgaben geradezu als eine Fundgrube für jeden Mathematiker bezeichnet werden kann.

München, Sept. 1906. Karl Doehlemann.

J. Vonderlinn, Professor in Breslau: **Schattenkonstruktionen.** Mit 114 Figuren. Leipzig, G. J. Göschensche Verlagshandlung, 1904. Sammlung Göschen Nr. 36. Preis 80 Pf.

Auf 118 Seiten behandelt der Verfasser die Schattenkonstruktionen, indem er jeweils kurze theoretische Bemerkungen vorausschickt und darauf

die eigentlichen Aufgaben und Beispiele folgen läßt. An die einfachen Aufgaben, zu denen der Punkt, die Gerade, die Polyeder, Zylinder, Kegel und Kugel Veranlassung geben, reihen sich schwierigere über Rotationskörper, Gesimskörper, über die Schraubenlinie und die Schrauben- und Röhrenflächen. Die Darstellung ist einfach und verständlich, die zahlreichen Figuren, welche alle Konstruktionen enthalten, sind übersichtlich und gut angelegt. In erster Linie scheint der Verfasser die Bedürfnisse des Architekten im Auge zu haben. Die Theorie ist nicht mehr, als unbedingt nötig, betont, was bei der Schwierigkeit der auftretenden Probleme gerechtfertigt erscheint. Es wird also z. B. lediglich auf die Gestalt der auftretenden Kurven und nicht auf ihre Natur Rücksicht genommen. Die eine oder andere theoretische Bemerkung könnte aber wohl noch Platz finden; auf S. 24 fehlt z. B. eine präzise Regel, wie man das Streifpolygon (Selbstschattengrenze) eines Polyeders ermittelt. Mit Ausnahme der beiden Aufgaben auf S. 44 und 45, welche in parallel-perspektivischer, bezw. zentral-perspektivischer Darstellung durchgeführt sind, macht der Verfasser stets die Annnahme, daß man paralleles Licht hat, welches in der Diagonale des parallel zu den Tafeln orientierten Würfels einfällt. Der Titel des Buches ist also eigentlich etwas zu allgemein. Referent würde es weiter für vorteilhaft halten, wenn wenigstens in der Einleitung ganz allgemeine Annahmen über die Richtung des einfallenden Lichtes gemacht würden und eventuell auch die Zentralbeleuchtung nebst einigen allgemeinen Theoremen zur Sprache käme. Denn Sätze allgemein zu formulieren ist auch für den Praktiker von Nutzen, der ohnedies gern sich an die Schablone hält und leicht verführt wird, Resultate und Konstruktionen, die nur unter speziellen Voraussetzungen gelten, auch auf den allgemeinen Fall zu übertragen.

München, Sept. 1906. K. Doehlemann.

Siebenstellige Logarithmen und Antilogarithmen aller einstelligen Zahlen und Mantissen von 1000 bis 9999, mit Rand-Index und Interpolations-Einrichtung für vier- bis siebenstelliges Schnell-Rechnen. Herausgegeben von **O. Dietrichkeit.** Berlin 1903, Julius Springer. Geb. ℳ 3.00.

Zunächst kommt die vorliegende Tafel — wie auch im Vorwort angegeben — für e i n stelliges Rechnen in Betracht; sie zerfällt in eine Tafel der Logarithmen der Zahlen 1000 — 9999 und in eine solche der Numeri („Antilogarithmen“) der Mantissen 0000 — 9999. Zum rascheren Aufschlagen sind die Tafeln mit einem bequemen Rand-Index versehen.

Um Verwechslungen beim Gebrauch von Antilogarithmen zu vermeiden, unterschied schon Bürgi die Logarithmen von den andern Zahlen durch rote Farbe; in neuester Zeit wurde dieser Gedanke bei den vierstelligen Tafeln und Gegentafeln von H. Schubert (Sammlung Göschen, Leipzig 1898) wieder angewendet. Der naheliegende Vorschlag von R. Mehmke, jede Seite der Gegentafeln farbig zu umrändern, ist — soweit bekannt — noch nicht befolgt worden. Bei der vorliegenden Tafel wurde zur Unterscheidung der Tafel und Gegentafel verschiedenfarbiges Papier (gelb und blau) gewählt; der Eindruck, den die beiden Farben, schon jede für sich und sodann beide bei abwechselnder Benutzung auf das Auge machen, ist so unangenehm,

daß die Tafel — wie die angeführten Schubertschen Tafeln — schwerlich Eingang in die Rechenpraxis finden wird. Der erwähnte Vorschlag von Mehmke ließe sich bei der Tafel — unter Wegfall des farbigen Papiers — in einfachster Weise ausführen; ein Versuch würde bei der sonst zweckmäßigen Anordnung sicher befriedigen.

Die Tafel kommt auch als siebenstellige in Betracht, und zwar als sogenannte abgekürzte Logarithmentafel. Die Logarithmen und Antilogarithmen sind nämlich siebenstellig angegeben. Der Grundgedanke, bestehend in der Einführung von „Interpolationskonstanten", die bei der einen Tafel für je eine Sorte, bei der andern für die ganze Tafel konstant sind, wurde vom Herausgeber in Band 48, S. 457 dieser Zeitschrift eingehend behandelt.

Da aber einerseits genügend viele und zweckmäßig eingerichtete (ungekürzte) siebenstellige Logarithmentafeln vorhanden sind, und andrerseits die Vorteile einer abgekürzten Tafel erst von etwa 10 Stellen an ernstlich in Betracht kommen, so darf der Nutzen der vorliegenden Tafel als siebenstelliger als nicht groß bezeichnet werden.

Stuttgart. P. Werkmeister.

Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst einigen physikalischen und astronomischen Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt von **C. Rohrbach,** Dr. phil., Direktor der städtischen Realschule zu Gotha. Vierte Auflage. Gotha 1904, E. F. Thienemann. *M* —.80.

In bezug auf Anordnung, Druck und Reichhaltigkeit darf diese vierstellige Logarithmentafel als mustergültig bezeichnet werden.

An größeren Tafeln sind vorhanden: Gewöhnliche Logarithmen der natürlichen Zahlen; natürliche Werte der goniometrischen Funktionen, Kreisbogen und Sehnen; Logarithmen der trigonometrischen Funktionen; natürliche Logarithmen der natürlichen Zahlen und die Quadrate der Zahlen 1 bis 1000.

Von den zahlreichen Hilfstafeln sei erwähnt die graphische Darstellung der goniometrischen Funktionen.

Stuttgart. P. Werkmeister.

Thermodynamische Rechentafel (für Dampfturbinen) von Dr. Ing. **Reinhold Proell,** Dipl.-Ing. Berlin 1904, Julius Springer. 1 *M*.

In übersichtlicher Weise hat der Verfasser auf einem Blatt sieben Wechselbeziehungen zwischen je drei Zustandsgrößen des Dampfes dargestellt. Die Tafeln sind nach der Methode „des points alignés" (nach d'Ocagne) oder Methode der „fluchtrechten Punkte" (nach Mehmke) entworfen. Die mancherlei Vorzüge dieser Art von graphischen Tafeln gegenüber den cartesischen treten auch bei der vorliegenden Anwendung klar hervor.

Da die Tafel verschiedenen Maschineningenieuren ein willkommenes Rechenhilfsmittel sein wird, so dürfte sie dazu beitragen, daß die graphischen Tafeln im allgemeinen und solche nach der Methode der fluchtrechten Punkte im besonderen auch in Deutschland noch weitere Anwendungen in der Rechen*praxis* finden.

Stuttgart. P. Werkmeister.



Riems Rechentabellen für Multiplikation. Hilfsbuch für Handel und Gewerbe mit einem Vorworte von Professor Dr. R. Kinkelin. Zweite Stereotypauflage. München 1901, Ernst Reinhardt. Geb. 7,80 *M.*

Als obere Grenze ist für den Multiplikator 100, für den Multiplikanden 10000 gewählt, so daß der Tafel die Produkte von ein- und zweistelligen Zahlen mit einstelligen *unmittelbar* entnommen werden können; durch Benutzung der in die Tafel aufgenommenen Proportionaltäfelchen können in einfachster Weise — ohne Umblättern — die Produkte von zweistelligen Zahlen mit mehr als einstelligen bestimmt werden. Auch bei der Muliplikation von zwei vierstelligen Zahlen leistet die Tafel gute Dienste; ein einmaliges Umwenden und die Addition zweier Zahlen führt zum gewünschten Ziele.

Die *Einrichtung* der Tafel ist folgende: Die einzelnen Seiten (Doppelseiten) sind mit den Multiplikatoren 2—100 überschrieben. Ebenso wie die Multiplikanden sind die Produkte in drei Teile zerlegt; jede Tafelseite zerfällt nämlich in zwei Hälften, von denen die eine als horizontalen Eingang die Tausender und als vertikalen die Hunderter und Zehner des Multiplikanden enthält; die andere Hälfte besitzt als horizontalen Eingang die Einer, als vertikalen — gemeinschaftlich mit der linken Hälfte — die Hunderter und Zehner. Der erste Teil — Hundert-, Zehn- und Eintausender — des zerlegten Produkts wird der ersten Tafelhälfte, der zweite (Hunderter und Zehner) und dritte Teil (Einer) der zweiten Tafelhälfte entnommen.

Der Nachteil, der in der Dreiteilung von Multiplikand und Produkt, gegenüber einer Zweiteilung bei den Crelleschen Tafeln, liegt, ist unbedeutend im Blick auf das dadurch erreichte geringe Format (Kleinquart) und die geringe Seitenzahl (98 Doppelseiten) der Tafel.

Auch bei der Division von sechsstelligen Zahlen durch zweistellige ist die Tafel brauchbar, obwohl hier — wie bei jeder Multiplikationstafel — die Anwendung nicht ganz so einfach sich gestaltet wie bei der Multiplikation.

Vielseitige Anwendungsfähigkeit, geringer Preis, kleines Format und klarer, übersichtlicher Druck — es sind die alten englischen Ziffern in Anwendung gekommen — machen die Tafel zu einer empfehlenswerten für Multiplikationen, bei welchen der eine der beiden Faktoren in der Regel eine nur *zwei*stellige Zahl ist; andernfalls werden wohl die meisten Rechner zu einer Tafel greifen, welche die Produkte von zwei dreistelligen Faktoren direkt enthält.

Stuttgart. P. Werkmeister.

Springende Logarithmen. Abgekürzte fünfstellige Logarithmentafel mit zunehmenden Grundzahl-Stufen. Zum Gebrauch für technische Rechnungen bearbeitet von **Ernst A. Brauer,** Professor an der Technischen Hochschule in Karlsruhe. Karlsruhe 1901, G. Braunsche Hofbuchdruckerei. *M.* —.90.

Bei den meisten Logarithmentafeln bilden die Logarithmanden eine arithmetische Reihe mit der Differenz eins. Dies erscheint nicht ganz gerechtfertigt, wenn den Rechnungen, für welche eine Logarithmentafel benützt werden soll, Größen zugrunde liegen, die alle mit demselben relativen Fehler behaftet sind. Hat man z. B. eine Zahl a und eine $n$mal größere,

so ruft ein bei a und na gleich großer relativer Fehler einen $n$mal größeren absoluten Fehler bei der Zahl na hervor als bei der Zahl a. „Diese Ungleichmäßigkeit ist durch das Genauigkeitsbedürfnis bei naturwissenschaftlichen Rechnungen nicht begründet.“ In der vorliegenden Tafel der „springenden Logarithmen“ sind daher die Logarithmanden so angeordnet, daß

zwischen 1000 und 2000 ihre Differenz 1
„ 2000 „ 3000 „ „ 2
„ 3000 „ 4000 „ „ 3

beträgt usw. Hierdurch wird der Umfang der Tafel beträchtlich verringert, so daß die Logarithmen der Zahlen 1000 bis 10000 auf acht Seiten untergebracht sind.

Die in der Tafel angegebenen Logarithmen-Differenzen, die sich auf die Logarithmandendifferenz 1 beziehen, dürften wohl in den meisten Fällen entbehrlich sein, wenn die Tafel bei technischen Rechnungen Anwendung findet, für die sie auch bestimmt ist. Mit Vorteil kann die Tafel angewendet werden, wenn einerseits die Rechnung mit einer gewöhnlichen fünfstelligen Tafel übertrieben genau wäre und man andrerseits eine größere Genauigkeit, als sie der Rechenschieber bietet, erreichen möchte.

Ein „Wetteifern“ der Tafel mit dem Rechenschieber dürfte jedoch in Bezug auf die Schnelligkeit sicher zugunsten des letzteren ausfallen.

Stuttgart. P. Werkmeister.

Graphische Tafel zur Berechnung gewalzter, genieteter und hölzerner Träger von Ing. **T. Rieger,** Brünn. K. 8,00.

Bei der Bestimmung des Querschnitts von gleichmäßig belasteten, an ihren Enden unterstützten Trägern rechnet man nach den bekannten Gleichungen:

$$M = \frac{gl^2}{8}, \quad W = \frac{M}{k} \quad \text{und} \quad \theta = eW,$$

in denen M das Maximalbiegungsmoment, g die Belastung in kg/m, l die Länge des Trägers, W das Widerstandsmoment, k die zulässige Druckspannung des benützten Materials, θ das Trägheitsmoment des Querschnitts und e den Abstand der äußersten Faserschichte von der Neutralfaserschichte bedeutet.

Für diese drei Gleichungen sind die beiden graphischen Tafeln entworfen, und zwar nach der Methode der fluchtrechten Punkte. Eine Annehmlichkeit dieser Methode, nämlich daß man in einfacher und übersichtlicher Weise an *einer* Skala verschiedene Bezifferungen anbringen kann, ist mehrfach angewendet; auch die Möglichkeit, eine, zwei Skalensystemen gemeinschaftliche Skala nur einmal zu zeichnen, ist auf der einen Tafel ausgenützt worden.

Für gewalzte und genietete Träger erhält man den Querschnitt auf der Skala des Trägheitsmomentes, welche als Nebenbezifferung die „Profilnummer“ (nach den Typen des österr. Ingenieur- und Architektenvereins) trägt.

Für hölzerne Träger, bei denen gewöhnlich das Verhältnis der Breite zur Höhe des Querschnitts ein gewünschtes ist, wurde eine besondere Tafel entworfen, bei welcher die eine der auf den Querschnitt sich beziehenden Skalen zweierlei Bezifferung trägt.

In bezug auf die Ausführung der Tafeln wäre zu wünschen, daß man statt der grauen Druckfarbe schwarze gewählt hätte.

Stuttgart. P. Werkmeister.

Vierstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen, in zwei Farben, zusammengestellt von Dr. **Hermann Schubert,** Professor an der Gelehrtenschule des Johanneums. 2. Auflage. Leipzig 1903, Sammlung Göschen. Geb. ℳ —.80.

Außer einem Anhang, enthaltend die üblichen Hilfstafeln für Mathematik, Physik, Astronomie und Chemie enthält das Werkchen die vier Tafeln: „Von der Zahl zum log!, von den Winkeln zu den Logarithmen der trigonometrischen Funktionen!, von den Logarithmen der trigonometrischen Funktionen zu den Winkeln! und von den Logarithmen der Zahlen zu den Zahlen selbst!" Durch die ganze Sammlung sind die Logarithmen braun, die übrigen Zahlen blau gedruckt.

In bezug auf die Reihenfolge der einzelnen Tafeln wäre jedenfalls zu wünschen, daß die Gegentafel zu der Tafel „Von der Zahl zum log!" unmittelbar hinter dieser käme, ein Irrtum wäre wohl durch den zweifarbigen Druck ausgeschlossen. Noch näher liegt aber der Wunsch nach einfarbigem schwarzen Drucke, da der schädigende Einfluß des blau-roten Druckes auf das Auge so groß ist, daß die Tafeln für den praktischen Rechner in der vorliegenden Ausführung überhaupt nicht in Betracht kommen können.

Der einzige Vorteil der Gegentafeln besteht in dem Wegfall der Interpolation; bei der ersten Tafel „Von der Zahl zum log!" kann jedoch bei einer Logarithmendifferenz von höchstens vier Einheiten der 4. Dezimale von einer Interpolationsarbeit kaum die Rede sein, so daß für einen einigermaßen geübten Rechner die Gegentafel überhaupt entbehrlich ist. Auch die Gegentafel zur Tafel der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen kann entbehrt werden, denn nach Wegfall der Gegentafeln bliebe genug Raum, um die Intervalle des Winkels zu verkleinern, so daß auch hier der Vorteil der Gegentafel verschwindet gegenüber dem geringen Nachteil einer Interpolation mit nur einziffrigen Zahlen.

Stuttgart. P. Werkmeister.

Die Polhöhe von Potsdam. III. Heft. Veröff. d. k. preuß. geod. Instit. Neue Folge Nr. 20. 4°. 51 S. Berlin 1905.

In diesem Heft berichtet Herr M. Schnauder über die abschließenden Beobachtungen der seit 1893 von den Herren O. Hecker und M. Schnauder in Potsdam in einheitlicher Weise vorgenommenen Polhöhenbestimmungen; in direktem Anschluß an Heft II (Veröff. Neue Folge Nr. 1; Berlin 1900), das die Jahre 1894 bis 1897 enthielt, behandelt die Schrift den Zeitraum 1898/99. Von dem Detail der Bearbeitung heben wir nur kurz einiges heraus: die Beobachtungen sind nach der Horrebow-Talcott-Methode angestellt, zu deren Ausübung ein vergleichsweise kleines Instrument (68 mm Öffnung, 87 cm Brennweite) diente. Das Programm, eingehend dargelegt im II. Heft, umfaßte 10 gut um den Himmel herum verteilte Sterngruppen mit je 6 Sternpaaren. Für eine einzelne Polhöhe stellt sich der zufällige mittlere Fehler auf $\pm 0,''17$, und es hat sich weder ein systematisch wirkender instrumenteller noch ein persönlicher Fehler nachweisen lassen.

Besonderes Interesse darf die im letzten Teil angebahnte homogene Bearbeitung des gesamten an demselben Instrument seit 1893 gewonnenen und aus 6537 Beobachtungen bestehenden Polhöhenmaterials beanspruchen. Die schon von dem Einfluß der nach Albrecht angenommenen Breiten-

variationen befreiten Messungen zieht Schnauder zu Monatsmitteln zusammen, die nun einen deutlichen Gang von jährlicher Periode und 0,"06 Amplitude aufweisen. Das, was sich jetzt äußert, ist der Einfluß des durch den japanischen Astronomen H. Kimura (Astron. Nachr. Nr. 3783; 1902) entdeckten von der Lage des Beobachtungsortes unabhängigen, veränderlichen sog. z-Gliedes der Polhöhenschwankung, dessen Erklärung bis jetzt noch nicht zweifelsfrei gelang. Beachtenswert und plausibel sind die Ausführungen, die Herr Schnauder dem Phänomen widmet; er neigt zu der Ansicht, daß das Kimura-Glied den großen Schwankungen zur Last fällt, denen die meteorologischen Verhältnisse im Jahre unterliegen. Sie ziehen ihrerseits wieder eine jährliche Periode der astronomischen Strahlenbrechung nach sich, die aber nur unter besonders günstigen Umständen, wie sie u. a. die Potsdamer Beobachtungsreihe in ihrer Genauigkeit und der großen Zahl der Messungen darbietet, von den viel größeren zufälligen Schwankungen getrennt werden kann.

Der vorläufige Endwert für die Polhöhe der großen Kuppel auf dem Hauptgebäude des Astrophysikalischen Observatoriums ergibt sich zu

$$\varphi = + 52^{0}22'55,''94 \qquad \text{mittl. Fehler} \pm 0,''02.$$

Straßburg i. E. WIRTZ.

A. Marcuse. Handbuch der geographischen Ortsbestimmung für Geographen und Forschungsreisende. Mit 54 Abbildungen und 2 Sternkarten. 8⁰. X u. 342 S. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn 1905.

Schon vor drei Jahren brachte der gleiche Verlag (Vieweg) ein Buch[1]) über denselben Stoff von ähnlichem Umfange heraus. In der Behandlung des Themas weichen indes beide Bearbeitungen erheblich von einander ab.

Herrn Marcuses Schrift zerfällt in vier Hauptteile. Der erste befaßt sich mit den Grundbegriffen der astronomischen Geographie, die durch einen klar und einfach geschriebenen Text und einige gut gewählte Figuren erläutert werden. Das Kapitel enthält alles das — und nur das — dessen der Geograph zum vollen Verständnis der rechnerischen und manuellen Operationen bedarf, die ihm im weiteren Lehrgang des Werkes erwachsen. Durchweg verzichtet der Verfasser auf eine strenge Entwicklung der Formeln; er begnügt sich vielmehr damit, teils die Herleitung anzudeuten, teils die Relationen nur mitzuteilen oder plausibel zu machen. Der zweite Teil zählt die rechnerischen Hilfsmittel auf; hier begrüßt man insbesondere die orientierende Besprechung der astronomischen Ephemeriden, Tafelsammlungen, Logarithmentafeln und Rechentabellen, die für die Zwecke geographischer Forschung in Betracht kommen. Die Grundzüge der Interpolations- und Ausgleichungsrechnung erfahren eine zu Anwendungen einfacher Art hinreichende Darlegung.

Das engere Thema der Ortsbestimmung beginnt im dritten Teil mit den instrumentellen Hilfsmitteln. Das Chronometer findet eingehende Würdigung, die sich auf Konstruktion, Verhalten und Behandlung erstreckt und die neuesten Untersuchungen berücksichtigt. Von den Instrumenten zur Winkelmessung werden nur zwei beschrieben: das Universal und der

1) P. Güßfeldt, Grundzüge der astronomisch-geographischen Ortsbestimmung auf Forschungsreisen. Braunschweig 1902; vgl. diese Ztschr. Bd. 49, S. 283.

Butenschönsche Libellenquadrant. Die anderen Spiegelinstrumente (Sextanten, Prismenkreise) verweist der Verfasser unter das astronomische Rüstzeug des Seefahrers; dagegen haben „neue und vielseitige Erfahrungen ergeben, daß ein zweckmäßig konstruiertes Universal das eigentliche 'Faktotum' des Forschers auf *Landreisen* bildet.“ Demnach ist denn auf die Beschreibung des Universalinstrumentes, seiner Handhabung und Theorie liebevolle Sorgfalt verwandt; mehrere Abbildungen einzelner Teile und ganzer Instrumente unterstützen die Anschaulichkeit des Vortrages.

Die Methoden der geographischen Ortsbestimmung (4. Teil), die Herr Marcuse näher diskutiert, sind naturgemäß nur solche, die sich an einem kleineren Reise-Universal ausführen lassen. Für die Zeitbestimmung behandelt er die einzelne Höhe am ersten Vertikal und korrespondierende Höhen desselben Gestirns. Reicher bedenkt er die Breitenbestimmung: neben der einzelnen Höhe werden die Zirkummeridianhöhen, die Polarishöhe, einige Ersatzmethoden und die Gaußsche Methode (Durchgänge dreier Sterne durch den gleichen Almukantarat) erläutert. Die Längenbestimmung hinwiederum beschränkt sich auf Sternbedeckungen durch den Mond, Mondhöhen und Chronometerübertragungen; die Vorausberechnung der Sternbedeckungen wird in enger Anlehnung an Stecherts Tafeln gelehrt; der Abdruck dreier kleiner Tafeln ermöglicht eine einfache Anwendung.

Mit „besonderen Problemen der geographischen Ortsbestimmung“ beschäftigt sich der Anhang. Er setzt die genäherte Ortsbestimmung ohne winkelmessende Instrumente nach Harzer auseinander, der zwei Vertikalebenen durch gespannte Schnüre festlegt und Sterndurchgänge durch die so fixierten Azimute beobachtet. In Verbindung mit der Ortsbestimmung im Luftballon gelangt dann die Auflösung sphärischer Dreiecke mittels der *Merkatorfunktion* zu ausführlicher und mit Recht befürwortender Darstellung. Der Note S. 310, die den Wunsch nach einer Neuherausgabe der Börgenschen Tafeln der Merkatorfunktion (vielleicht in etwas anderer Redaktion) ausspricht, möchte auch Ref. beipflichten. Für die aeronautische Astronomie erachtet Marcuse den Butenschönschen Libellenquadranten als das geeignetste Instrument zur Höhenmessung und die abgedruckte Karte der Ballonfahrt A. Wegeners von Berlin nach Beuthen gibt diesem Urteil Recht. Eine vierstellige Tafel der Merkatorfunktion, speziell für den Gebrauch im Ballon gedacht, bildet den Schluß des Buches, in dessen Rahmen übrigens die beiden angehängten wenig befriedigenden Sternkarten nicht hineinpassen.

Nach Anlage und Ausführung erreicht die Schrift ihr Ziel, ein Handbuch für den Geographen und Forschungsreisenden zu sein, durchaus; überdies wird sie dem Studierenden bei Beobachtungen am Universal Nutzen bringen. In keiner Weise kommt der Verfasser freilich dem Liebhaber der Spiegelinstrumente entgegen, deren sich J. Bohnenberger[1]) und W. Jordan[2]) mit ebensoviel Sachkenntnis wie Wärme angenommen haben.

Straßburg i. E. WIRTZ.

---

1) J. G. F. Bohnenberger, Anleitung zur geographischen Ortsbestimmung vorzüglich mittels des Spiegelsextanten, Göttingen 1795; 2. Aufl. Bearb. von G. A. Jahn, Göttingen 1852.

2) W. Jordan, Grundzüge der astronomischen Orts- und Zeitbestimmung, Berlin 1885.

Verlag von B. G. TEUBNER in LEIPZIG und BERLIN.

Lehrbuch der Kristalloptik

von **Dr. F. Pockels**

a. o. Professor für Physik an der Universität Heidelberg

Mit 168 Figuren im Text und 6 Doppeltafeln.

[X u. 519 S.] gr. 8. 1906. In Leinwand geb. n. *M.* 16.—

In diesem Buch soll in erster Linie den Physikern, aber auch den Mathematikern und Mineralogen, die sich über die Probleme und Ergebnisse der Kristalloptik näher zu unterrichten wünschen, eine möglichst vollständige Übersicht der gegenwärtigen Kenntnisse auf diesem Gebiete der Optik geboten werden. Um auch den mit der theoretischen Physik weniger vertrauten Lesern das Eindringen zu erleichtern, werden die Gesetze der Lichtfortpflanzung in Kristallen zunächst aus Beobachtungstatsachen mit Hilfe passender Verallgemeinerungen abgeleitet — also auf dem Wege, der in der Hauptsache auch derjenige der historischen Entwicklung gewesen ist —, und dann erst wird gezeigt, wie diese Gesetze sich aus den Differentialgleichungen der verschiedenen Lichttheorien ergeben. Von letzteren wird übrigens nach kurzer Charakterisierung der mechanischen Theorien weiterhin nur die elektromagnetische Theorie nebst ihren modernen, zur Erklärung der Dispersion, des Drehungsvermögens und der Absorption notwendigen Erweiterungen herangezogen.

Dem Zwecke des Buches entprechend finden auch die Beobachtungsmethoden sowie die Beobachtungsresultate eingehende Besprechung, während auf detaillierte Beschreibung der Instrumente allerdings verzichtet werden mußte, was aber um so eher angängig schien, als in dieser Hinsicht z. B. der „Grundriß der physikalischen Kristallographie" von Th. Liebisch alles Wünschenswerte bietet.

Dank dem Entgegenkommen des Herrn Dr. W. Hauswaldt konnten eine Anzahl von dessen vortrefflichen photographischen Aufnahmen von Interferenz- und Absorptionserscheinungen reproduziert und so eine weit bessere Veranschaulichung dieser Erscheinungen geboten werden, als es durch schematische Figuren allein möglich ist.

Einleitung in die Funktionentheorie.

Von

O. Stolz, weiland Professor an der Universität Innsbruck

und

J. A. Gmeiner, Professor an der Universität Innsbruck.

2., umgearbeitete und vermehrte Auflage der von den Verfassern in der „theoretischen Arithmetik" nicht berücksichtigten Abschnitte der „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von O. Stolz.

2 Abteilungen in einen Band gebunden. [X u. 598 S.] gr. 8. 1905. geb. n. *M.* 15.—
Erste Abteilung. Mit 10 Figuren im Text. [VI u. 242 S.] gr. 8. 1904. geb. n. *M.* 6.—
Zweite Abteilung. Mit 11 Fig. im Text. [VIII u. S. 243—598.] gr. 8. 1905. geb. n. *M.* 9.—

Schon in der „theoretischen Arithmetik" wurde die eindeutige Funktion einer reellen Veränderlichen eingeführt und verwendet; jedoch auf die Erklärung der Stetigkeit einer solchen Funktion brauchte dort nicht eingegangen zu werden. Nunmehr tritt dieser Begriff in den Vordergrund. Dabei kann die unabhängige Veränderliche sowohl reell, als auch komplex sein. Im Falle eines komplexen Argumentes gelingt es, eine Klasse von Funktionen zu bilden, wofür eine wirkliche Theorie geschaffen werden kann. Nach Weierstraß sind dies die monogenen analytischen Funktionen.

Unsere „Einleitung" zerfällt in die folgenden Abschnitte: I. Die reelle Veränderliche und ihre reellen Funktionen. II. Reelle Funktionen von zwei und mehr reellen Veränderlichen. III. Komplexe Veränderliche und Funktionen. IV. Die ganzen rationalen Funktionen. V. Die ganzen Potenzreihen. VI. Kriterien für Konvergenz und Divergenz von unendlichen Reihen. VII. Die monogene analytische Funktion einer Veränderlichen nach Weierstraß. VIII. Die Kreisfunktionen. IX. Die unendlichen Produkte. X. Die endlichen und XI. die unendlichen Kettenbrüche.

Vom IV. Abschnitte an wird, soweit dies nach der Natur der Sache möglich ist, ein Unterschied zwischen reellen und komplexen Werten der Veränderlichen und Konstanten nicht mehr gemacht, wodurch eine wesentliche Vereinfachung der Darstellung erzielt wird. — Der VII. Abschnitt ist neue Zugabe zur ersten Bearbeitung der übrigen Abschnitte in den „Vorlesungen über allgemeine Arithmetik" von Stolz. Sämtliche Abschnitte sind mit zugehörigen Übungen versehen.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH † O. SCHLÖMILCH.

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856–1896) UND M. CANTOR (1859–1900).

ORGAN FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK.

GEGENWÄRTIG

UNTER MITWIRKUNG VON C. VON BACH, R. HELMERT, F. KLEIN, C. VON LINDE, H. A. LORENTZ, H. MÜLLER-BRESLAU, H. SEELIGER, H. WEBER

HERAUSGEGEBEN VON

R. MEHMKE IN STUTTGART UND C. RUNGE IN GÖTTINGEN.

54. BAND. 4. HEFT.

MIT 36 FIGUREN IM TEXT.

Ausgegeben am 26. Juli 1907.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK.

HERAUSGEGEBEN VON PROF. DR. R. MEHMKE UND PROF. DR. C. RUNGE.
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG, POSTSTRASSE 3.

☞ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Rezensionsexemplare usw.) sind an den geschäftsführenden Redakteur:

Prof. Dr. R. Mehmke, Stuttgart-Degerloch

zu richten. Es nimmt aber auch Prof. Dr. C. Runge, Göttingen, Goldgraben 20, Sendungen für die Redaktion an.

☞ Die Herren Verfasser erhalten unentgeltlich von größeren Aufsätzen 30 mit Umschlag versehene Sonderabdrücke, von kleineren Beiträgen, Mitteilungen, Rezensionen usw. 10 Abzüge der betr. Seiten; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☞ Jeder Band der Zeitschrift umfaßt 28 Druckbogen in 4 Heften und kostet 20 Mark; es werden jährlich etwa 6 Hefte ausgegeben. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.

Berichtigung zum dritten Hefte dieses Bandes: S. 267, Z. 4 v. u. muß es heißen: dem Ausbau der Anlage und der Abhaltung von Vorlesungen betraut . . .

☞ Zum Abdruck in den nächsten Heften gelangen Beiträge der Herren:

O. Bergmann, J. Boyko, B. Cohn, M. Distell, K. Doehlemann, A. Egerer, M. Einhorn, A. Francke, K. Fuchs, v. Gleich, A. Grünwald, A. Härpfer, K. Heun, A. Jatho, K. Kreul, R. Mehmke, B. Meidell, O. Meißner, W. Fr. Meyer, G. Mie, M. Milankovitch, E. Müller, R. Müller, F. Nußbaum, A. v. Obermayer, J. V. Pexider, P. Riebesell, C. Runge, W. Scheufele, Fr. Schilling, Fr. Schur, R. Skutsch, A. Sommerfeld, P. Stäckel, E. Stübler, A. Timpe, M. Tolle, Th. Vahlen, Ph. Weinmeister, P. Werkmeister, K. Wieghardt, Willers, C. W. Wirtz, E. Wölffing.

Die Bewegung in der Ebene als Berührungstransformation.

Von Friedrich Schilling in Danzig-Langfuhr.

Zweite Abhandlung.

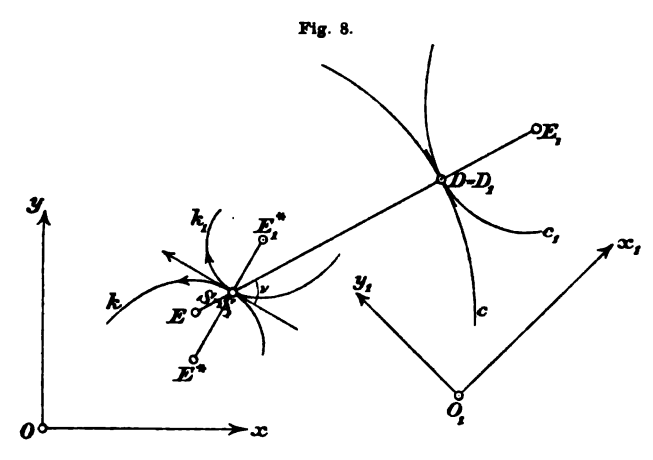
Inhalt.

§ 5.

Ableitung der Savaryschen Formel aus der erweiterten Berührungstransformation.

In folgender Figur 8 seien k und k_1 beliebig gegebene Polbahnen zweier Systeme Σ und Σ_1 mit dem momentanen Pol $S = S_1$

Fig. 8.



(vgl. § 6), c und c_1 irgend zwei einander entsprechende Kurven, E und E_1 ihre Krümmungsmittelpunkte für ihren momentanen Berührungspunkt $D = D_1$ und also

$$r = DE, \quad r_1 = DE_1$$

die Krümmungsradien. Ferner sei (zunächst von einer genaueren Vorzeichenbestimmung abgesehen)

$$e = SE, \qquad e_1 = SE_1$$

und ν gleich dem Winkel zwischen der gemeinsamen Normalen der Kurven c, c_1 und der gemeinsamen momentanen Tangente der Polbahnen. Die *Euler-Savarysche Formel* lautet dann in der gewöhnlich gegebenen Form:

$$\left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e}\right) \sin \nu = C,$$

wo C in jedem Momente eine Konstante ist. Und zwar ist, da ja auch k und k_1 einander entsprechende Kurven sind,

$$C = \frac{1}{e_1^*} - \frac{1}{e^*},$$

wo e^* und e_1^* (wieder zunächst vom Vorzeichen abgesehen) die Krümmungsradien von k und k_1 für den momentanen Pol sind. Die Kinematik zeigt ferner, daß auch

$$C = \frac{\omega}{u} \tag{64}$$

ist, wo ω die *„momentane relative Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ_1 in Σ“, u die „momentane Wechselgeschwindigkeit des Pols S“* bedeutet.[1])

Die Savarysche Formel gibt also einen einfachen Zusammenhang an zwischen den Krümmungen irgend zweier entsprechenden Kurven der Systeme Σ, Σ_1.

Doch ist es notwendig, die Größen e, e_1 und ebenso r, r_1 auch hinsichtlich der Vorzeichen und analog die Größe ν *eindeutig* zu definieren, was bei der kinematischen Ableitung der Savaryschen Formel in den Lehrbüchern der Kinematik zumeist nicht geschieht. Wir betrachten zunächst allein unseren speziellen Fall der äußeren Kreisbewegung.

Es seien auch hinsichtlich der Vorzeichen

$$e = \overrightarrow{SE}, \qquad e_1 = \overrightarrow{S_1E_1};$$
$$l = \overrightarrow{SD}, \qquad l_1 = \overrightarrow{S_1D_1};$$
$$r = e - l = \overrightarrow{DE}, \qquad r_1 = e_1 - l_1 = \overrightarrow{D_1E_1}$$

---

1) Vgl. z. B. Burmester, *Lehrbuch der Kinematik*, Leipzig 1888, S. 125 oder *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. IV, 1 (Artikel Schoenflies und Grübler, Kinematik) S. 214 (an der letzten Stelle ist indes durch einen Druckfehler $\frac{u}{\omega}$ statt $\frac{\omega}{u}$ gesetzt.)

wo je im System Σ und Σ_1 die positive Richtung der momentan aufeinandergefallenen Normalen SD und S_1D_1 unabhängig von einander nach S. 298 *durch die Winkel $\lambda + \mu$ und $\lambda_1 + \mu_1$ der Linienelemente in D, D_1 festgelegt ist.* Diese beiden positiven Richtungen von SD und S_1D_1 können (beim Zusammenfallen der Normalen) übereinstimmen oder nicht; je nachdem ist m eine grade oder eine ungrade Zahl (vgl. Gleichung (47c) S. 303). Endlich sei

$$\nu = \frac{\pi}{2} - \mu$$

oder

$$\sin \nu = \cos \mu = (-1)^m \cos \mu_1,$$

wo μ und μ_1 eindeutig die zum gemeinsamen Linienelement der Kurven c, c_1 gehörenden Winkel in den Systemen Σ, Σ_1 sind (vgl. S. 299 und die Gleichung (47b) S. 303). Entsprechend sind die Größen e^*, e_1^*, r^*, r_1^*, l^*, l_1^*, ν^*, μ^*, μ_1^* für die an die Stelle von c, c_1 tretenden Kurven k, k_1 definiert (es ist hier aber stets $l^* = l_1^* = 0$, also $r^* = e^*$ und $r_1^* = e_1^*$, und $\mu^* = 0$ oder $\pm \pi$, ebenso $\mu_1^* = 0$ oder $\pm \pi$).

Nach diesen Festsetzungen lautet *die auch hinsichtlich der Vorzeichen richtige Form der Savary'schen Formel:*

$$\frac{\cos \mu_1}{e_1} - \frac{\cos \mu}{e} = C, \tag{65}$$

wo

$$C = \frac{\cos \mu_1^*}{e_1^*} - \frac{\cos \mu^*}{e^*} = \frac{\omega}{u} \tag{64'}$$

ist.[1])

Auf den Beweis dieser Formel, wie ihn die Kinematik lehrt, wollen wir natürlich hier nicht eingehen. Doch sei schon hier hervorgehoben, daß die Formel (65) ganz allgemein für *beliebige Polbahnen* gilt, wie wir später noch näher sehen werden (S. 354), wenn wir auf letztere die ge-

1) Bei Einführung der Größen Λ, M, L an Stelle von λ, μ, l (vgl. Anm. S. 301) fallen die positiven Richtungen der Normalen SD und S_1D_1 stets zusammen, d. h. es ist stets

$$\mathsf{M} \doteq \mathsf{M}_1, \qquad \cos \mathsf{M} = \cos \mathsf{M}_1$$

(vgl. die Gleichung (47b) S. 303). Die Savarysche Formel lautet dann einfacher:

$$\left(\frac{1}{e_1} - \frac{1}{e}\right) \cos \mathsf{M} = C,$$

wo $e = \overrightarrow{SE}$, $e_1 = \overrightarrow{S_1E_1}$ ist. (Da nur $\cos \mathsf{M}$ in dieser Formel vorkommt, könnte man auch eine *beliebige* unter den beiden Richtungen der Normalen des Linienelements als die *positive* auszeichnen und unter M in der letzten Formel den — konkaven oder konvexen — Winkel dieser Richtung mit der durch $\overline{\Lambda}$ gegebenen Richtung, d. h. der positiven Normalenrichtung der Polbahn für reelles Λ, verstehen.)

naue Definition der eingeführten Größen übertragen. Einstweilen aber bleiben wir bei unserm speziellen Falle der äußeren Kreisbewegung; für ihn ist insbesondere

$$C = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{a+b}{ab}, \tag{64''}$$

d. h.

22. *Im Falle der Kreisbewegung ist die Größe C nicht nur in jedem Momente, sondern überhaupt für den ganzen Verlauf der Bewegung eine Konstante.*

Unsere Aufgabe soll es nun sein, *die Beziehung der Savaryschen Formel* (65) *zu der „erweiterten" Berührungstransformation oder der „Oskulationstransformation" aufzudecken.* An die Spitze der Betrachtung tritt dabei die folgende Definition:

Unter der „Erweiterung" einer gegebenen Berührungstransformation

$$x_1 = X(x, y, p),\ y_1 = Y(x, y, p),\ p_1 = P(x, y, p) \tag{53a,b,c}$$

versteht man die durch die Hinzufügung der Gleichung

$$q_1 = Q(x, y, p, q) = \frac{\frac{\partial P}{\partial x} + p\frac{\partial P}{\partial y} + q\frac{\partial P}{\partial p}}{\frac{\partial X}{\partial x} + p\frac{\partial X}{\partial y} + q\frac{\partial X}{\partial p}} \tag{53d}$$

erweiterte Transformation der Variablen (x, y, p, q) in die Variablen (x_1, y_1, p_1, q_1).[1])

Die wesentliche Eigenschaft der erweiterten Berührungstransformation beruht in folgendem:

Jeder „Krümmungselementverein"[2]) *wird wieder in einen solchen übergeführt,* eine Eigenschaft, die für das Bestehen der Transformation (53a,b,c,d) auch hinreichend ist (natürlich zusammen mit der Eigenschaft, daß jeder Linienelementverein wieder in einen Linienelementverein übergeführt wird).

Wir behaupten nun:

23. *Die Gleichung* (53d) *ist mit der Savaryschen Formel im Wesen identisch, d. h. die erweiterte Berührungstransformation findet geradezu in der Savaryschen Formel ihren Ausdruck.*

Da die oben eingeführte Größe $r = \overrightarrow{DE}$ (abgesehen vom Vorzeichen) gleich dem momentanen Krümmungsradius der Kurve c ist, so gilt zunächst:

$$r = \frac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{q}$$

1) Das Nähere gibt in kurzer Darstellung z. B. Liebmann, *Lehrbuch der Differentialgleichungen*, Leipzig 1901, § 20, S. 104 ff.

2) Liebmann, l. c. S. 106.

oder nach der Gleichung (28c) S. 296:

$$(66\text{a})\qquad r = \frac{1}{q \cdot \sin^3(\lambda + \mu)}$$

Man überzeugt sich mit Hilfe der Formel:

$$q = \frac{dp}{dx} = -\frac{d \operatorname{cotg}(\lambda + \mu)}{dx}$$
$$= \frac{1}{\sin^2(\lambda + \mu)} \cdot \frac{d(\lambda + \mu)}{dx}$$

leicht, daß diese Gleichung nun auch hinsichtlich des Vorzeichens stets richtig ist. (Vgl. als Beispiele die Fig. 9a,b). Analog gilt:

$$(66\text{b})\qquad r_1 = \frac{1}{q \sin^3(\lambda_1 + \mu_1)}.$$

Die Savarysche Formel (65) läßt sich daher in die folgende Form überführen:

$$(65')\qquad \frac{\cos \mu_1}{l_1 + \frac{1}{q_1 \sin^3(\lambda_1 + \mu_1)}} - \frac{\cos \mu}{l + \frac{1}{q \sin^3(\lambda + \mu)}} = C = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

die wir für den Nachweis unsrer obigen Behauptung zugrunde legen wollen. Und zwar wollen wir diesen Nachweis in doppelter Weise führen:

Fig. 9a.

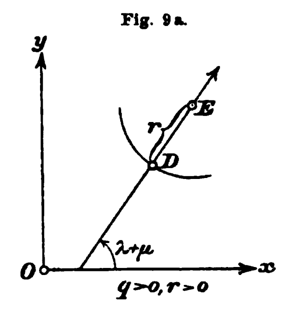
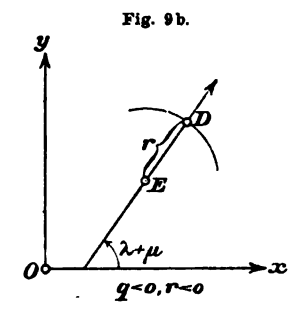


Fig. 9b.



I) indem wir mehr geometrisch-anschaulich gemäß der soeben (S. 340) angeführten wesentlichen Eigenschaft der Oskulationstransformation direkt die Gleichung (65′) ableiten,

II) indem wir rein analytisch die Gleichung (53d) in die Gleichung (65′) überführen.

I. Von den drei Krümmungselementvereinen, die es überhaupt gibt[1]), nämlich der Gesamtheit der Krümmungselemente desselben Linienelements ($x = x_0, y = y_0, p = p_0$), einer Kurve ($y = f(x), p = f'(x), q = f''(x)$) oder eines Punktes ($x = x_0,\ y = y_0,\ q = \infty$; „Nullkreis") kommen er-

1) Liebmann, l. c. S. 105.

sichtlich allein die beiden letzten für unsern Beweis in Betracht[1]), mithin nur die beiden Fälle:

α) Im System Σ ist eine Kurve mit ihren Krümmungselementen, im System Σ_1 die entsprechende Kurve mit ihren Krümmungselementen gegeben,

β) im System Σ ist ein Punkt mit seinen Linienelementen, wobei $q = \infty$ ist, und im System Σ_1 die Bahnkurve dieses Punktes mit ihren Krümmungselementen gegeben (oder auch in Σ_1 ein Punkt und in Σ dessen Bahnkurve).

ad α) Im ersten Falle sei durch die drei (regulären) Funktionen des Parameters σ:

$$\lambda = \varphi_1(\sigma),\quad \mu = \varphi_2(\sigma),\quad l = \varphi_3(\sigma) \tag{67}$$

die Kurve in Σ bestimmt; zwischen ihnen muß jedoch eine Beziehung bestehen, da für die Linienelemente der Kurve $p = \frac{dy}{dx}$ gilt oder:

$$p = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial y}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial y}{\partial l} dl}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial l} dl}.$$

Setzt man für p und die partiellen Differentialquotienten ihre Werte aus den Gleichungen (28a, b, c) S. 296 ein, so kommt:

$$\sin(\lambda+\mu)\cdot[(a\cos\lambda + l\cos(\lambda+\mu))\,d\lambda + l\cos(\lambda+\mu)\,d\mu + \sin(\lambda+\mu)\,dl]$$
$$= -\cos(\lambda+\mu)[(-a\sin\lambda - l\sin(\lambda+\mu))\,d\lambda - l\sin(\lambda+\mu)\,d\mu + \cos(\lambda+\mu)\,dl]$$

oder

$$a\sin\mu\, d\lambda = -\,dl, \tag{68}$$

d. h.

Wenn die durch die Gleichungen (67) *bestimmte Schar von* ∞^1 *Linienelementen eine Kurve bilden sollen, müssen jene die Bedingung (68) erfüllen.*

Für die durch die Gleichungen (67) und (68) bestimmte Kurve im System Σ ist dann weiter:

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{\frac{\partial p}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial p}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial p}{\partial l} dl}{\frac{\partial x}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial x}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial x}{\partial l} dl}$$
$$= \frac{\frac{1}{\sin^2(\lambda+\mu)}(d\lambda + d\mu)}{(-a\sin\lambda - l\sin(\lambda+\mu))\,d\lambda - l\sin(\lambda+\mu)\,d\mu + \cos(\lambda+\mu)\,dl}$$

---

1) Denn aus der Bedingung, daß einem Linienelement mit seinen Krümmungselementen im System Σ wieder ein Linienelement mit seinen Krümmungselementen in Σ_1 entspricht, folgt keinerlei Beziehung zwischen den Größen q und q_1.

oder nach der Gleichung (68):

$$\sin^3(\lambda+\mu)\,q = -\frac{d\lambda + d\mu}{(a\cos\mu + l)\,d\lambda + l\,d\mu}.$$

Hieraus folgt

$$l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)} = -\frac{a\cos\mu\,d\lambda}{d\lambda + d\mu}$$

und

$$\text{(69a)} \qquad \frac{\cos\mu}{l + \dfrac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}} = -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{d\mu}{d\lambda}\right).$$

Ebenso ergibt sich:

$$\text{(69b)} \qquad \frac{\cos\mu_1}{l_1 + \dfrac{1}{q\sin^3(\lambda_1+\mu_1)}} = +\frac{1}{b}\left(1 + \frac{d\mu_1}{d\lambda_1}\right).$$

Nun ist nach den Gleichungen (47a, b) S. 303:

$$d\lambda_1 = -\frac{a}{b}\,d\lambda, \quad d\mu_1 = d\mu.$$

Folglich ergibt sich schließlich durch Subtraktion der Gleichungen (69a, b) die Gleichung (65′), d. h.

Im ersten Falle, wo in den Systemen Σ und Σ_1 entsprechende Kurven vorliegen, befriedigen deren entsprechende Krümmungselemente die Gleichung (65′).

ad β). Im *zweiten* Falle sei im System Σ ein Punkt $x = x_0$, $y = y_0$ mit $q = \infty$ und im System Σ_1 die entsprechende Kurve mit ihren Krümmungselementen gegeben. Es ist jetzt:

$$dx = 0 \quad \text{und} \quad dy = 0,$$

oder

$$x^\lambda d\lambda + x^\mu d\mu + x^l dl = 0,$$
$$y^\lambda d\lambda + y^\mu d\mu + y^l dl = 0$$

oder

$$d\lambda : d\mu : dl = \begin{vmatrix} x^\mu & x^l \\ y^\mu & y^l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x^l & x^\lambda \\ y^l & y^\lambda \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x^\lambda & x^\mu \\ y^\lambda & y^\mu \end{vmatrix} = (-l) : (l + a\cos\mu) : al\sin\mu$$

oder

$$\text{(70a, b, c)} \qquad \begin{aligned} d\lambda &= -l\,d\sigma, \\ d\mu &= (l + a\cos\mu)\,d\sigma, \\ dl &= al\sin\mu\,d\sigma. \end{aligned}$$

Nebenbei bemerkt gilt also auch hier die Gleichung (68), so daß sich der Satz ergibt:

24. *Die Gleichungen* (67) *stellen in Verbindung mit den Gleichungen* (28a, b, c) S. 296 *stets dann und nur dann einen Linienelementverein dar,*

wenn die Funktionen φ_i die Gleichung (68) *erfüllen. Dieser Linienelementverein besteht überdies aus den Linienelementen desselben Punktes, wenn noch die Gleichungen* (70a, b) *erfüllt sind.*

Aus den Gleichungen (70a, b) folgt aber weiter für $q = \infty$ wie im vorigen Falle die Gleichung (69a):

$$\frac{\cos\mu}{l + \frac{1}{q \sin^2(\lambda + \mu)}} = \frac{\cos\mu}{l} = -\frac{1}{a}\left(1 + \frac{d\mu}{d\lambda}\right),$$

d. h.

Auch im zweiten Falle, wo im System Σ ein Nullkreis, im System Σ_1 die entsprechende Kurve vorliegt, befriedigen die entsprechenden Krümmungselemente wieder die Gleichung (65').

Hiermit ist dann nach der *ersten Methode* der Satz 23 bewiesen.

II. Bei der in Aussicht genommenen *zweiten Methode* für diesen Beweis gehen wir aus von der Gleichung S. 340:

$$(53\text{d}) \qquad q_1 = \frac{p_1^x + p \cdot p_1^y + q \cdot p_1^p}{x_1^x + p \cdot x_1^y + q \cdot x_1^p}.$$

Es genügt die Beschränkung auf die Umgebungen entsprechender Linienelemente (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1); wir wählen daher der Einfachheit halber wieder $n = n_1 = m = 0$, was ja auch durch zweckmäßige Wahl der Koordinatensysteme sich stets erreichen läßt. (Vgl. S. 310, insbesondere die Gleichungen (47'a, b, c) daselbst.)

Es ist jetzt

$$x_1^x = \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1} \cdot \frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l_1}{\partial x}$$

oder nach den Gleichungen (47'a, b, c)

$$= -\frac{a}{b} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial \mu_1} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\partial x_1}{\partial l_1} \cdot \frac{\partial l}{\partial x}$$

und ferner

$$D \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x} = D_{11}, \quad D \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = D_{12} \text{ usw.,}$$

wo

$$D = \frac{\partial(x, y, p)}{\partial(\lambda, \mu, l)} = \begin{vmatrix} x^\lambda & x^\mu & x^l \\ y^\lambda & y^\mu & y^l \\ p^\lambda & p^\mu & p^l \end{vmatrix}$$

(vgl. die Gleichung (30a) S. 297) und D_{ik} die zugehörigen Unterdeterminanten des Elementes der i^{ten} Zeile und k^{ten} Kolonne bedeuten.[1])

---

1) Baltzer l. c. S. 142, § 12, 2.

Also ist

$$D \cdot x_1^x = -\frac{a}{b} \cdot x_1^{\lambda_1} D_{11} + x_1^{\mu} \cdot D_{12} + x_1^{l} D_{13}$$

und

$$D \cdot (x_1^x + p x_1^y + q x_1^p) = -\frac{a}{b} x_1^{\lambda_1} [D_{11} + p D_{21} + q D_{31}]$$
$$+ x_1^{\mu_1} [D_{12} + p D_{22} + q D_{32}] + x_1^{l_1} [D_{13} + p D_{23} + q D_{33}].$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{11} + p D_{21} + q D_{31}, \\ D_2 &= D_{12} + p D_{22} + q D_{32}, \\ D_3 &= D_{13} + p D_{23} + q D_{33}. \end{aligned}$$

Dann ist

$$(71) \qquad D \cdot (x_1^x + p x_1^y + q x_1^p) = -\frac{a}{b} x_1^{\lambda_1} \cdot D_1 + x_1^{\mu_1} \cdot D_2 + x_1^{l_1} \cdot D_3$$

und analog, da $p_1^{l_1} = 0$ ist:

$$(72) \qquad D \cdot (p_1^x + p p_1^y + q p_1^p) = -\frac{a}{b} p_1^{\lambda_1} \cdot D_1 + p_1^{\mu_1} \cdot D_2.$$

Nun ist nach den Gleichungen (28a, b, c) S. 296:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & x^{\mu} & x^{l} \\ p & y^{\mu} & y^{l} \\ q & p^{\mu} & p^{l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -l \sin(\lambda + \mu) & \cos(\lambda + \mu) \\ p & l \cos(\lambda + \mu) & \sin(\lambda + \mu) \\ q & \frac{1}{\sin^2(l + \mu)} & 0 \end{vmatrix} = -ql - \frac{1}{\sin^3(\lambda + \mu)},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} x^{\lambda} & 1 & x^{l} \\ y^{\lambda} & p & y^{l} \\ p^{\lambda} & q & p^{l} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin\lambda - l \sin(\lambda + \mu) & 1 & \cos(\lambda + \mu) \\ a \cos\lambda + l \cos(\lambda + \mu) & p & \sin(\lambda + \mu) \\ \frac{1}{\sin^2(\lambda + \mu)} & q & 0 \end{vmatrix} = ql + qa \cos\mu + \frac{1}{\sin^3(\lambda + \mu)},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} x^{\lambda} & x^{\mu} & 1 \\ y^{\lambda} & y^{\mu} & p \\ p^{\lambda} & p^{\mu} & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a \sin\lambda - l \sin(\lambda + \mu) & -l \sin(\lambda + \mu) & 1 \\ a \cos\lambda + l \cos(\lambda + \mu) & l \cos(\lambda + \mu) & p \\ \frac{1}{\sin^2(\lambda + \mu)} & \frac{1}{\sin^2(\lambda + \mu)} & q \end{vmatrix} = qal \sin\mu + \frac{a \sin\mu}{\sin^3(\lambda + \mu)}.$$

Also folgt hieraus und aus den Gleichungen (29a, b, c) S. 296:

$$(71') \quad D \cdot (x_1^x + p x_1^y + q x_1^p) = -\frac{a}{b} [b \sin\lambda_1 - l_1 \sin(\lambda_1 + \mu_1)] \cdot \left[-ql - \frac{1}{\sin^3(\lambda + \mu)}\right]$$
$$- l_1 \sin(\lambda_1 + \mu_1) \cdot \left[ql + qa \cos\mu + \frac{1}{\sin^3(\lambda + \mu)}\right]$$
$$+ \cos(\lambda_1 + \mu_1) \cdot \left[qal \sin\mu + \frac{a \sin\mu}{\sin^3(\lambda + \mu)}\right]$$
$$= \Big[qal(\sin\lambda_1 + \sin\mu \cos(\lambda_1 + \mu_1)) - qal_1 \cos\mu \sin(\lambda_1 + \mu_1)$$
$$- qll_1 \frac{a}{b} \sin(\lambda_1 + \mu_1) - qll_1 \sin(\lambda_1 + \mu_1)\Big]$$
$$+ \frac{1}{\sin^3(\lambda + \mu)} \cdot \left[(a \sin\lambda_1 + a \sin\mu \cos(\lambda_1 + \mu_1)) - l_1 \frac{a}{b} \sin(\lambda_1 + \mu_1) - l_1 \sin(\lambda_1 + \mu_1)\right]$$

oder unter Benutzung der Gleichungen (47′b, c) S. 310:

$$= -ql^2 \sin(\lambda_1 + \mu_1) \cdot \frac{a+b}{b} + \frac{\sin(\lambda_1+\mu_1)}{\sin^3(\lambda+\mu)} \cdot \left[a \cos\mu - l \cdot \frac{a+b}{b}\right]$$

oder

$$(71'') \quad D\cdot(x_1^x + p x_1^y + q x_1^p) = qa \sin(\lambda_1+\mu_1) \cdot \left[-l^2 C + \frac{1}{q \sin^3(\lambda+\mu)}(\cos\mu - lC)\right],$$

wo wie oben in der Gleichung (64″) S. 340.

$$C = \frac{a+b}{ab}$$

ist. Analog ist

$$D \cdot (p_1^x + p p_1^y + q \cdot p_1^p) = -\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)} \cdot \left[-ql - \frac{1}{\sin^3(\lambda+\mu)}\right]$$

$$(72') \quad + \frac{1}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)} \cdot \left[ql + qa\cos\mu + \frac{1}{\sin^3(\lambda+\mu)}\right]$$

$$= \frac{1}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)} \cdot \left[\left(ql + \frac{1}{\sin^3(\lambda+\mu)}\right) \cdot \frac{a+b}{b} + qa\cos\mu\right]$$

oder

$$(72'') \quad D(p_1^x + p\cdot p_1^y + q\cdot p_1^p) = \frac{qa}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)} \cdot \left[\left(l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}\right) \cdot C + \cos\mu\right].$$

Durch die Gleichungen (71″) und (72″) geht dann die ursprüngliche Gleichung (53d) S. 344 über in

$$q_1 = \frac{1}{\sin^3(\lambda_1+\mu_1)} \cdot \frac{\left(l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}\right) \cdot C + \cos\mu}{-l^2 C + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)} \cdot (\cos\mu - lC)}$$

oder

$$\frac{1}{q_1 \sin^3(\lambda_1+\mu_1)} = \frac{-l^2 C + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)} \cdot (\cos\mu - lC)}{\left(l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}\right) \cdot C + \cos\mu}$$

oder (wieder im Hinblick auf die Gleichung (47′c) S. 310):

$$(53'd) \quad \frac{1}{l_1 + \frac{1}{q_1 \sin^3(\lambda_1+\mu_1)}} = \frac{C}{\cos\mu} + \frac{1}{l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}}.$$

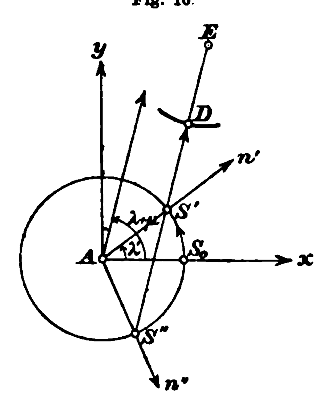
Hieraus folgt aber unmittelbar die Savarysche Formel (65′) S. 341, *so daß damit der Satz 23 S. 340 auch nach der zweiten Methode bewiesen ist.*

Ausdrücklich wollen wir noch hervorheben, daß dieser neue Beweis der Savaryschen Formel sowohl für reelle wie für nicht reelle Krümmungselemente gültig ist und wegen dieser Allgemeinheit wesent-

lichen Vorzug vor allen andern bekannten Beweisen der Kinematik besitzt.

Unter Benutzung der Savaryschen Formel (65′) ergibt sich nun weiter sogleich der Satz:

25. *Die erweiterte Berührungstransformation (oder die Oskulationstransformation) der äußeren Kreisbewegung wird durch die früheren Gleichungen* (28a, b, c), (29a, b, c) *S. 296 und* (47a, b, c) *S. 303 unter Hinzunahme der neuen Gleichungen*



$$q = \frac{1}{\sin^3(\lambda + \mu)} \cdot \frac{\varepsilon}{\cos\mu - \varepsilon l}, \tag{28d}$$

$$q_1 = \frac{1}{\sin^3(\lambda_1 + \mu_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\cos\mu_1 - \varepsilon_1 l_1}, \tag{29d}$$

und

$$\varepsilon_1 = \frac{a+b}{ab} + \varepsilon \tag{47d}$$

gegeben.

Die geometrische Bedeutung des neuen Parameters ε (und ebenso die von ε_1) ergibt sich aus der Formel

$$\varepsilon = \frac{\cos\mu}{e}, \tag{73}$$

wo $e = \overrightarrow{SE}$ und E der Krümmungsmittelpunkt des Krümmungselementes ist (Fig. 10).

Für die *Funktionaldeterminante der Oskulationstransformation* endlich ergibt sich:

$$\frac{\partial(x_1, y_1, p_1, q_1)}{\partial(x, y, p, q)} = \frac{\dfrac{\partial(x_1, y_1, p_1, q_1)}{\partial(\lambda_1, \mu_1, l_1, \varepsilon_1)}}{\dfrac{\partial(x, y, p, q)}{\partial(\lambda, \mu, l, \varepsilon)}} \cdot \frac{\partial(\lambda_1, \mu_1, l_1, \varepsilon_1)}{\partial(\lambda, \mu, l, \varepsilon)} \tag{74}$$

$$= \frac{\dfrac{\partial q_1}{\partial \varepsilon_1} \cdot \dfrac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(\lambda_1, \mu_1, l_1)}}{\dfrac{\partial q}{\partial \varepsilon} \cdot \dfrac{\partial(x, y, p)}{\partial(\lambda, \mu, l)}} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) \cdot (-1)^m$$

oder mit Hilfe der Gleichungen (30a, b) S. 297

$$= (-1)^m \frac{\sin^5(\lambda + \mu)}{\sin^5(\lambda_1 + \mu_1)} \cdot \left(\frac{\cos\mu - \varepsilon l}{\cos\mu_1 - \varepsilon_1 l_1}\right)^2 \not\equiv 0.$$

Das nicht identische Verschwinden der Funktionaldeterminante zeigt also unmittelbar, daß wir es mit einer regulären Transformation zu tun haben.[1])

1) Vgl. Liebmann, l. c. S. 109.

§ 6.

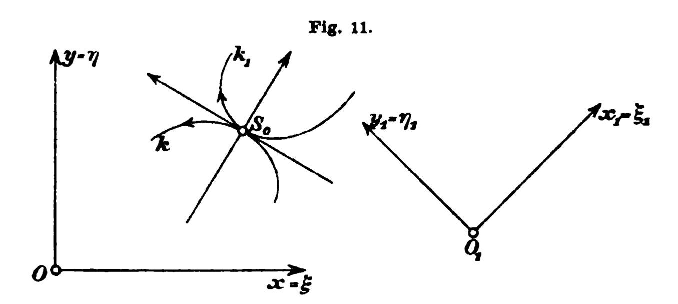
Die Berührungs- und Oskulationstransformation der allgemeinen ebenen Bewegung.

Es seien jetzt *zwei beliebige Kurven k und k_1 als Polbahnen* der Systeme Σ, Σ_1 gegeben (Fig. 11). Da durch ihre Abrollung aufeinander jedem Punkt des Systems Σ eine Bahnkurve im System Σ_1 und umgekehrt jedem Punkt in Σ_1 eine Bahnkurve in Σ entspricht, so gilt dem Satze 3 S. 285 gemäß sogleich auch hier:

26. *Durch die Abrollung der Polbahnen aufeinander ist zwischen den ebenen Systemen Σ und Σ_1 eine Berührungstransformation festgelegt, die wir dann die „Berührungstransformation der (allgemeinen) ebenen Bewegung" nennen wollen.*

Wir gehen jetzt dazu über, wieder die *Gleichungen dieser Berührungstransformation* aufzustellen; wir werden sehen, daß dieser all-

Fig. 11.



gemeine Fall sich nicht wesentlich von dem speziellen der Kreisbewegung unterscheidet, so daß wir auch die Einzelheiten nicht nochmals ausführen wollen.

Die beiden Polbahnen k, k_1 seien je auf ein rechtwinkliges $\xi\eta$- oder $\xi_1\eta_1$-Koordinatensystem bezogen und sogleich durch je ein Gleichungspaar mit dem Parameter s und s_1 gegeben, wo s und s_1 die Bogenlängen der Kurven, von dem anfänglichen Berührungspunkt S_0 aus gemessen, bei gegebenen einander entsprechenden positiven Richtungen auf den Kurven bedeuten (Fig. 11):

$$\text{(75a)} \quad \begin{aligned} \xi &= \xi(s), \\ \eta &= \eta(s) \end{aligned} \qquad \text{(75b)} \quad \begin{aligned} \xi_1 &= \xi_1(s_1), \\ \eta_1 &= \eta_1(s_1), \end{aligned}$$

wo dann

$$\text{(76a, b)} \quad \begin{aligned} \xi'^2(s) + \eta'^2(s) &= 1, \\ \xi_1'^2(s_1) + \eta_1'^2(s_1) &= 1 \end{aligned}$$

ist.[1]) Für die Umgebung der in Betracht kommenden Stelle $s = s_1$ seien die 4 Funktionen dieser Gleichungen (73a, b) *regulär* vorausgesetzt.

Wir machen nun sogleich ganz den Gleichungen (28a,b,c), (29a,b,c) S. 296 und (47a,b,c) S. 303 entsprechend den folgenden Ansatz, der für die Umgebungen zweier entsprechenden Linienelemente (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1) unter Zugrundelegung derselben soeben eingeführten Koordinatensysteme gelten soll:

$$\begin{aligned} x &= \xi(s) + l\cos(\lambda+\mu), \\ y &= \eta(s) + l\sin(\lambda+\mu), \\ p &= -\operatorname{cotg}(\lambda+\mu); \end{aligned} \tag{77a, b, c}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1(s_1) + l_1\cos(\lambda_1+\mu_1), \\ y_1 &= \eta_1(s_1) + l_1\sin(\lambda_1+\mu_1), \\ p_1 &= -\operatorname{cotg}(\lambda_1+\mu_1); \end{aligned} \tag{78a, b, c}$$

und

$$\begin{aligned} \sin\lambda &= -\frac{d\xi}{ds} = -\xi'(s), \\ \cos\lambda &= \frac{d\eta}{ds} = \eta'(s); \end{aligned} \tag{79a, b}$$

$$\begin{aligned} \sin\lambda_1 &= -\frac{d\xi_1}{ds_1} = -\xi_1'(s), \\ \cos\lambda_1 &= \frac{d\eta_1}{ds_1} = \eta_1'(s); \end{aligned} \tag{80a, b}$$

$$\begin{aligned} s_1 &= s, \\ \mu_1 &= \mu, \\ l_1 &= l. \end{aligned} \tag{81a, b, c}$$

Hierbei sind dann die Größen λ, μ, l (und ebenso λ_1, μ_1, l_1) *analytisch wie geometrisch* in analoger Weise wie auf S. 296ff. definiert, so daß auch die Ungleichungen

$$0 \leqq \bar{\lambda} + \bar{\mu} < \pi \tag{32}$$

$$-\pi < \bar{\lambda} \leqq \pi \tag{33}$$

wieder gelten sollen.[2])

Für gegebene Werte x, y, p gestatten nämlich die Gleichungen (77a,b,c) und (79a,b) umgekehrt die entsprechenden Größen s, $\lambda + \mu$, l, λ folgender-

1) Vgl. deswegen z. B. Scheffers, *Einführung in die Theorie der Kurven in der Ebene und im Raume* (Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, Bd. I), Leipzig 1901, S. 5.

2) Um den Vergleich mit dem obigen speziellen Falle der Kreisbewegung durchführen zu können, sei bemerkt, daß dort $\lambda = \frac{s}{a}$, $\lambda_1 = -\frac{s_1}{b}$ für die Umgebungen von $s = s_1 = 0$ ist.

maßen zu berechnen: Aus den Gleichungen (77a, b, c) folgt zunächst zur Bestimmung von s die Gleichung

(82a) $$(x - \xi(s)) + p(y - \eta(s)) = 0,$$

woraus ein oder mehrere Werte für s sich berechnen lassen. Von diesen werden wir indes einen als bevorzugt auswählen, auf dessen Umgebung wir uns auch in der späteren Rechnung beschränken. Nach den Gleichungen (79a, b) ist dann zu diesem ausgewählten Wert von s der zugehörige Wert von λ in Rücksicht auf die Ungleichungen (33) *eindeutig* bestimmt. Der Winkel λ ist, falls er reell ist, den Gleichungen (79a, b) gemäß geometrisch wieder der positive oder negative Winkel, durch den man im entsprechenden Sinne die positive x-Achse drehen muß, bis sie zum ersten Male mit der Normalen der Polbahn k (vgl. S. 299) zusammenfällt. Hierdurch ist dann auch die positive Richtung der Normalen festgelegt.

Weiter gelten noch die Gleichungen

(82b) $$\lambda + \mu = \operatorname{arc\,cotg}(-p),$$

(82c) $$l = \frac{x - \xi(s)}{\cos(\lambda + \mu)} = \frac{y - \eta(s)}{\sin(\lambda + \mu)},$$

welche den Ungleichungen (32) gemäß auch die Größen $\lambda + \mu$, l und damit μ *eindeutig* bestimmen.

Besonders hervorheben müssen wir indes noch, was der Vergleich der Formeln (81b, c) mit den Formeln (47b, c) S. 303) erkennen läßt, daß wir die Zahl m von vornherein der Einfachheit halber gleich 0 gesetzt haben, da sich dies durch geeignete Wahl der Koordinatensysteme stets erreichen läßt, falls es nicht schon von vornherein der Fall ist.

Wir werden jetzt nachzuweisen haben, daß

erstens durch den obigen Ansatz der Gleichungen (77)—(81) eine Berührungstransformation zwischen den Linienelementen (x, y, p) und $(x_1\, y_1\, p_1)$ bestimmt wird und

zweitens diese Berührungstransformation in der Tat mit der im Satz (26) bereits auf geometrischem Wege gefundenen übereinstimmt.

ad I. Es folgt zunächst aus den Gleichungen (79a, b):

(83) $$\frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\xi''(s)}{\eta'(s)} = \frac{\eta''(s)}{\xi'(s)}.$$

Nach der Gleichung (76a) ist aber

(76'a) $$\xi'(s) \cdot \xi''(s) + \eta'(s) \cdot \eta''(s) = 0.$$

Ist daher in den Gleichungen (83) $\eta' = 0$, so ist nach den Gleichungen (76a) und (76'a) notwendig $\xi' \gtrless 0$ und $\xi'' = 0$, d. h. es ist dann

allein der Quotient $\frac{\eta''}{\xi'}$ als Wert für $\frac{d\lambda}{ds}$ in den Gleichungen (83) zu benutzen. Auf jeden Fall ergibt sich: *Der Differentialquotient* $\frac{d\lambda}{ds}$ (*und ebenso auch* $\frac{d\lambda_1}{ds_1}$) *hat stets einen endlichen Wert.*

Wir setzen noch:

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{R(s)}, \tag{84a}$$

$$\frac{d\lambda_1}{ds_1} = \frac{1}{R_1(s_1)}, \tag{84b}$$

wo R und R_1 die (positiven oder negativen) *Krümmungsradien der Polbahnen* für die Werte s und s_1 bedeuten.

Es ist nun (vgl. die Gleichungen (30a, b) S. 297) die Funktionaldeterminante:

$$\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(s,\mu,l)} = \begin{vmatrix} x^s & x^\mu & x^l \\ y^s & y^\mu & y^l \\ p^s & p^\mu & p^l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin\lambda - l\sin(\lambda+\mu)\cdot\frac{d\lambda}{ds} & -l\sin(\lambda+\mu) & \cos(\lambda+\mu) \\ \cos\lambda + l\cos(\lambda+\mu)\frac{d\lambda}{ds} & +l\cos(\lambda+\mu) & \sin(\lambda+\mu) \\ \frac{1}{\sin^2(\lambda+\mu)}\cdot\frac{d\lambda}{ds} & \frac{1}{\sin^2(\lambda+\mu)} & 0 \end{vmatrix}$$

oder

$$\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(s,\mu,l)} = \frac{\cos\mu}{\sin^2(\lambda+\mu)} \mathrel{\not\equiv} 0. \tag{85a}$$

Ebenso ist

$$\frac{\partial(x_1,y_1,p_1)}{\partial(s_1,\mu_1,l_1)} = \frac{\cos\mu_1}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)} \mathrel{\not\equiv} 0. \tag{85b}$$

Also folgt

$$\frac{\partial(x_1,y_1,p_1)}{\partial(x,y,p)} = \frac{\frac{\partial(x_1,y_1,p_1)}{\partial(s_1,\mu_1,l_1)}\cdot\frac{\partial(s_1,\mu_1,l_1)}{\partial(s,\mu,l)}}{\frac{\partial(x,y,p)}{\partial(s,\mu,l)}}$$

oder nach den Gleichungen (81a, b, c)

$$\frac{\partial(x_1,y_1,p_1)}{\partial(x,y,p)} = \frac{\sin^2(\lambda+\mu)}{\sin^2(\lambda_1+\mu_1)} \mathrel{\not\equiv} 0, \tag{86}$$

(vgl. die Gleichung (57) S. 311), d. h.: Unser Ansatz stellt in der Tat eine Transformation der Linienelemente (x, y, p) und (x_1, y_1, p_1) dar.

Damit diese Transformation eine Berührungstransformation ist, muß allein die Gleichung

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \varrho\,(dy - p\,dx)$$

erfüllt sein, wo der Faktor $\varrho\,(x, y, p) \mathrel{\not\equiv} 0$ ist (vgl. die Formel (56) S. 310).

Es ist nun

$$dy - p\,dx = (y^s ds + y^\mu d\mu + y^l dl) - p\,(x^s ds + x^\mu d\mu + x^l dl)$$

oder nach den Gleichungen (77a, b, c) und (79a, b):

$$dy - p\,dx = \frac{\sin\mu \cdot ds + dl}{\sin(\lambda + \mu)}$$

und analog

$$dy_1 - p_1 dx_1 = \frac{\sin\mu_1 \cdot ds_1 + dl_1}{\sin(\lambda_1 + \mu_1)}.$$

Folglich ergibt sich nach den Gleichungen (81a, b, c):

$$\varrho = \frac{\sin(\lambda + \mu)}{\sin(\lambda_1 + \mu_1)} \neq 0. \tag{87}$$

Wir wollen noch auf die aus den Gleichungen (86) und (87) folgende Beziehung hinweisen:

$$\frac{\partial(x_1, y_1, p_1)}{\partial(x, y, p)} = \varrho^2, \tag{88}$$

eine Gleichung, die für jede Berührungstransformation gilt (vgl. Satz 19 S. 311).

ad II. Was den geforderten zweiten Nachweis betrifft, so folgt aus den Gleichungen (77a, b), (78a, b) unseres Ansatzes unmittelbar:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= (x-\xi)\cos\lambda + (y-\eta)\sin\lambda - (x_1-\xi_1)\cos\lambda_1 - (y_1-\eta_1)\sin\lambda_1 = 0, \\ \Omega_2 &= -(x-\xi)\sin\lambda + (y-\eta)\cos\lambda + (x_1-\xi_1)\cos\lambda_1 - (y_1-\eta_1)\sin\lambda_1 = 0, \end{aligned} \tag{89a,b}$$

oder, wenn wir noch

$$z = x + iy, \qquad z_1 = x_1 + iy_1,$$
$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad \zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$$

setzen:

$$\Omega_1 + i\Omega_2 = (z - \zeta(s)) \cdot e^{-i\lambda} - (z_1 - \zeta_1(s)) \cdot e^{-i\lambda_1} = 0. \tag{90}$$

Wir stellen ganz ähnliche Betrachtungen an, wie wir sie für den speziellen Fall auf S. 283 durchgeführt haben. Wir denken etwa für jeden Wert s das ursprüngliche xy-Koordinatensystem durch eine solche Parallelverschiebung, die den Anfangspunkt in den momentanen Pol der Polbahn, d. h. in den Punkt S oder $\zeta(s)$, verlegt, und durch eine dann erfolgende Drehung durch den Winkel λ in ein neues $(x),(y)$-Koordinatensystem übergeführt, so daß also die neue (x)-Axe mit der positiven Normalenrichtung zusammenfällt (Fig. 12). Dann stellt $(z - \zeta(s))\,e^{-i\lambda}$ den neuen komplexen Wert des Punktes dar, der im alten System durch den Wert z gegeben ist. Analoges gilt für das Glied $(z_1 - \zeta_1(s))\,e^{-i\lambda_1}$. Hierbei fallen dann die neuen (x), (y)- und (x_1), (y_1)-Koordinatensysteme zusammen, wenn die Polbahnen sich im Punkte $S = S_1$ berühren.

Hieraus folgt:

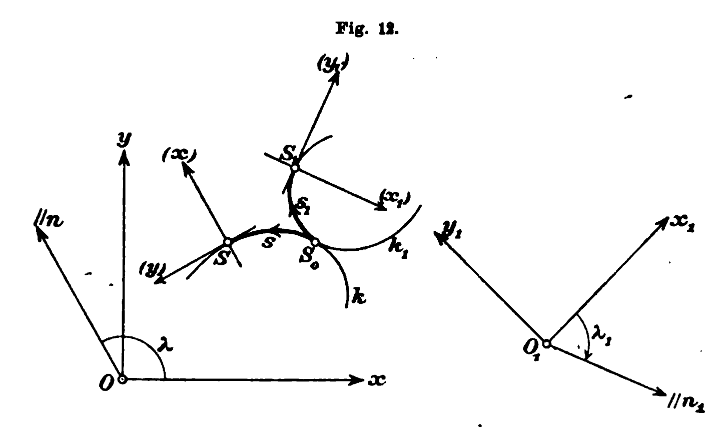
27. *Die Gleichung* (*90*) *stellt für jeden bestimmten Wert* s, *d. h. für jeden Punkt des Systems* Σ *die entsprechende Bahnkurve im System* Σ_1 *dar und umgekehrt für jeden bestimmten Wert* s_1, *d. h. für jeden Punkt des Systems* Σ_1 *die entsprechende Bahnkurve im System* Σ, *und zwar jedesmal mit dem Parameter s, da ja nach den Gleichungen* (*79* a, b) *und* (80 a, b)

$$e^{-i\lambda} = \eta'(s) + i\xi'(s)$$

und

$$e^{-i\lambda_1} = \eta_1'(s) + i\xi_1'(s) \quad \textit{ist.}$$

Fig. 12.



Wir gewinnen daher das Gesamtresultat:

28. *Die durch die beiden gegebenen Polbahnen* k, k_1 *bestimmte „Berührungstransformation der Bewegung" wird in der Tat analytisch durch die Hauptgleichungen* (77 a, b, c), (78 a, b, c), (81 a, b, c) *und die Hilfsgleichungen* (79 a, b), (80 a, b) *dargestellt, und zwar sind die aus ihnen abgeleiteten Gleichungen* (89 a, b) *oder* (90) *die charakteristischen Gleichungen dieser Berührungstransformation mit dem Parameter s.*

Das *anschauliche* Erfassen dieser Berührungstransformation endlich wird den Sätzen 15—17 S. 305—307 entsprechend durch folgende Realitätstheoreme geliefert:

29. *In der (mehr oder weniger ausgedehnt gewählten) Umgebung des reellen Wertes* $s = s_0$, *auf die wir uns beschränken, entspricht nur jedem solchen reellen Linienelement* (x, y, p) *wieder ein reelles Linienelement* (x_1, y_1, p_1), *dessen Normale die Polbahn* k *in einem reellen Punkte* S *in der Umgebung von* $S_0 = [\xi(s_0), \eta(s_0)]$ *schneidet.*

30. *Die so einander entsprechenden reellen Linienelemente* (x, y, p) *und* (x_1, y_1, p_1) *kommen bei der Abrollung der Polbahnen* k, k_1 *grade dann zur Deckung, wenn diese sich momentan im Punkte* S *berühren.* —

Wir gehen nun auch zur *erweiterten Berührungstransformation (oder Oskulationstransformation) der allgemeinen Bewegung über und stellen uns zunächst wieder die Aufgabe, die Savarysche Formel abzuleiten.* Doch wollen wir uns auf die erste der beiden S. 341 angegebenen Methoden beschränken und auch wegen der Einzelheiten dorthin verweisen.

ad α). Es wird jetzt:

$$p = \frac{y^s ds + y^\mu d\mu + y^l dl}{x^s ds + x^\mu d\mu + x^l dl}$$

oder nach den Gleichungen (77a, b, c) S. 349 (vgl. die Gleichung (68) S. 342):

$$\sin\mu\, ds = -dl \tag{91}$$

Also wird

$$q = \frac{dp}{dx} = \frac{p^s ds + p^\mu d\mu}{x^s ds + x^\mu d\mu + x^l dl}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sin^2(\lambda+\mu)} \cdot (d\lambda + d\mu)}{\left(-\sin\lambda - l\sin(\lambda+\mu)\frac{d\lambda}{ds}\right)ds - l\sin(\lambda+\mu)d\mu + \cos(\lambda+\mu)dl},$$

oder mit Hilfe der Gleichung (91):

$$q\cdot\sin^3(\lambda+\mu) = -\frac{d\lambda + d\mu}{l d\lambda + l d\mu + \cos\mu\, ds}$$

oder

$$\frac{\cos\mu}{l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}} = -\frac{d\lambda + d\mu}{ds}. \tag{92a}$$

Ebenso ist

$$\frac{\cos\mu_1}{l_1 + \frac{1}{q_1\sin^3(\lambda_1+\mu_1)}} = -\frac{d\lambda_1 + d\mu_1}{ds_1}. \tag{92b}$$

Nach den Gleichungen (81a, b) S. 349 folgt daher schließlich die Savarysche Formel:

$$\frac{\cos\mu_1}{l_1 + \frac{1}{q_1\sin^3(\lambda_1+\mu_1)}} - \frac{\cos\mu}{l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}} = \frac{d\lambda - d\lambda_1}{ds} = C, \tag{93}$$

(vgl. die Formel (65') S. 341).

ad β). Aus $dx = 0$ und $dy = 0$ folgt, wie auf S. 343:

$$ds : d\mu : dl = \begin{vmatrix} x^\mu & x^l \\ y^\mu & y^l \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x^l & x^s \\ y^l & y^s \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x^s & x^\mu \\ y^s & y^\mu \end{vmatrix}$$

$$= (-l) : \left(l\frac{d\lambda}{ds} + \cos\mu\right) : l\sin\mu$$

oder

$$ds = -l d\sigma,$$

(94a, b, c)
$$d\mu = \left(l\frac{d\lambda}{ds} + \cos\mu\right)d\sigma,$$

$$dl = l \sin\mu\, d\sigma.$$

Folglich gilt hier (für $q = \infty$) nach den Gleichungen (94a, b):

(92′a)
$$\frac{\cos\mu}{l + \frac{1}{q\sin^3(\lambda+\mu)}} = \frac{\cos\mu}{l} = -\frac{d\lambda + d\mu}{ds}.$$

Die Gleichungen (92′a) und (92b) zeigen dann aber wieder das Bestehen der Savaryschen Formel (93). Wir erhalten daher das Schlußergebnis:

31. *Auch im Falle der allgemeinen ebenen Bewegung ist die Savarysche Formel der Ausdruck für die Erweiterung der zugehörigen Berührungstransformation zur Oskulationstransformation.*

Für den Parameter C dieser Formel ferner ergibt sich unmittelbar:

(95)
$$C = \frac{d\lambda - d\lambda_1}{ds} = \frac{\omega}{u} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R_1},$$

wo die Größen ω, u, R, R_1 die in den Formeln (64) S. 338 und (84a, b) S. 351 ausgesprochene Bedeutung haben.

32. *Der Parameter C der Savaryschen Formel ist also gleich dem Quotienten aus der momentanen Winkelgeschwindigkeit des Systems Σ_1 in Σ und der momentanen Wechselgeschwindigkeit des Pols oder gleich der Differenz der momentanen Krümmungen der Polbahnen.* Dies ergibt weiter den auch aus der Kinematik bekannten Satz:

33. *In jedem Moment kann man, was die Krümmungen je zweier entsprechenden Kurven der Systeme Σ und Σ_1 in ihrem augenblicklichen Berührungspunkt (d. h. die Beziehung der Größen x, y, p, q und x_1, y_1, p_1, q_1 zu einander) betrifft, die Polkurven durch ihre Krümmungskreise ersetzen, was besonders auch für geometrische Konstruktionen in Betracht kommt.*

Was endlich die erweiterte Berührungstransformation selbst betrifft, so können wir wieder (dem Satze 25 S. 347 entsprechend) den Satz aufstellen:

34. *Die erweiterte Berührungstransformation oder die Oskulationstransformation der allgemeinen ebenen Bewegung wird durch die Formeln* (77a, b, c)—(81a, b, c) *S. 349 unter Hinzufügung folgender Formeln bestimmt:*

(77d)
$$q = \frac{1}{\sin^3(\lambda+\mu)} \cdot \frac{\varepsilon}{\cos\mu - \varepsilon l},$$

(78d)
$$q_1 = \frac{1}{\sin^3(\lambda_1+\mu_1)} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\cos\mu_1 - \varepsilon_1 l_1},$$

(81d)
$$\varepsilon_1 = \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) + \varepsilon,$$

wo nach den Gleichungen (83) S. 350 und (84a, b) S. 351

$$\text{(96a, b)} \qquad \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{d\lambda}{ds} = -\frac{\xi''(s)}{\eta'(s)} = \frac{\eta''(s)}{\xi'(s)}, \\ \frac{1}{R_1} &= \frac{d\lambda_1}{ds_1} = -\frac{\xi_1''(s_1)}{\eta_1'(s_1)} = \frac{\eta_1''(s_1)}{\xi_1'(s_1)} \text{ ist.} \end{aligned}$$

Die *geometrische* Bedeutung der neuen Parameter ε und ε_1 ist die gleiche wie in dem auf S. 347 besprochenen speziellen Falle.

35. *Um also jetzt bei gegebenen Polbahnen (vgl. die Gleichungen* (75a, b) *S. 348) zu einem gegebenen Krümmungselement* (x, y, p, q) *in* Σ *das entsprechende* x_1, y_1, p_1, q_1 *(bei der Beschränkung auf die Umgebung von* $s = s_0$*) zu bekommen, bestimmt man zunächst aus* x, y, p, q *durch Auflösung der Gleichungen* (77a, b, c, d) *und* (79a, b), (96a) *die Größen* $s, \mu, l, \varepsilon, \lambda, R$ *(vgl. die Gleichungen* (82a, b, c) *S. 350), wo* s *der Umgebung von* s_0 *angehören möge, darauf aus diesen nach den Gleichungen* (81a, b, c, d), (80a, b), (96b) *die entsprechenden Größen* $s_1, \mu_1, l_1, \varepsilon_1, \lambda_1, R_1$ *und schließlich aus letzteren nach den Gleichungen* (78a, b, c, d) *die gesuchten Größen* x_1, y_1, p_1, q_1.

§ 7.

Veranschaulichung der Berührungstransformation der Kreisbewegung durch die Modelle.

Die zunächst zum Studium der Verzahnungstheorie herausgegebenen Modelle[1]) eignen sich in vorzüglicher Weise nun auch zur Veranschaulichung der im vorstehenden entwickelten geometrischen Eigenschaften unserer Berührungstransformationen. Wir wollen im folgenden die einzelnen Modelle in dieser Hinsicht kurz besprechen, und zwar in der zweckmäßigen Reihenfolge und Zusammenstellung, wobei auf die Abbildungen der Modelle verwiesen sei.[1])

Modell XXIV Nr. 1. Das Modell veranschaulicht bei den sich *äußerlich* berührenden Polkreisen grade die Verhältnisse des Falles, der von uns ausführlich in den §§ 1, 3—5 besprochen ist. Es zeigt im einzelnen die Bahnkurven (eine verschlungene, gespitzte und gestreckte Epitrochoide), welche 3 Punkte des einen Systems, etwa von Σ, im andern System Σ_1 beschreiben, oder m. a. W., es veranschaulicht, wie die Linienelemente dreier Punkte im System Σ den Linienelementen im System Σ_1 zugeordnet sind. Und zwar sieht man bei der Bewegung

1) Vgl. die Anm. S. 281 und insbesondere in den dort genannten Abhandlungen die beigegebenen vier Tafeln mit den photographischen Abbildungen der Modelle.

des Modells deutlich, wie die Linienelemente jedes Punktes auf seiner Bahnkurve unter Gleitung des Punktes selbst abrollen. Es genügen diese drei Punkte vollständig, um zu überblicken, wie die Linienelemente *jedes anderen* Punktes im System Σ den Linienelementen im System Σ_1 zugeordnet sind. Dem Radienverhältnis $a:b=\alpha:\beta=2:5$ entsprechend besteht jede Bahnkurve aus fünf kongruenten Teilen, und dem einzelnen Linienelement eines der drei Punkte (wenn ihm überhaupt wieder *reelle* Linienelemente in Σ_1 zugeordnet sind) entsprechen, wie man anschaulich an dem Modell erkennt, in jedem dieser fünf Teile zwei Linienelemente, also insgesamt $2\beta=10$ Linienelemente. Von diesen liegen in dem Falle, daß der Punkt auf dem Polkreis k_a sich befindet, fünf in den Spitzen der Epizykloide, m. a. W.: Befindet sich dieser Punkt grade in einer Spitze seiner Bahnkurve, so fallen *alle* seine Linienelemente gleichzeitig mit entsprechenden Linienelementen in Σ_1 zusammen. Für den *außerhalb* gelegenen Punkt entsprechen nicht allen seinen Linienelementen wieder reelle Linienelemente im System Σ_1, sondern nur denen, deren Normalen den Polkreis k_a reell treffen; hierbei ist es eigenartig, daß die beiden Linienelemente dieses Punktes, deren Normalen den Polkreis k_a berühren, keinerlei Singularität auf der Bahnkurve an den entsprechenden Stellen hervorrufen.

Die Formeln (52a, b) S. 308 nehmen hier, wo $a:b=2:5$ ist, die folgende Form an:

$$w = \operatorname{tg}\left(5\cdot\frac{\varkappa t}{2}\right) = \frac{5\tau-10\tau^3+\tau^5}{1-10\tau^2+5\tau^4},$$

$$w_1 = -\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\varkappa t}{2}\right) = -\frac{2\tau}{1-\tau^2}.$$

Modell XXXI Nr. 2. Dieses Modell zeigt das Gleiche wie das vorige, jedoch für das einfachste Radienverhältnis $a:b=1:1$. Die Bahnkurven sind jetzt Pascalsche Kurven. Die Formeln (52a,b) lauten einfach:

$$w=\tau,$$

$$w_1=-\tau.$$

Modell XXIV Nr. 2, 3, 4. Hier berührt der eine Polkreis den andern *innerlich;* die Polkreise haben bezw. das Radienverhältnis $5:7$, $2:5$, $3:5$. Ist Σ_1 das System des größten Polkreises, so veranschaulicht in entsprechender Weise wie bei dem zuerst besprochenen Modell das erste dieser drei Modelle die den Linienelementen der Punkte des Systems Σ_1 im System Σ entsprechenden Linienelemente, das zweite umgekehrt die den Linienelementen der Punkte des Systems Σ im System Σ_1 entsprechenden Linienelemente, endlich das dritte beides

gleichzeitig und zwar je für einen Punkt beider Systeme, die in einem Momente der Bewegung zur Deckung kommen.

36. *Die analytischen Formeln der Berührungstransformation der äußeren Kreisbewegung (28a, b, c), (29a, b, c) S. 296 und (47a, b, c) S. 303 übertragen sich unmittelbar auf diesen Fall der „inneren“ Kreisbewegung*[1]*, wenn man in ihnen b durch $-b$ ersetzt.*

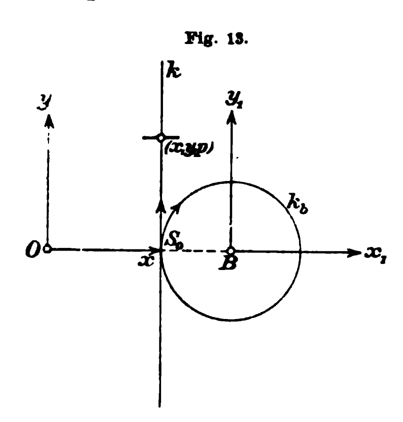
Modelle XXIV Nr. 5 und XXXI Nr. 1. Diese zusammengehörigen Modelle zeigen das Gleiche wie das vorige, jedoch für das einfachste Radienverhältnis $a : b = 1 : 2$. Die allgemeinen Bahnkurven im System Σ_1 sind dementsprechend Ellipsen, die im System Σ wieder Pascalsche Kurven.

Modelle XXIV Nr. 6 und 7. Von den beiden Polkreisen ist jetzt der eine, etwa k_a, in eine *Gerade* k ausgeartet (d. h. $a = R = \infty$). An die Stelle der Gleichungen (28a, b, c) S. 296 oder (77a, b, c) S. 349 treten demgemäß die folgenden:

$$\text{(97a, b, c)} \qquad \begin{aligned} x &= (c - s \sin \lambda) + l \cos (\lambda + \mu), \\ y &= (d + s \cos \lambda) + l \sin (\lambda + \mu), \\ p &= -\operatorname{cotg} (\lambda + \mu), \end{aligned}$$

wobei $\lambda =$ const. ist $\left(\text{oder } \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{R} = 0\right)$ und c, d die Koordinaten des Fußpunktes des vom Koordinatenanfangspunkt O auf die Gerade k gefällten Lotes sind. Bei der speziellen, im folgenden beibehaltenen Wahl des Koordinatensystems (Fig. 13), bei der die x-Achse mit der Normalen des Anfangspunkts S_0 zusammenfällt, ist insbesondere $\lambda = 0$ und $d = 0$, d. h.

Fig. 13.



$$\text{(97'a, b, c)} \qquad \begin{aligned} x &= c + l \cos \mu \\ y &= s + l \sin \mu \\ p &= -\operatorname{cotg} \mu. \end{aligned}$$

Wir brauchen diesen Fall im einzelnen nicht besonders zu besprechen, wir wollen nur eins hervorheben: Ist die Normale des gegebenen Linienelements (x, y, p) die Gerade k selbst, d. h. ist $x = c$ und $p = 0$, so folgt aus den Gleichungen (97'a, b, c):

$$\mu = \frac{\pi}{2},$$

während l und s unbestimmt sind, wobei nur $s + l = y$ ist. Dement-

1) Vgl. wegen dieses Ausdrucks S. 282.

sprechend ist nach den Gleichungen (81a,b,c) S. 349 $\mu_1 = \frac{\pi}{2}$, und l_1, s_1 sind ebenfalls unbestimmt, doch wieder $s_1 + l_1 = y$. Die einem solchen Linienelement (x, y, p) entsprechenden Linienelemente im System Σ_1 sind also nach den Gleichungen (29a,b,c) S. 296 oder (78a,b,c) S. 349 gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -b \cos \lambda_1 - (y + b\lambda_1) \sin \lambda_1, \\
y_1 &= -b \sin \lambda_1 + (y + b\lambda_1) \cos \lambda_1, \\
p_1 &= \operatorname{tg} \lambda_1,
\end{aligned}
\tag{98a,b,c}
$$

wobei $\lambda_1 = -\frac{s_1}{b}$ (vgl. die Anm. S. 349) ist.

Es genügt offenbar, allein das Beispiel $y = 0$ weiter zu diskutieren. Man erkennt sofort, daß die Gleichungen (98a,b) eine gewöhnliche Evolute des Kreises k_b darstellen[1]) und die Gleichungen (98a,b,c) zusammen ein Linienelement dieser Kurve, d. h.

37. *Bei der Berührungstransformation derjenigen speziellen Bewegung, deren Polbahnen eine Gerade im System Σ und ein Kreis im System Σ_1 sind, entsprechen jedem Linienelement (x, y, p) des Systems Σ mit der Geraden als Normalen unendlich viele Linienelemente im System Σ_1, nämlich die Linienelemente einer gespitzten Kreisevolvente, der Bahnkurve des Punkts (x, y) im System Σ_1.*

38. *Jedem andern Linienelement des Systems Σ entpricht dagegen nur ein Linienelement im System Σ_1 (und zwar einem reellen Linienelement in Σ stets ein reelles Linienelement in Σ_1, vgl. Satz 13c S. 304): umgekehrt entsprechen einem allgemeinen Linienelement in Σ_1 unendlich viele Linienelemente in Σ.*

Alle diese Verhältnisse werden durch die genannten Modelle veranschaulicht, indem diese wieder die Bahnkurven von Punkten des einen Systems im andern, allgemeine Zykloiden oder Kreisevolventen, darstellen. Es ist interessant, hierbei gerade den Grenzübergang zu beobachten, wenn der Punkt (x, y) auf die Gerade k rückt.

Modell XXXI Nr. 6. Die Polbahnen sind zwei *äußerlich* sich berührende Kreise mit dem Radienverhältnis $a : b = 4 : 3$. Im System Σ_1 ist eine Kurve, speziell eine *dreispitzige Hypozykloide,* und im System Σ die Gesamtheit der ihr durch die Berührungstransformation zugeordneten Kurven gezeichnet, dem allgemeinen Satze entsprechend:

Bei jeder Berührungstransformation entsprechen den Linienelementen einer beliebigen Kurve des einen Systems stets wieder die Linienelemente

---

1) Vgl. z. B. Loria, *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven,* Leipzig 1902, S. 500, Gleichung (3).



einer (ev. zerfallenden) Kurve im andern System, die auch in eine „Punktkurve“ ausarten kann.

Bei der Bewegung des Modells erkennt man in der Berührung der Kurven beider Systeme, wie die Linienelemente der Kurve im System Σ_1 den einzelnen Linienelementen in Σ zugeordnet sind.

Jeder Spitze der Hypozykloide entspricht dabei die für alle drei Spitzen gemeinsame Bahnkurve i im System Σ_1, eine Epizykloide mit vier Spitzen. Jedem *allgemeinen* Linienelement einer Spitze der Hypozykloide entsprechen vier Linienelemente in den vier Spitzen dieser Epizykloide und außerdem vier Linienelemente auf ihren vier kongruenten Bogenteilen. Dem *zu k_b senkrechten* Linienelement jeder Spitze der Hypozykloide dagegen entsprechen nur die vier doppelt zu zählenden, zu k_a senkrechten Linienelemente der Spitzen von i.

Jedem allgemeinen Linienelement der Hypozykloide (dessen Punkt also nicht in einer Spitze liegt) entsprechen natürlich ebenfalls $2\beta = 8$ Linienelemente in Σ; von diesen liegen vier auf den vier kongruenten Bogen einer *zweiten* vierspitzigen Epizykloide d und zweimal zwei auf den beiden kongruenten Bogen zweier zweispitzigen Epizykloiden e_1, e_2. Diese gewiß komplizierten Verhältnisse sind mit Hilfe des Modells leicht zu überblicken (vgl. die Formeln (52'a, b) S. 309).

Modell XXXI No. 7. Das Modell veranschaulicht den für die Berührungstransformationen der Bewegung[1]) allgemein geltenden Satz:

39. *Sind d_b und d_a zwei entsprechende Kurven der Systeme Σ_1 und Σ, und ist e_b eine äquidistante Kurve zu d_b, so entspricht letzterer wieder eine zu d_a äquidistante Kurve e_a.*

Als Kurven d_b, d_a sind speziell im Modell ein Punkt D auf k_b mit seinen Linienelementen im System Σ_1 und seine Bahnkurve im System Σ, eine zweispitzige Epizykloide, gewählt. Die Äquidistante e_b zu D (im Modell l genannt) ist dann als Kreis um den Mittelpunkt D eingezeichnet, und ihre entsprechende Kurve e_a in Σ wird durch die Kurven i_1, i_2 und die Kreise l', l'' dargestellt.

Modell XXXI No. 4. Dies Modell veranschaulicht den allgemeinen Satz:

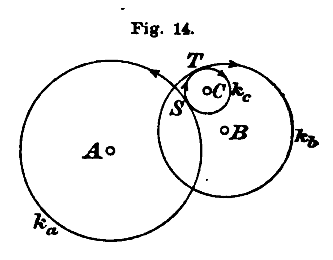
Die Aufeinanderfolge zweier Berührungstransformationen ist wieder eine Berührungstransformation.

Wir denken zunächst in gewohnter Weise die Systeme Σ und Σ_1 auf ein drittes System Σ_2 dadurch bezogen, daß sie, wie die Fig. 14 zeigt, sich um die festen Punkte A, B, C der Abrollung der Polkreise

1) Noch andere Berührungstransformationen haben diese Eigenschaft, z. B. die Dilatation, vgl. Lie und Scheffers, l. c. S. 14.

k_a und k_b auf k_c entsprechend drehen. Da es nur auf die relative Lage je der Systeme Σ, Σ_2 und Σ_1, Σ_2 gegeneinander ankommt, kann man anstatt der Fig. 14 stets die Fig. 15 zugrunde legen, d. h. man kann, ohne das Problem zu spezialisieren, annehmen, daß die drei Polkreise sich von vornherein in demselben Punkt S_0 berühren und dann um ihre festen Mittelpunkte sich drehen. Man sieht sofort:

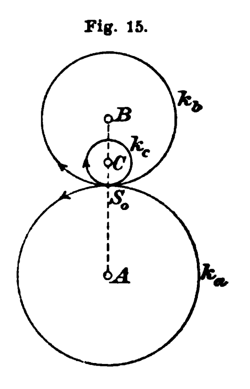
Fig. 14.



40. *Entsprechen einem reellen Linienelement im System Σ_1 reelle Linienelemente im System Σ_2, so entsprechen ersterem auch reelle Linienelemente in Σ.*

Im Modell ist das Radienverhältnis der drei Polkreise $a:b:c = 4:3:1$ gewählt. Im System Σ_2 ist ein Punkt D mit seinen Linienelementen (und ebenso ein zweiter Punkt E mit seinen Linienelementen) gewählt, und dann sind in den Systemen Σ und Σ_1 die ihm entsprechenden Kurven d_a, d_b als Bahnkurven des Punktes D bestimmt. Diese Kurven d_a und d_b sind also auch entsprechende Kurven der Systeme Σ und Σ_1 (natürlich entsprechen der Kurve d_b, die hier dieselbe dreispitzige Hypozykloide ist wie beim vorigen Modell, noch andere Kurven in Σ außer d_a, wie ja das vorige Modell zeigte).

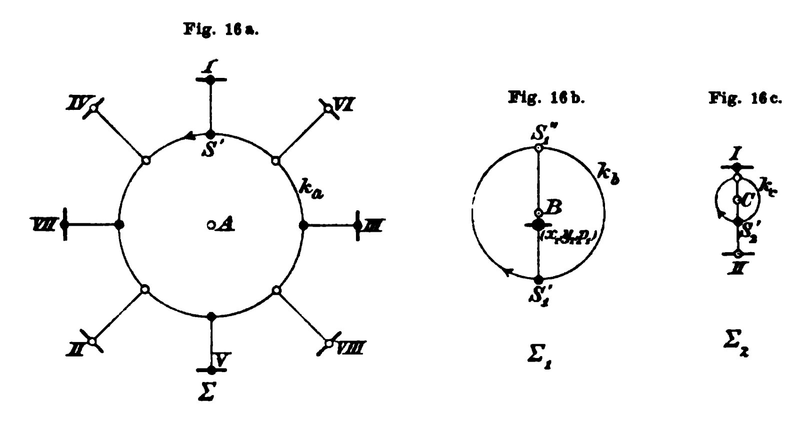
Fig. 15.



Um *analytisch* in unserm Beispiel zu einem Linienelement (x_1, y_1, p_1) des Systems Σ_1 *alle* entsprechenden in Σ — durch Vermittlung des Systems Σ_2 — zu erhalten, muß man (gemäß dem Satze 18 S. 309) zunächst zu x_1, y_1, p_1 die zwei Wertetripel u_1', v_1', w_1' und u_1'', v_1'', w_1'' (nach Analogie der Gleichungen (50) S. 308) suchen, zu diesen dann die entsprechenden beiden Wertetripel u_2', v_2', w_2' und u_2'', v_2'', w_2'' für das System Σ_2 (nach Analogie der Gleichungen (51a, b) und (52a, b) S. 308) und zu diesen (wieder nach Analogie dieser Gleichungen) die $2\alpha = 8$ Wertetripel u'^i, v'^i, w'^i und u''^i, v''^i, w''^i (für $i = 1, 2, 3, 4$). Diese letzten Wertetripel bestimmen dann nach den Formeln (28'a, b, c) S. 307 die 8 Linienelemente (x, y, p) im System Σ, die dem Linienelement (x_1, y_1, p_1) in Σ_1 entsprechen.

Um *geometrisch* das Gleiche auszuführen, beachte man, daß die drei Polkreise k_a, k_b, k_c bezw. 3-, 4-, 12mal aufeinander abrollen müssen, bis die ursprüngliche gegenseitige Lage bei allen dreien wieder erreicht ist. Ein beliebiges Element (x_1, x_1, y_1) des Systems Σ_1 — wir wollen der leichteren Übersicht halber in der Figur 16b es mit einem Durchmesser

des Kreises k_b als seiner Normalen wählen — gelangt dann hierbei je viermal mit zwei entsprechenden Linienelementen (x_2', y_2', p_2') und (x_2'', y_2'', p_2'') von Σ_2 zur Deckung und gleichzeitig je einmal mit den 8 entsprechenden Linienelementen des Systems Σ. Um dies völlig anschaulich zu übersehen, lege man die Systeme der drei nebenstehenden Figuren 16a, b, c so aufeinander, daß die drei Polkreise k_a, k_b, k_c sich der Fig. 15 gemäß in der Anfangslage mit den Peripheriepunkten S', S_1', S_2' berühren, und lasse die Polbahnen dann aufeinander abrollen, indem sie um die festen Punkte A, B, C sich drehen. Die 8 Linienelemente des Systems Σ sind in Fig. 16a grade so mit den Ziffern I ... VIII bezeichnet, wie sie hierbei der Reihe nach mit dem gegebenen Element (x_1, y_1, p_1) des Systems Σ_1 zur Deckung gelangen. Von diesen 8 Linienelementen in Σ stellt das Modell XXXI No 4, wenn (x_1, y_1, p_1)



z. B. ein Linienelement der Kurve d_b oder e_b ist, naturgemäß nur die Hälfte I, III, V, VII dar, etwa u'^1, v'^1, w'^1, das vorige Modell XXXI No 6 dagegen alle.

Entsprechende Linienelemente der Systeme Σ und Σ_1 kommen also mit den ihnen gemeinsam entsprechenden Linienelementen des Systems Σ_2 bei der Abrollung der Polbahnen gleichzeitig zur Deckung.

Das Modell regt in verschiedener Weise zu weitergehenden Betrachtungen an: Anstatt eines *Punktes* mit seinen Linienelementen im System Σ_2 kann man eine beliebige *Kurve* mit ihren Linienelementen wählen und die entsprechenden Kurven in den Systemen Σ und Σ_1 bestimmen, wobei bei der Abrollung dann alle drei Kurven sich in jedem Moment gleichzeitig berühren. Weiter kann man alle diese Verhältnisse für beliebige rationale und irrationale Radienverhältnisse $a : b : c$ studieren. Endlich kann man zwei verschiedene Polbahnen in Σ_2 wählen, die mit je einer Polbahn in Σ und Σ_1 zusammengeordnet

sind, wobei alle diese Polbahnen auch nicht wie bisher Kreise zu sein brauchen (vgl. das sogleich zu besprechende Modell XXXI Nr. 11). Dieser letztere Gedanke möge durch die Figuren 17a, b, c veranschaulicht

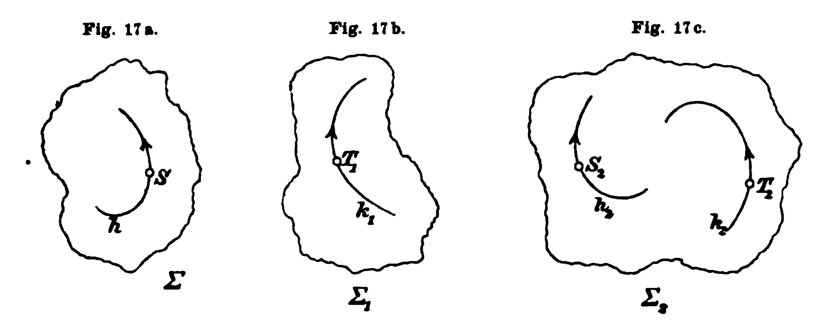


Fig. 17a. Fig. 17b. Fig. 17c.

sein, wo h, h_2 mit ihren Anfangspunkten und Pfeilrichtungen die entsprechenden Polbahnen der Systeme Σ, Σ_2 und k_1, k_2 analog die der Systeme Σ_1, Σ_2 bezeichnen. Wieder ist dann eine Berührungstransformation zwischen den Systemen Σ und Σ_1 durch Aufeinanderfolge der Berührungstransformationen der Bewegung zwischen Σ, Σ_2 und Σ_2, Σ_1 definiert. Aber auf alle diese angedeuteten Verallgemeinerungen wollen wir hier nicht näher eingehen.

Modell XXXI Nr. 3, 11, 9. Alle drei Modelle führen zu derselben Berührungstransformation der Systeme Σ und Σ_1 wie das soeben besprochene, da die Polkreise k_a, k_b in ihnen stets wieder die Radienverhältnisse $a : b = 4 : 3$ besitzen.

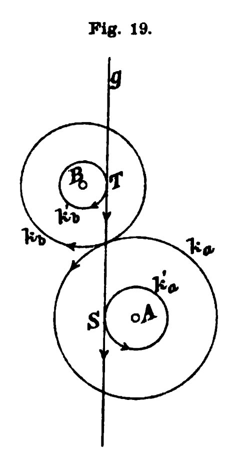
Fig. 18.

Im Gegensatz zu dem vorigen Modell ist im *Modell Nr. 3* der Polkreis des vermittelnden Systems Σ_2 jedoch anders gelegen. Im *Modell Nr. 11* hingegen ist als Polkurve des Systems Σ_2 eine *logarithmische Spirale* gewählt (Fig. 18), und es sind für deren Asymptotenpunkt mit seinen Linienelementen die entsprechenden Kurven in den Systemen Σ und Σ_1 (Kreisevolventen) dargestellt.[1]) Im *Modell Nr. 9* endlich sind zunächst die Systeme Σ und Σ_2 durch den „sekundären" Polkreis k_a und die Polgerade g aufeinander bezogen, die Systeme Σ_1 und Σ_2 durch den „sekundären" Polkreis k_b' und dieselbe Polgerade g

1) Wegen der *vollständigen* Umhüllungskurve aller Lagen der einen Kreisevolvente im andern System vgl. meine zweite in der Anm. S. 281 genannte Arbeit, S. 10—12.

(Fig. 19), und es sind zu einem Punkte des Systems Σ_2 zwei entsprechende Kurven (Kreisevolventen) in Σ und Σ_1 konstruiert. Da dieser Punkt im System Σ_2 auf der Geraden g selbst gewählt ist, so ist also das bei den Modellen XXIV Nr. 6 und 7 oben beschriebene singuläre Verhalten hier benutzt. Es zeigt sich ferner, daß eben diese Kreisevolventen nicht nur entsprechende Kurven derjenigen Berührungstransformation sind, die durch die Polkreise k_a' und k_b' in den Systemen Σ und Σ_1 vermittelt wird, sondern auch derjenigen neuen Berührungstransformationen, die durch irgend welche zu ihnen konzentrische Polkeise k_a und k_b mit dem gleichen Radienverhältnis in den Systemen Σ und Σ_1 vermittelt werden.

Fig. 19.



Modell XXXI Nr. 5, 8, 10. Diese Modelle veranschaulichen den allgemeinen Satz der Theorie der Zahnräderkonstruktionen, der aus unsern bisherigen Ausführungen sich sofort ergibt und im übrigen nicht nur für kreisförmige Polbahnen, d. h. für Zylinder- oder Stirnräder, gültig ist:

41. *Als „wesentliche" Begrenzung der Zahnräder zweier ebenen Systeme Σ und Σ_1 sind nur entsprechende Kurven derjenigen Berührungstransformation zu wählen, welche von der beabsichtigten Bewegung zwischen den Systemen Σ und Σ_1 festgelegt wird.*[1])

Sur la Nomographie,

par W. Láska et Fr. Ulkowski à Lemberg.

Formules fondamentales.

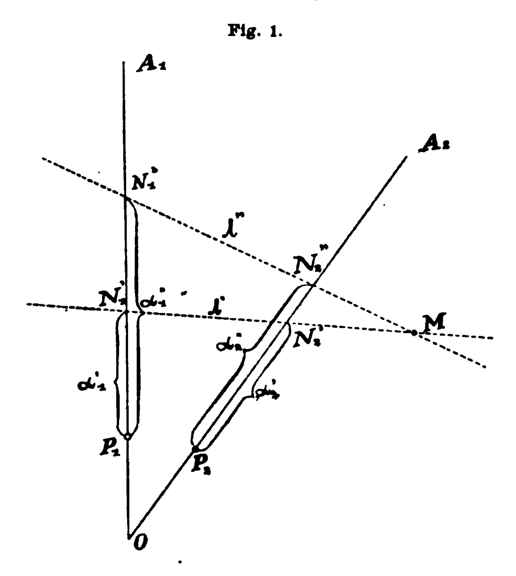
La théorie générale des méthodes nomographiques ne laisse guère à désirer en ce qui concerne: la forme des tableaux graphiqûes, celle des fonctions qu'ils représentent, ainsi que la quantité de variables que ces dernières admettent. Cependant l'application pratique de ses principes généraux présente des difficultés, non seulement dans le cas de formules compliquées, à beaucoup de variables, rentrant dans les types indiqués sommairement par les auteurs, mais même dans les cas connus, pour ainsi dire élémentaires, de la Nomographie.

1) Vgl. Anm. 2 S. 281.

Dans le but d'une application plus facile, et afin de simplifier les calculs et les écritures, nous nous servons de *coordonnées spéciales* que nous nommons *quadrilinéaires.* Leur emploi nous paraît avantageux en ce qui concerne les nomogrammes à 3 et 4 variables, ce qui nous engage à en donner un exposé succinct.

Ne méconnaissant nullement la portée des échelles à support curviligne, nous nous bornons au commencement à l'emploi de celles à support rectiligne, nous réservant du reste l'introduction d'autres formes d'échelles (binaires, multiples, à points condensés).

Fig. 1.



La considération suivante va nous permettre d'épuiser rapidement la presque totalité des nomogrammes à 3 et 4 variables.[1])

L'équation:

$$(1)\qquad \Omega = \frac{a_1 + b_1\alpha_1 + c_1\alpha_2}{a_1 + b_2\alpha_1 + c_2\alpha_2} = \lambda$$

peut être envisagée comme représentant un système de droites, définies par les points extrêmes des segments α_1, α_2, considérés comme coordonnées axiales. (Fig. 1.)

Lorsque le paramètre λ parcourt les valeurs réelles, la droite λ occupe successivement toutes les positions possibles, pour une valeur déterminée de ce paramètre elle tourne autour d'un point fixe M, dont (1) est l'équation.

L'égalité de deux équations de cette sorte:

$$\Omega = \frac{a_1 + b_1\alpha_1 + c_1\alpha_2}{a_2 + b_2\alpha_1 + c_2\alpha_2}, \qquad \Omega' = \frac{d_1 + e_1\alpha_3 + f_1\alpha_4}{d_2 + e_2\alpha_3 + f_2\cdot\alpha_4}$$

c'est-à-dire:

$$(2)\qquad \frac{a_1 + b_1\alpha_1 + c_1\alpha_2}{a_2 + b_2\alpha_1 + c_2\alpha_2} = \frac{d_1 + e_1\alpha_3 + f_1\alpha_4}{d_2 + e_2\alpha_3 + f_2\alpha_4}$$

exprime la condition que deux droites des faisceaux Ω et Ω' se rencontrent sous un angle constant θ (Fig. 2).

---

1) Nomogramme pris dans la signification de table graphique à points alignés. Voir Bull. de l'Ecole Polyt. 1903, M. d'Ocagne, Exposé des principes fondamentaux de la Nomographie, p. 111.

Les segments α_1, α_2, α_3, α_4 définissent un point, ce qui nous conduit à les nommer *coordonnées quadrilinéaires* de ce point.

Pour obtenir la représentation nomographique de la formule

$$\frac{A_1 + B_1 u + C_1 v}{A_2 + B_2 u + C_2 v} = \frac{D_1 + E_1 w + F_1 t}{D_2 + E_2 w + F_2 t} \tag{3}$$

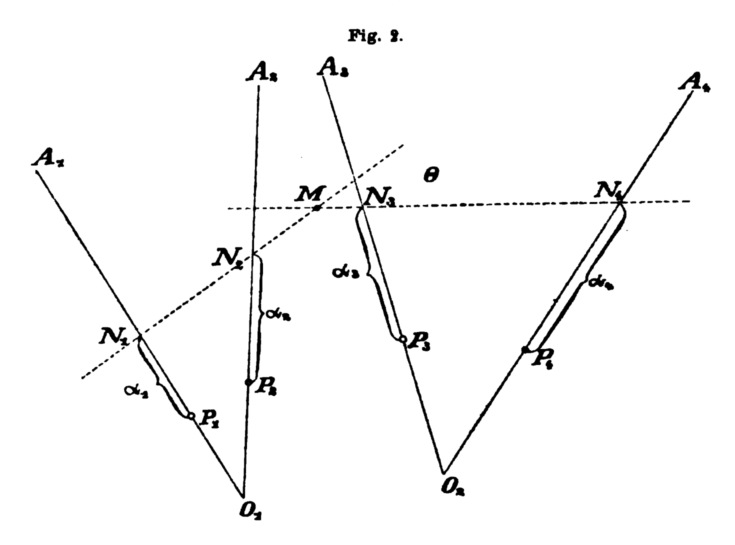
il suffit de substituer dans l'équation (2) aux segments:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4,$$

les échelles fonctionnelles[1]):

$$\delta_1 u, \delta_2 v, \delta_3 w, \delta_4 t.$$

Fig. 2.



[Les facteurs δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 représentent les modules des échelles; u, v, w, t, les valeurs numériques de fonctions d'une ou plusieurs variables]. Le nomogramme se compose alors de quatre échelles:

$$U, V, W, T,$$

et d'un transparent mobile, sur lequel sont tracées deux transversales formant un angle constant θ (Fig. 3).

Les coefficients a, b, c ...., de la formule (2) dépendent évidemment: des positions mutuelles des supports, de celles des origines des échelles, enfin de l'angle θ de l'indicateur.

Désignons par:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4,$$

l'inclinaison des supports:

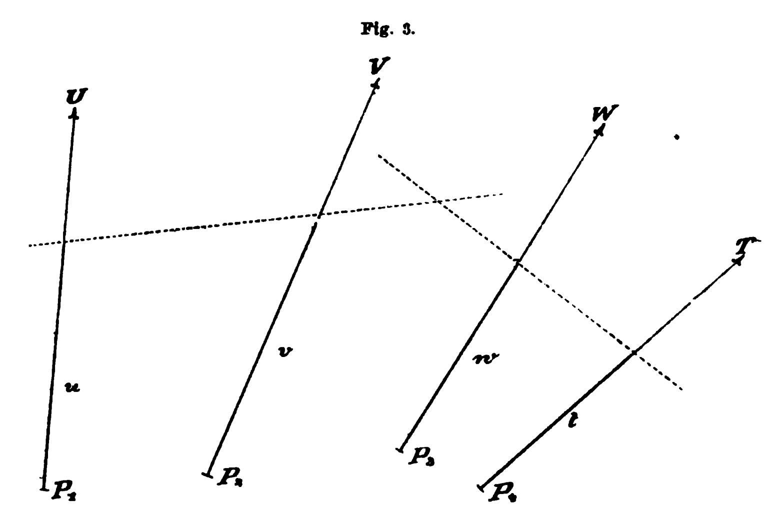
$$U, V, W, T,$$

1) Sur les figures les segments α_1, α_2, α_3, α_4 sont simplement cotés u, v, w, t, au lieu de $\delta_1 u$, $\delta_2 v$, $\delta_3 w$, $\delta_4 t$.

envers une droite quelconque $\bar{X}\bar{X}$, ensuite par:

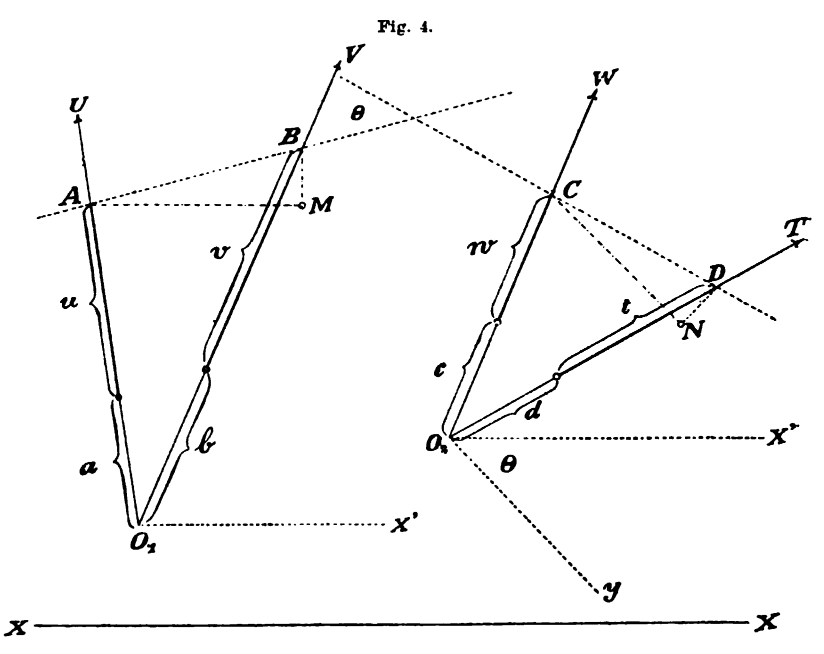
$$a, b, c, d,$$

Fig. 3.



les distances des origines des échelles, et des points O_1, O_2 (points d'intersection des droites U, V, resp. W et T).

Fig. 4.



Nous obtenons de la similitude des triangles ABM et CDN Fig. 4.

$$(4)\quad \frac{(a+\delta_1 u)\sin\varphi_1-(b+\delta_2 v)\sin\varphi_2}{(a+\delta_1 u)\cos\varphi_1-(b+\delta_2 v)\cos\varphi_2}=\frac{(c+\delta_3 w)\sin(\varphi_3+\theta)-(d+\delta_4 t)\sin(\varphi_4+\theta)}{(c+\delta_3 w)\cos(\varphi_3+\theta)-(d+\delta_4 t)\cos(\varphi_4+\theta)}$$

ou bien désignant par:

$$l_1,\ m_1;\quad l_2,\ m_2,$$

les projections des segments d_1, d_2 (distances des origines des échelles u et v; w et t) sur l'axe $\overline{O_1 X'}$, ou bien $\overline{O_2 Y}$, et sur des axes perpendiculaires à ceux-ci:

$$(5)\quad \frac{l_1+\delta_1 u\sin\varphi_1-\delta_2 v\sin\varphi_2}{m_1+\delta_1 u\cos\varphi_1-\delta_2 v\cos\varphi_2}=\frac{l_2+\delta_3 w\sin(\varphi_3+\theta)-\delta_4 t\sin(\varphi_4+\theta)}{m_2+\delta_3 w\cos(\varphi_3+\theta)-\delta_4 t\cos(\varphi_4+\theta)}.$$

Comparant les formules (3) et (4) nous obtenons entre leurs coefficients les relations suivantes:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases}\varrho A_1 = a\sin\varphi_1 - b\sin\varphi_2 = l_1\\ \varrho A_2 = a\cos\varphi_1 - b\cos\varphi_2 = m_1\\ \varrho B_1 = \delta_1\sin\varphi_1\\ \varrho B_2 = \delta_1\cos\varphi_1\\ \varrho C_1 = -\delta_2\sin\varphi_2\\ \varrho C_2 = -\delta_2\cos\varphi_2\end{cases}$$

ainsi que:

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases}\sigma D_1 = c\sin(\varphi_3+\theta) - d\sin(\varphi_4+\theta) = l_2\\ \sigma D_2 = c\cos(\varphi_3+\theta) - d\cos(\varphi_4+\theta) = m_2\\ \sigma E_1 = \delta_3\sin(\varphi_3+\theta)\\ \sigma E_2 = \delta_3\cos(\varphi_3+\theta)\\ \sigma F_1 = -\delta_4\sin(\varphi_4+\theta)\\ \sigma F_2 = -\delta_4\cos(\varphi_4+\theta).\end{cases}$$

Ces formules nous permettent de construire rapidement les échelles désirées, car elles nous donnent:

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases}\operatorname{tang}\varphi_1 = \dfrac{B_1}{B_2},\\ \operatorname{tang}\varphi_2 = \dfrac{C_1}{C_2},\\ \operatorname{tang}(\varphi_3+\theta) = \dfrac{E_1}{E_2},\\ \operatorname{tang}(\varphi_4+\theta) = \dfrac{F_1}{F_2},\\ \delta_1 = \varrho\sqrt{B_1^2+B_2^2},\quad \delta_2 = \varrho\sqrt{C_1^2+C_2^2}.\\ \delta_3 = \sigma\sqrt{E_1^2+E_2^2},\quad \delta_4 = \sigma\sqrt{F_1^2+F_2^2}.\end{cases}$$

Connaissant l'inclinaison des supports, les points d'origine des échelles, (fournis par une simple construction au moyen des projections:

$$l_1 = \varrho A_2, \quad m_1 = \varrho A_2;$$
$$l_2 = \sigma D_1, \quad m_2 = \sigma D_2.)$$

connaissant enfin les modules des échelles

$$\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4,$$

nous sommes en possession de tous les éléments qui définissent les échelles:

$$\alpha_1 = \delta_1 u, \quad \alpha_2 = \delta_2 v, \quad \alpha_3 = \delta_3 w, \quad \alpha_4 = \delta_4 t.$$

Nous pouvons déduire d'un nomogramme obtenu une infinité d'autres par transformations homographiques. Cependant une telle transformation détorierait en général la condition de constance de l'angle θ, le nomogramme deviendrait à pivotement.

De simples transformations algébriques, ou mieux la multiplication du déterminant, sous lequel on peut représenter l'équation (3):

$$(6) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} A_1 + B_1 u + C_1 v, & A_2 + B_2 u + C_2 v \\ D_1 + E_1 w + F_1 t, & D_2 + E_2 w + F_2 t \end{vmatrix} = 0$$

par:

$$\delta = \begin{vmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{vmatrix} \neq 0$$

fournissent

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \varkappa A_1 + \lambda A_2 + u(\varkappa B_1 + \lambda B_2) + v(\varkappa C_1 + \lambda C_2), & \mu A_1 + \nu A_2 + u(\mu B_1 + \nu B_2) + v(\mu C_1 + \nu C_2) \\ \varkappa D_1 + \lambda D_2 + w(\varkappa E_1 + \lambda E_2) + t(\varkappa F_1 + \lambda F_2), & \mu D_1 + \nu D_2 + w(\mu E_1 + \nu E_2) + t(\mu F_1 + \nu F_2) \end{vmatrix} = 0$$

c'est-à-dire:

$$(8) \qquad \frac{\varkappa A_1 + \lambda A_2 + u(\varkappa B_1 + \lambda B_2) + v(\varkappa C_1 + \lambda C_2)}{\mu A_1 + \nu A_2 + u(\mu B_1 + \nu B_2) + v(\mu C_1 + \nu C_2)} = \frac{\varkappa D_1 + \lambda D_2 + w(\varkappa E_1 + \lambda E_2) + t(\varkappa F_1 + \lambda F_2)}{\mu D_1 + \nu D_2 + w(\mu E_1 + \nu E_2) + t(\mu F_1 + \nu F_2)}$$

ou bien:

$$(9) \qquad \frac{A_1' + B_1' u + C_1' v}{A_2' + B_2' u + C_2' v} = \frac{D_1' + E_1' w + F_1' t}{D_2' + E_2' w + F_2' t}$$

formule représentable par un nomogramme du même genre que le premier.

Cette transformation, la seule qui ne change pas le type des tables graphiques, nous permet d'obtenir tous les nomogrammes possibles, correspondant à la formule donnée, et, donc aussi, de choisir parmi eux ceux qui lui conviennent le mieux.

Une foule de propriétés intéressantes découle immédiatement des rélations trouvées plus haut.

1°. Le choix de la direction de l'axe $\overline{XX}$, est arbitraire. On peut donc augmenter ou diminuer, d'une certaine grandeur φ les angles:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

car cela revient à changer de φ la direction de l'axe. On peut donc toujours transformer (3) de façon que l'un de ces angles soit un angle donné: 0° où 90° par ex.

2°. La distance $\overline{O_1 O_2}$ n'intervient dans aucune des formules (I), (II), (III). Elle peut donc être choisie à volonté, ce qui nous fournit la faculté de déplacer à notre gré les systèmes (I) et (II) dans des directions quelconques, pourvu que les angles φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 ne changeassent pas, c'est-à-dire pourvu que les supports restassent parallèles. Cette propriété est précieuse, car elle permet de restreindre les dimensions utiles des nomogrammes.

3°. Le choix des facteurs ϱ et σ est facultatif pour chaque partie (I) et (II). Nous pouvons en leur assignant des valeurs appropriées réduire ou bien amplifier chacune de ces parties, pourvu qu'elle restasse semblable à son aspect primitif.

4°. Si nous désignons:

$$\begin{aligned} \theta - \theta_1 &\text{ par } \theta', \\ \varphi_3 + \theta_1 &\quad \text{„} \quad \varphi_3', \\ \varphi_4 + \theta_1 &\quad \text{„} \quad \varphi_4', \end{aligned}$$

θ_1 étant un angle arbitraire, les fonctions goniométriques du côté gauche de l'équation (3) peuvent s'écrire:

$$\sin(\varphi_3 + \theta) = \sin(\varphi_3 + \theta_1 + \theta - \theta_1) = \sin(\varphi_3' + \theta')$$

de même

$$\begin{aligned} \cos(\varphi_3 + \theta) &= \cos(\varphi_3' + \theta') \\ \sin(\varphi_4 + \theta) &= \sin(\varphi_4' + \theta') \\ \cos(\varphi_4 + \theta) &= \cos(\varphi_4' + \theta'). \end{aligned}$$

Nous sommes donc en état d'assigner à l'angle constant de l'indicateur une valeur quelconque θ'. Il faudra seulement dans ce cas ajouter aux angles primitifs

$$\varphi_3, \quad \varphi_4$$

l'angle

$$\theta_1 = \theta - \theta',$$

ce qui revient à faire effectuer aux supports W et T une giration autour du point O_2, dans le même sens et de la même grandeur que celle de la droite mobile de l'indicateur autour du point M. Fig. 4.

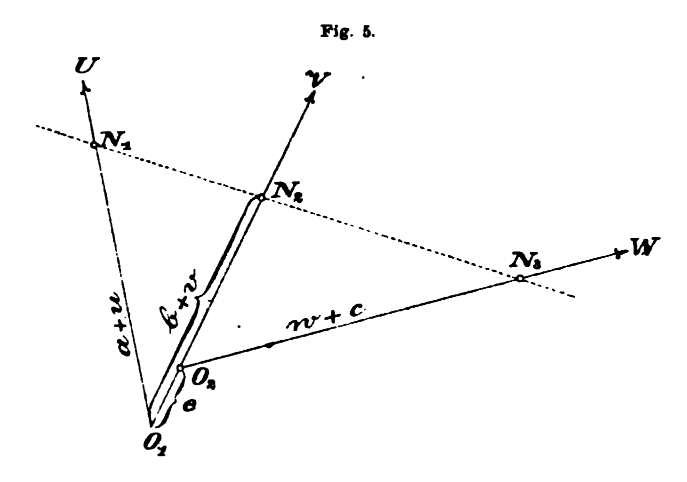
En pratique on se borne ordinairement aux deux cas, 1° $\theta' = 0$ (Beghin, nomogrammes à parallèles), et 2°: $\theta' = 90^0$ (Goedseels, nomogrammes à équerre). Néanmoins on peut recourir à d'autres angles, soit en vue d'une meilleure disposition des échelles, soit d'une réduction des dimensions de la table graphique, soit enfin afin de faire coïncider des échelles diverses à graduation congruente. (Cela cependant n'est avantageux que lorsque une méprise est exclue.)

Puisqu'on peut tirer de la formule

$$\frac{A_1 + B_1 u + C_1 v}{A_2 + B_2 u + C_2 v} = \frac{D_1 + E_1 w + F_1 t}{D_2 + E_2 w + F_2 t}$$

presque tous les nomogrammes connus (excepté ceux à pivotement, qui pourtant s'y rattachent par simple transformation homographique)

Fig. 5.



nous lui donnons la dénomination de *formule fondamentale quadrilinéaire.* Y substituant:

$$\theta = 0^0, \quad \varphi_4 = \varphi_2, \quad d + \delta_4 t = b + \delta_2 v - e,$$

nous obtenons, réduction faite:

$$(10) \quad \begin{aligned} (a + \delta_1 u)\cdot(c + \delta_3 w) \sin(\varphi_1 - \varphi_3) + (c + \delta_3 w)(b + \delta_2 v) \sin(\varphi_3 - \varphi_2) \\ + (b + \delta_2 v - e)\cdot(a + \delta_1 u) \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{aligned}$$

formule fondamentale trilinéaire, dont l'image nomographique constituent trois échelles non concourantes, rencontrées par une droite mobile (Fig. 5).

Les supports forment entre eux les angles

$$\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$$
$$\beta = \varphi_2 - \varphi_3$$

de sorte que l'équation devient

$$(11)\qquad \begin{aligned}(a+\delta_1 u)(c+\delta_3 w)\sin(\alpha+\beta) = (a+\delta_1 u)(b+\delta_2 v - e)\sin\alpha \\ (b+\delta_2 v)(c+\delta_3 w)\sin\beta.\end{aligned}$$

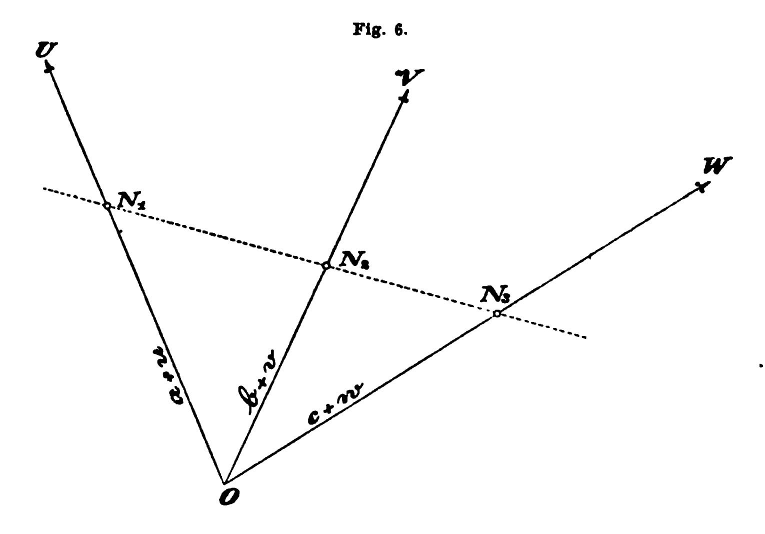
Les échelles concourent lorsque le point O_1 coïncide avec O_2, c'est-à-dire lorsque: $e=0$, (Fig. 6) alors:

$$(12)\qquad \begin{aligned}&(a+\delta_1 u)\cdot(c+\delta_3 w)\sin(\alpha+\beta) \\ &= (a+\delta_1 u)\cdot(b+\delta_2 v)\sin\alpha + (b+\delta_2 v)\cdot(c+\delta_3 w)\sin\beta\end{aligned}$$

ou bien:

$$(13)\qquad \frac{\sin(\alpha+\beta)}{b+\delta_2 v} = \frac{\sin\beta}{a+\delta_1 u} + \frac{\sin\alpha}{c+\delta_3 w}.$$

Fig. 6.



Enfin lorsque les angles φ_1, φ_2, φ_3 tendent vers une même limite φ, et que les valeurs a, b, c deviennent infiniment grandes, mais de sorte que:

$$\lim b\sin(\varphi_2-\varphi_3) = \lim c\sin(\varphi_2-\varphi_3) = p$$

$$\lim a\sin(\varphi_1-\varphi_2) = \lim b\sin(\varphi_1-\varphi_2) = q$$

d'où

$$\lim a\sin(\varphi_1-\varphi_3) = \lim c\sin(\varphi_1-\varphi_3) = p+q$$

la formule (13) devient

$$(14)\qquad u\delta_1 p + w\delta_3 q = v\delta_2(p+q),$$

formule fondamentale bilinéaire, bien connue dans le calcul barycentrique.

La déduction des formules (3) et (4) des différentes formes de nomogrammes ne présente aucune difficulté.

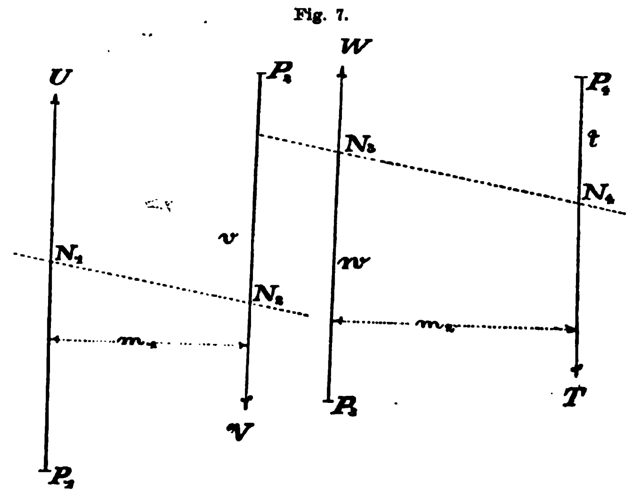
La substitution $\varphi_1 = \varphi_3 + \theta = 90^0$

$\varphi_2 = \varphi_4 + \theta = 270^0$

dans (4) donne immédiatement

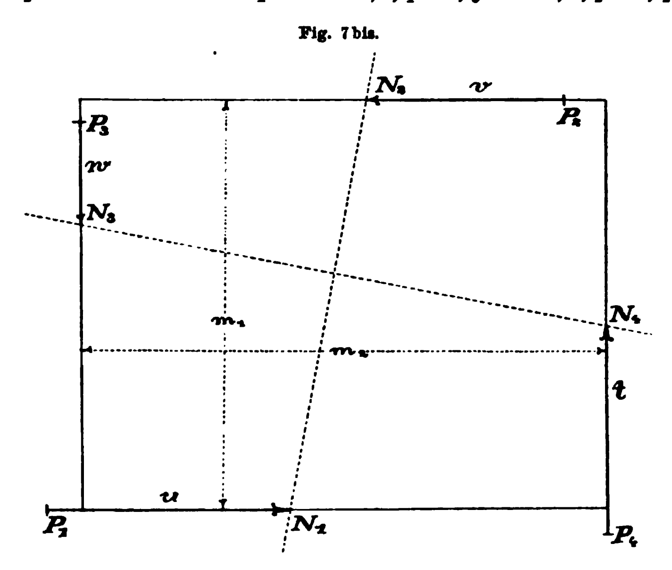
$$\frac{l_1 + \delta_1 u + \delta_2 v}{m_1} = \frac{l_2 + \delta_3 w + \delta_4 t}{m_2}. \tag{15}$$

Fig. 7.



Les supports U et V, W et T sont des parallèles, distantes de m_1, ou m_2 entre elles. Lorsque $\theta = 0$, $\varphi_1 = \varphi_3 = 90^0$, $\varphi_2 = \varphi_4 = 270^0$,

Fig. 7bis.



le nomogramme est représenté par la figure (7); lorsque $\theta = 90^0$, $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 180^0$ par la figure (7bis), rectangle aux côtés m_1 et m_2.

Les fonctions susceptibles d'une telle représentation sont:

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) + f_4(\alpha_4) = 0$$

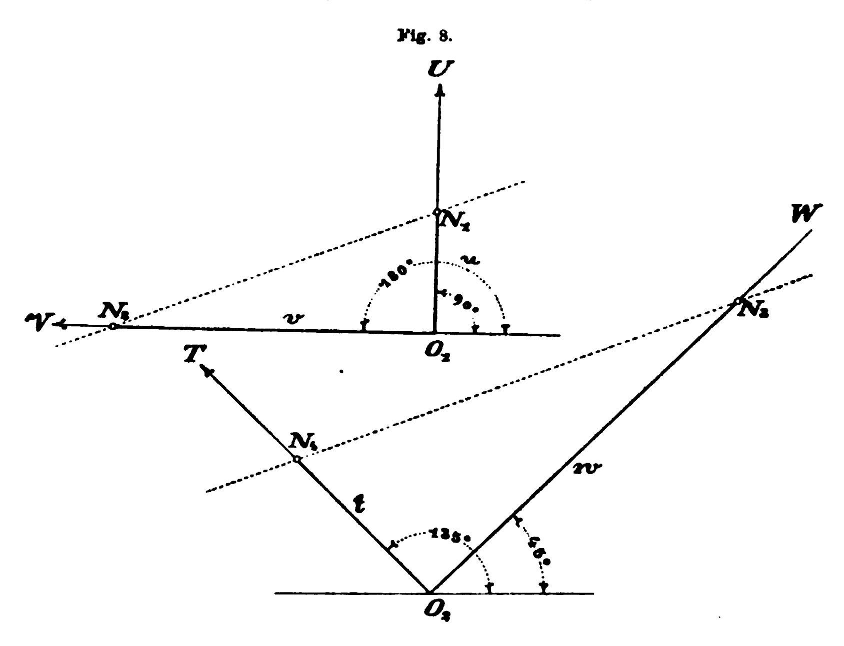
ou bien

$$f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3) \cdot f_4(\alpha_4)$$

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_1(\alpha_1) \cdot f_2(\alpha_2) = f_3(\alpha_3) + f_4(\alpha_4) + f_3(\alpha_3) \cdot f_4(\alpha_4)$$

formules qui s'y ramènent par transformation logarithmique.

Fig. 8.



Cette dernière transformation n'est pas indispensable, car les substitutions:

$$\varphi_1 = \varphi_3 + \theta = 90^0$$

$$\varphi_2 = \varphi_4 + \theta = 0^0$$

$$a = b = c = d$$

fournissent:

$$\frac{\delta_1 u}{-\delta_2 v} = \frac{\delta_3 w}{-\delta_4 t}$$

c'est-à-dire:

$$\delta_1 \delta_4 u t = \delta_2 \delta_3 v w. \tag{16}$$

Les formules d'emploi courant:

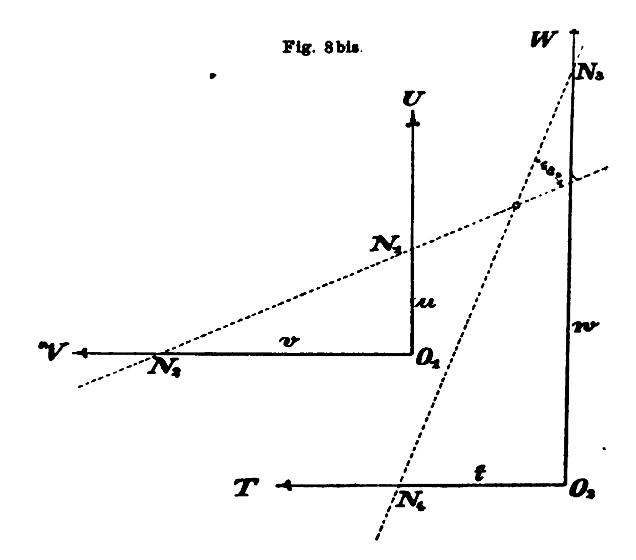
$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \sin B = \sin \beta \sin A$$

$$\Delta \varepsilon'' = 20\,265 \frac{d}{D} \sin A \text{ etc.}$$

ont justement cette forme.

Fig. 8 bis.

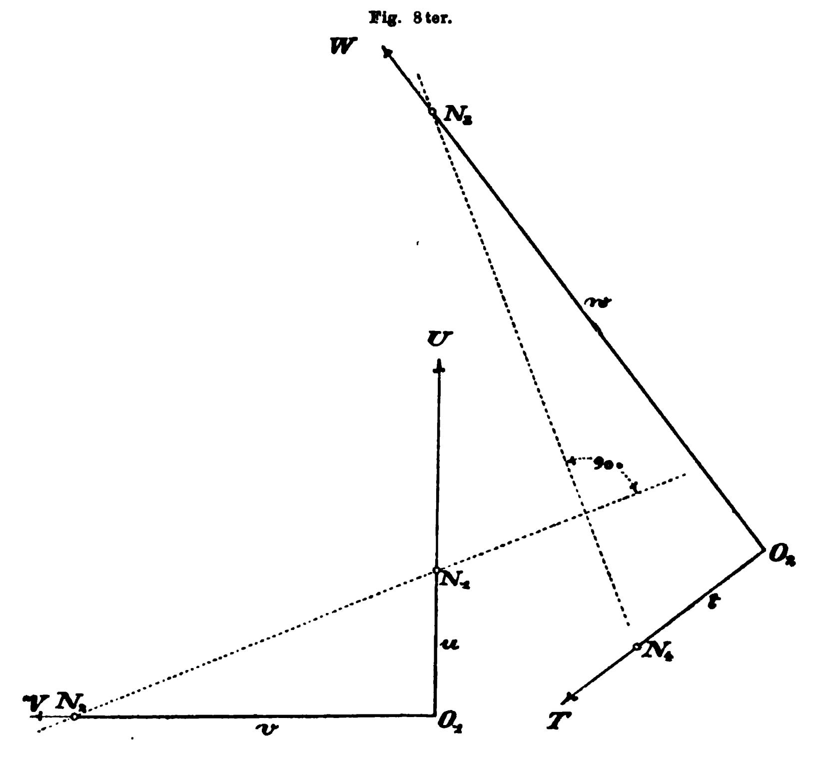


Remarque. Il peut être utile d'adopter pour les formules

$$a \sin \beta = b \sin \alpha$$

$$\sin \alpha \sin B = \sin \beta \sin A$$

Fig. 8 ter.



l'indicateur à parallèles, car on peut alors faire coïncider les échelles a et b, α et β, A et B, ce qui simplifie le tracé, et même exclut les méprises.

La substitution:

$$\varphi_1 = 90^0, \quad \varphi_2 = 180^0, \quad \varphi_3 + \theta = 45^0, \quad \varphi_4 + \theta = 135^0$$

avec

$$a = b = c = d = 0,$$

$$\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_4,$$

donne

$$\frac{u}{v} = \frac{w-t}{w+t}, \quad \text{aussi } u = v \cdot \frac{w-t}{w+t} \tag{17}$$

lorsque $\theta = 0^0$, -45^0, -90^0 le nomogramme adopte successivement la forme des figures: 8, 8 bis, 8 ter. Ces nomogrammes sont propres à représenter des formules telles que:

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotang} \frac{\gamma}{2}$$

et analogues.

II.

Introduction d'échelles curvilignes.

L'admission

$$a = b = c = d = 0$$

réduit les formules (I) et (II) à:

$$(\mathrm{I}') \quad \begin{cases} \varrho A_1 = 0, & \varrho A_2 = 0 \\ \varrho B_1 = \delta_1 \sin \varphi_1, & \varrho B_2 = \delta_1 \cos \varphi_1 \\ \varrho C_1 = -\delta_2 \sin \varphi_2, & \varrho C_2 = -\delta_2 \cos \varphi_2 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}') \quad \begin{cases} \sigma D_1 = 0 & \sigma D_2 = 0 \\ \sigma E_1 = \delta_3 \sin(\varphi_3 + \theta), & \sigma E_2 = \delta_3 \cos(\varphi_3 + \theta) \\ \sigma F_1 = -\delta_4 \sin(\varphi_4 + \theta), & \sigma F_2 = -\delta_4 \cos(\varphi_4 + \theta) \end{cases}$$

On peut admettre encore, que les coefficients:

$$B, C, E, F,$$

dépendent des mêmes variables que

$$u, v, w, t.$$

Les angles:

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

dépendront de même des mêmes variables. Les échelles rectilignes

seront alors remplacées par des échelles curvilignes, dont les points sont définis par les coordonnées polaires:

$$\delta_1 u,\ \delta_2 v,\ \delta_3 w,\ \delta_4 t,\ \text{(vecteurs)}$$

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \varphi_4\ \text{(leurs inclinaisons envers un axe } XX\text{)}.$$

Les formules (III) nous fournissent immédiatement:

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} \varphi_1 = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{B_1}{B_2} = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{B_1 u}{B_2 u} \\ \varphi_2 = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{C_1}{C_2} = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{C_1 w}{C_2 w} \\ \varphi_3 + \theta = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{E_1}{E_2} = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{E_1 w}{E_2 w} \\ \varphi_4 + \theta = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{F_1}{F_2} = \operatorname{arc\,tang} \dfrac{F_1 t}{F_2 t} \\ \delta_1 = \varrho\sqrt{B_1^2 + B_2^2}, \quad \alpha_1 = \delta_1 u = \varrho\sqrt{B_1^2 u^2 + B_2 u^2}, \\ \delta_2 = \varrho\sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \quad \alpha_2 = \delta_2 v = \varrho\sqrt{C_1^2 v^2 + C_2^2 v^2}, \\ \delta_3 = \sigma\sqrt{E_1^2 + E_2^2}, \quad \alpha_3 = \delta_3 w = \sigma\sqrt{E_1^2 w^2 + E_2^2 w^2} \\ \delta_4 = \sigma\sqrt{F_1^2 + F_2^2}, \quad \alpha_4 = \delta_4 t = \sigma\sqrt{F_1^2 t^2 + F_2^2 t^2} \end{cases}$$

Exemple. La formule:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{\operatorname{cosec}\gamma}{\operatorname{cotang}\gamma + \operatorname{cotang}\alpha}$$

qui sert à résoudre tous les triangles, parmi les éléments connus desquels intervienne au moins un angle, rentre justement dans ce type.

Il suffit d'y substituer:

$$\varphi_1 = 90^0, \quad \varphi_2 = 180^0,$$

$$\delta_1 u = \varrho b, \quad \delta_2 v = \varrho a$$

$$\delta_4 t = \sigma \operatorname{cotang}\alpha \quad (\varphi_4 + \theta) = -270^0$$

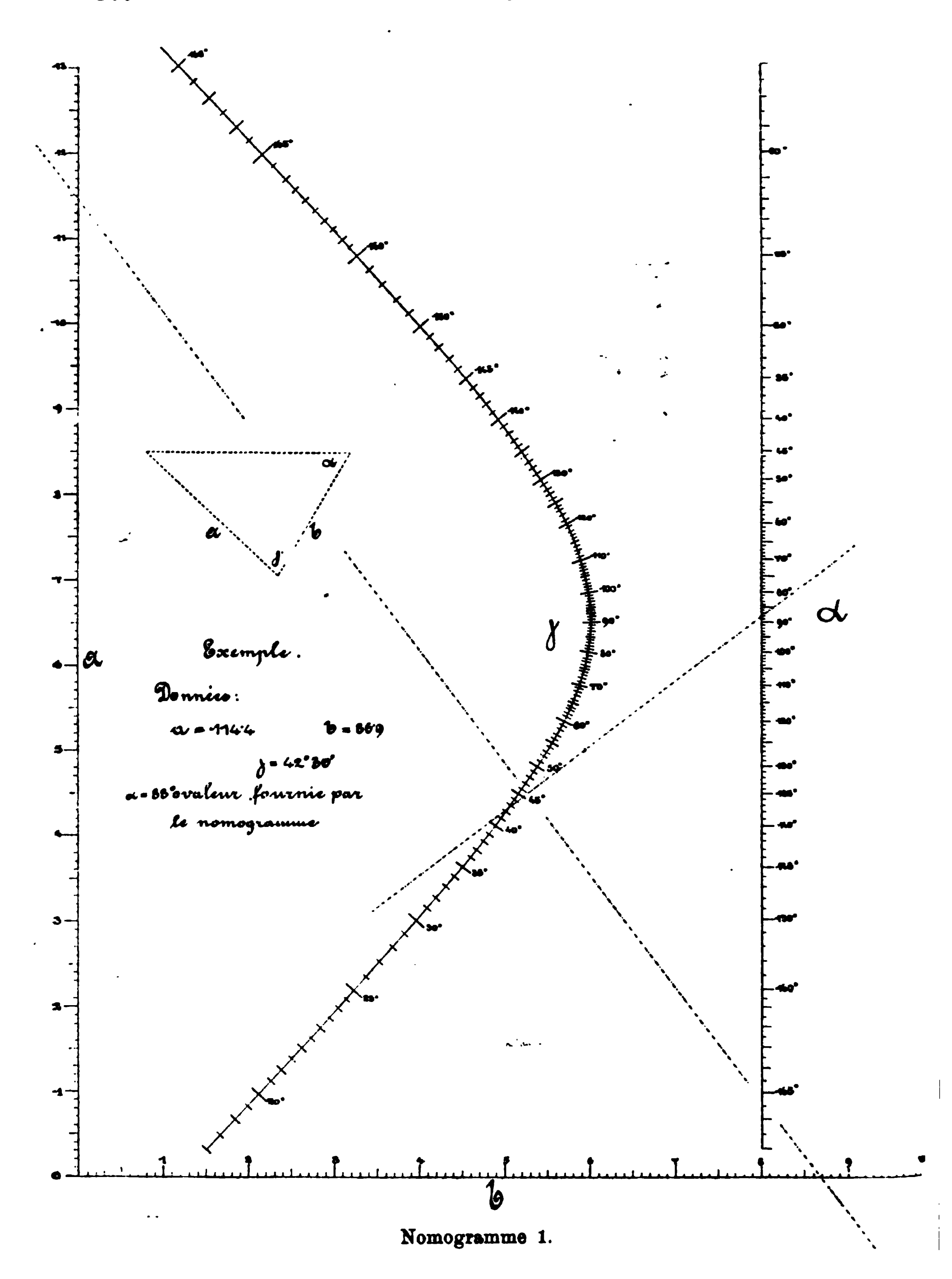
$$\delta_3 w \cos(\varphi_3 + \theta) = \sigma \operatorname{cotang}\gamma$$

$$\delta_3 w \sin(\varphi_3 + \theta) = \sigma \operatorname{cosec}\gamma.$$

Les trois premières échelles sont rectilignes, les deux premières regulières, la troisième se construit rapidement soit au moyen d'une table des valeurs naturelles des fonctions goniométriques, soit au moyen d'un rapporteur. La quatrième est une échelle curviligne aux coordonnées polaires:

$$\varphi_3 + \theta = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{1}{\cos\gamma}\right)$$

$$w\delta_3 = \sigma\sqrt{1 + 2\operatorname{cosec}^2\gamma}.$$



Nomogramme 1.

Exprimant ces coordonnées polaires en cartésiennes envers l'axe $O_2 Y$:

$$y = \delta_3 w \sin(\varphi_3 + \theta) = \sigma \operatorname{cosec} \gamma$$
$$x = \delta_3 w \cos(\varphi_3 + \theta) = \sigma \operatorname{cotang} \gamma$$

l'équation du support devient

$$y^2 - x^2 = \sigma^2 (\operatorname{cosec}^2 \gamma - \operatorname{cotang}^2 \gamma) = \sigma^2$$

équation d'une hyperbole équilatérale facile à construire, par exemple au moyen de ses asymptotes

$$y = \pm x$$

et d'un de ses points. La graduation de cette échelle s'obtient par simple projection orthogonale de l'échelle $\delta_4 t = \sigma \operatorname{cotang} \alpha$, puisque $x = \sigma \operatorname{cotang} \gamma$. (Nomogramme 1).

III.

Echelles binaires.

La supposition de ce que les angles

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$$

et leurs vecteurs

$$\delta_1 u, \delta_2 v, \delta_3 w, \delta_4 t$$

dépendent de plusieurs variables conduit à l'introduction d'échelles multiples, qui dans le cas spécial de deux variables forment des réseaux de courbes isoplèthes nommés échelles binaires. Les courbes d'un réseau peuvent se confondre en une courbe unique, support alors d'une échelle à points condensés.

Les formules restent les mêmes que celles des nomogrammes à support curviligne (III').

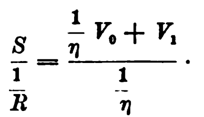
Il est pourtant quelquefois avantageux d'introduire les coordonnées cartésiennes. Si nous les rapportons pour la partie (I) à l'axe $O_1 X$, et à un axe perpendiculaire à celui-ci, pour la partie (II) à l'axe $O_2 Y$ et de même à un axe perpendiculaire fig. 4, nous obtenons

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} \xi_1' = \delta_1 u \cos \varphi_1 = \varrho B_2 u, \\ \eta_1' = \delta_1 u \sin \varphi_1 = \varrho B_1 u, \\ \xi_2' = \delta_2 v \cos \varphi_2 = -\varrho C_2 v, \\ \eta_2' = \delta_2 v \sin \varphi_2 = -\varrho C_1 v \\ \text{et de même} \\ \xi_3'' = \delta_3 w \cos(\varphi_3 + \theta) = +\sigma E_2 w \\ \eta_3'' = \delta_3 w \sin(\varphi_3 + \theta) = +\sigma E_1 w, \\ \xi_4'' = \delta_4 t \cos(\varphi_4 + \theta) = -\sigma F_2 t, \\ \eta_4'' = \delta_4 t \sin(\varphi_4 + \theta) = -\sigma F_1 t. \end{cases}$$

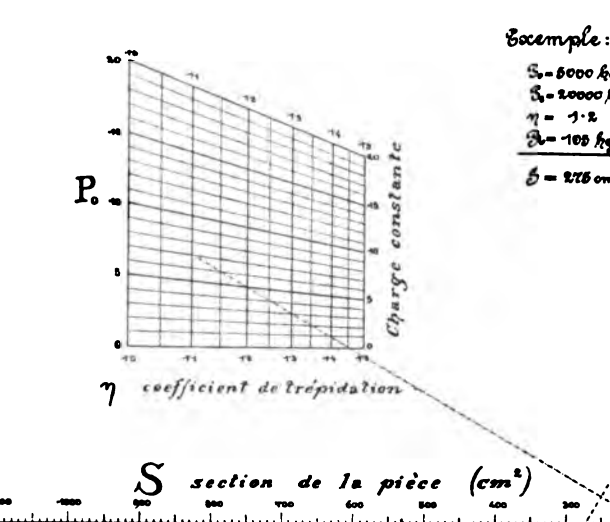
Exemple. La formule de Winkler:

$$S = \frac{P_0 + \eta P_1}{R},$$

qui sert à calculer les dimensions des pièces de charpente soumises à des efforts variable, peut s'écrire



$$\frac{S}{\frac{1}{R}} = \frac{\frac{1}{\eta} V_0 + V_1}{\frac{1}{\eta}}.$$



Nomogramme 2.

Les substitutions

$$B_1 u = S, \quad B_2 u = 0$$
$$C_1 v = 0, \quad C_2 v = \frac{1}{R}$$
$$E_1 w = \frac{1}{\eta} V_0 \quad E_2 w = \frac{1}{\eta}$$
$$F_1 t = V_1 \quad F_2 t = 0$$

donnent

$$\xi_1' = 0, \quad \eta_1' = \varrho S$$
$$\xi_2' = -\frac{\varrho}{R} \quad \eta_2' = 0$$
$$\xi_3'' = \frac{\sigma}{\eta}, \quad \eta_3'' = \frac{\sigma V_0}{\eta}$$
$$\xi_4'' = 0 \quad \eta_4'' = -\sigma V_1.$$

Les échelles S, P_1, R sont des échelles rectilignes, les deux premières régulières, la troisième se déduit d'une échelle rectiligne par projection centrale, l'échelle P_0, η est une échelle binaire constituée de droites parallèles cotées η

$$\xi_s'' = \frac{\sigma}{\eta};$$

et de radiantes issues du point O_2

$$\eta_s'' = P_0 \xi_s''$$

cotées P_0. (Nomogramme 2).

Bien que notre méthode puisse se rattacher aux beaux travaux de *Mr* d'Ocagne[1]) et de *Mr* Soreau[2]), cependant nous supposons qu'elle présente des avantages, parmi lesquels il faut citer, que dans le cas d'échelles rectilignes, c'est-à-dire dans les cas les plus fréquents en pratique, elle fournit de suite une construction aisée: des supports, de la graduation des échelles dont on connaît les modules, et puis, que les transformations des nomogrammes et des formules sont faciles et ressortent pour ainsi dire de ces dernières.

Über ein Dreikörperproblem.

Von P. Bohl in Riga.

Einleitung.

1. Betrachtet man den Saturnring als starren, *um eine Achse symmetrischen* Körper, so wirken, wie Laplace gezeigt hat, Saturn und Ring so aufeinander, als ob Ringmittelpunkt und Saturnmittelpunkt einander abstießen.[3]) Auf Grund dieses Resultats kommt Laplace zu dem Schluß, daß die geringste Störung des Gleichgewichts z. B. von Seiten eines Kometen oder Satelliten das Hinabstürzen des Ringes auf die Oberfläche des Saturn zur Folge haben müßte. Wir werden sogleich sehen, daß diese Behauptung nicht völlig genau ist. Maxwell ist dann

1) M. d'Ocagne. Traité de Nomographie. Chap. V. Abaques dérivés des abaques à points alignés.

2) M. R. Soreau. Contribution à la théorie et aux applications de la Nomographie. Mémoires de la Soc. des Ing. civ. de France. Chap.: Abaques à réseaux rectilignes et abaques corrélatifs à points alignés.

3) Laplace nimmt der Einfachheit wegen den Ring als homogene Kreislinie an.

später in seiner berühmten Abhandlung über den Saturnring zu dem Ergebnis gelangt, daß die Abweichungen von der symmetrischen Gestalt bei einem starren Ringe bedeutend sein müßten. Da auch noch andere Gründe gegen die Annahme eines starren Ringes sprechen, so ist dieselbe wohl als endgültig aufgegeben anzusehen. Damit ist jedoch das theoretische Interesse, welches sich an die genannte Hypothese knüpft, nicht erschöpft. In meiner in russischer Sprache verfaßten Abhandlung[1]) „Über gewisse Differentialgleichungen allgemeinen Charakters, die in der Mechanik Anwendung finden" habe ich gezeigt, daß bei recht allgemeinen Annahmen hinsichtlich der störenden Kräfte sich unendlich viele Bewegungen nachweisen lassen, bei denen es zu keinem Zusammenstoß zwischen Ring und Saturn kommt. Ferner gibt es hierbei *eine* Bewegung, welche sich sowohl in die unendliche Zukunft als auch in die unendliche Vergangenheit fortsetzt, ohne daß ein Zusammenstoß sich ereignet. Da Laplace jedoch gerade die Störung von Seiten eines Satelliten erwähnt, so will ich in dieser Abhandlung das sich demgemäß ergebende Dreikörperproblem behandeln. Ich formuliere hier zunächst die eingeführten Voraussetzungen und teile das im folgenden bewiesene Theorem mit.

2. Den Saturn und den Trabanten betrachten wir als Kugeln mit konzentrischer Massenanordnung. Der Saturnradius werde als Längeneinheit, die Saturnmasse als Masseneinheit genommen. Die Zeiteinheit werde so gewählt, daß ein materieller Punkt von der Masse 1 einem gleichen Punkt die Beschleunigung 1 erteilt, falls der Abstand der beiden Punkte gleich der Längeneinheit ist.

Die Annahme der Symmetrie des Ringes um eine Achse lasse ich fallen[2]), setze aber voraus, daß derselbe sich nur wenig von einem Ringe $\mathfrak{R}$ unterscheidet, der um eine Achse und außerdem bezüglich einer dazu senkrechten Ebene (der Ringebene) symmetrisch ist. Wie dieses „wenig" zu verstehen ist, werde ich alsbald mitteilen. Auch der vorliegende Ring R soll wie der Ring $\mathfrak{R}$ bezüglich der Ringebene symmetrisch sein. Die Kurven, welche die Schnitte R und $\mathfrak{R}$ mit der Ringebene von außen und innen begrenzen, sollen äußerer und innerer Rand von R resp. $\mathfrak{R}$ heißen. Wir setzen voraus, daß die zur Ringebene senkrechten Zylinderflächen, welche durch den äußeren und inneren Rand von R resp. $\mathfrak{R}$ gehen, den Ring R resp. $\mathfrak{R}$ einschließen. Die Halbmesser des inneren und äußeren Randes von $\mathfrak{R}$ und die Masse

1) In Dorpat 1900 als Dissertation erschienen.

2) Damit soll aber der Fall des um eine Achse symmetrischen Ringes keineswegs *ausgeschlossen* sein.



dieses Ringes wollen wir bezw. mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ und $\mathfrak{M}$ bezeichnen, wobei $\mathfrak{r}_1 > 1$ ist. Bezüglich der Dicke des Ringes $\mathfrak{R}$ werde folgende Annahme gemacht. Wir denken uns den Mittelpunkt des Saturn auf der Ringebene so gelegen, daß die Saturnkugel den Ring $\mathfrak{R}$ von innen berührt. Die Halbebene, welche durch die Achse von $\mathfrak{R}$ begrenzt wird und durch den Saturnmittelpunkt hindurchgeht, bildet dann mit $\mathfrak{R}$ eine Schnittfigur, die, vom Saturnmittelpunkt aus gesehen, unter einem so kleinen Winkel ω erscheinen soll, daß

$$1 - \cos^3\left(\frac{\omega}{2}\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^2 \frac{(\mathfrak{r}_1 - 1)^{2n-1}}{\mathfrak{r}_2^{2n+1}}$$

gilt.

M bedeutet die Masse von R. μ sei die Masse des Trabanten, sein Halbmesser sei kleiner als die positive Zahl τ. Wir behalten uns vor, μ einen Kleinheitsgrad vorzuschreiben, der durch $\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \tau$ definiert ist. Mit andern Worten, wir behalten uns vor, die bisherigen Voraussetzungen durch eine Ungleichung $\mu < f\,(\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \tau)$ zu ergänzen[1]), wobei f eine eindeutige stets positive Funktion der hingeschriebenen Größen ist. Zweitens reservieren wir uns das Recht, $\mathfrak{M}$ einen Kleinheitsgrad zu erteilen, der durch $\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \tau\ \mu$ definiert ist.

Endlich präzisieren wir die Voraussetzung, daß beim Übergang vom Ringe $\mathfrak{R}$ zum Ringe R nur eine geringfügige Änderung eintritt. Es soll diese Voraussetzung Folgendes ausdrücken: Es seien $\mu_1\ \mu_2 \cdots \mu_n$ resp. $\mu_1 + \nu_1$, $\mu_2 + \nu_2 \cdots \mu_n + \nu_n$ diejenigen Massenteile von $\mathfrak{R}$ bezw. R, welche in irgend welchen n von einander verschiedenen Raumteilen (deren Grenzen jedoch aneinanderstoßen dürfen) enthalten sind. Wir behalten uns vor, $|\nu_1| + |\nu_2| + \cdots + |\nu_n|$ einen Kleinheitsgrad vorzuschreiben, den wir durch $\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mu\ \mathfrak{M}\ \tau$ nach unserem Gutdünken definieren. Mit anderen Worten: wir behalten uns vor, unsere Voraussetzungen durch die Ungleichung $|\nu_1| + |\nu_2| + \cdots + |\nu_n| < F(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mu, \mathfrak{M}, \tau)$ zu ergänzen, wobei F eine stets positive, im übrigen nach unserem Gutdünken gewählte Funktion der Argumente $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, $\mathfrak{M}$, τ ist, und die Ungleichung unabhängig von Art und Anzahl der Raumteile bestehen soll. Der neue innere Rand soll bezüglich eines Polarkoordinatensystems, dessen Pol im Mittelpunkt von $\mathfrak{R}$ liegt, dargestellt sein durch $r = \mathfrak{r}_1 + U(\varphi)$. Hierbei ist $U(\varphi)$ eine stetige, mit stetigen Differentialquotienten bis zur dritten Ordnung einschl. versehene Funktion von φ. Diese Funktion ist periodisch mit der Periode 2π und $|U|$, $|U'|$, $|U''|$, $|U'''|$ kann ein beliebiger von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, τ, $\mathfrak{M}$ abhängiger Kleinheits-

1) Die Bedeutung dieser Annahme (sowie der analogen) ergibt sich aus Nr. 3.

grad zugewiesen werden. Jedenfalls gilt $|U| < \mathfrak{r}_1$. Der neue äußere Rand werde dargestellt durch $r = \mathfrak{r}_2 + V(\varphi)$. Hierbei ist $V(\varphi)$ eine stetige Funktion von φ. Dieselbe ist periodisch mit der Periode 2π und $|V|$ darf ein beliebiger von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, τ, $\mathfrak{M}$ abhängiger Kleinheitsgrad vorgeschrieben werden.

Schließlich bemerken wir, daß in dieser Abhandlung nur Bewegungen betrachtet werden, bei welchen Saturnmittelpunkt und Satellitenmittelpunkt auf der Ringebene verbleiben, während letztere ihre Richtung im „festen“ Raum nicht ändert.

3. Wir führen vier positive Funktionen q, p, P, Q von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ ein, die der Bedingung

$$\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 - 1 + \tau < q < p < P < Q$$

genügen, sonst aber willkürlich gewählt sind; ferner sei Φ eine beliebige positive Funktion von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ, μ. Sind dann die im Vorhergehenden genannten Kleinheitsgrade der Wahl von q, p, P, Q, Φ entsprechend angenommen, so gilt folgender Satz:

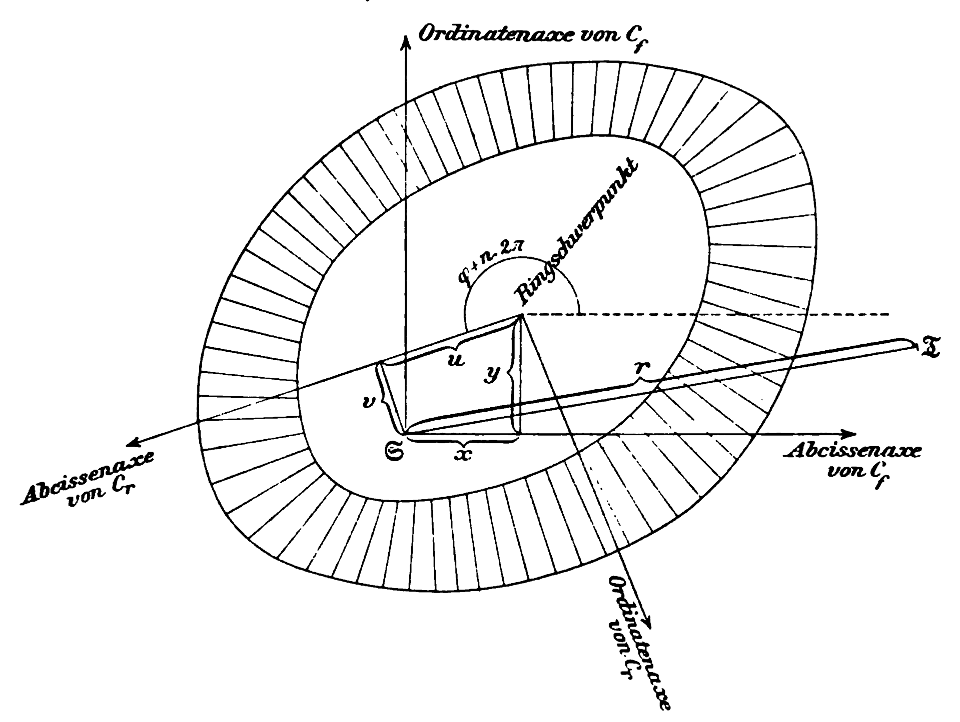
Die Anfangspositionen und Anfangsgeschwindigkeiten von Saturn und Trabant seien so gewählt, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Einwirkung des Trabanten auf den Saturn der Trabant um den Saturn eine Ellipse beschreiben würde, deren große Halbachse a und lineare Exzentrizität e den Bedingungen $a + e \lesseqgtr P \quad a - e \gtreqless p$ *genügen. Der Ring umschließe zu Anfang die Saturnkugel ohne Berührung (dann liegt der Trabant außerhalb des Ringes ohne Berührung) und die Drehungsgeschwindigkeit des Ringes um den Schwerpunkt sei dem absoluten Betrage nach* $\lesseqgtr \Phi$. *Bei diesen Anfangsbedingungen kann die Bewegung der drei Körper nur durch einen Zusammenstoß zwischen Saturn und Ring ein Ende finden, nicht aber durch einen Zusammenstoß von Ring und Trabant. Für die gesammte Dauer der Bewegung ist die Entfernung der Mittelpunkte von Saturn und Trabant zwischen den Grenzen q und Q eingeschlossen. Man kann jedoch die im Vorhergehenden noch unbestimmt gelassene Anfangsgeschwindigkeit des Ringschwerpunkts stets so wählen, daß es zu einem Zusammenstoß überhaupt nicht kommt, daß die Bewegung somit ohne Ende fortbesteht.*

Um die Übersicht über die folgenden Untersuchungen zu erleichtern, bemerke ich zunächst, daß dieselben sämtlich den Zweck verfolgen, das eben mitgeteilte Theorem zu beweisen. Den wesentlichsten Teil des Folgenden bilden die Abschnitte V und VII, welche „Stabilitätsbetrachtungen“ und „Beweis des angekündigten Theorems“ überschrieben sind. Die übrigen Abschnitte, unter denen der sechste hervorzuheben ist, enthalten vorbereitende Betrachtungen.

I. Die Bewegungsgleichungen.

4. Falls man nur die Bewegung des Ringes und der *Mittelpunkte* von Saturn und Trabant betrachtet, können Saturn und Trabant durch materielle Punkte $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ ersetzt werden, deren Massen denen der genannten Körper gleich sind. Man kann dann auch Lagen von $\mathfrak{S}$ zulassen, deren Abstand vom Ringe kleiner ist als der Saturnradius, und Lagen von $\mathfrak{T}$, deren Abstand vom Ringe kleiner ist als der Radius des Trabanten.

Auf der Ringebene nehmen wir zwei rechtwinklige Koordinatensysteme an. Das eine C_f hat seinen Anfangspunkt in $\mathfrak{S}$ und seine



Achsen sind „festen Richtungen im Raum“ parallel. Das andere C_r hat seinen Ursprung im Ringschwerpunkt und besitzt mit dem Ring fest verbundene Achsen. In beiden Fällen wollen wir die Achsen durch die Bezeichnung Abszissenachse resp. Ordinatenachse von einander scheiden und annehmen, daß dieselben gleichgeordnet sind. Wenn im folgenden Koordinaten genannt werden, steht die Abszisse an erster Stelle. Wir bezeichnen mit x, y und ξ, η die Koordinaten des Ringschwerpunkts und des Punktes $\mathfrak{T}$ bezüglich C_f. φ bezeichnet die Amplitude der Abszissenachse von C_r bezüglich C_f. Diese Amplitude

wird im folgenden so gewählt, daß sie sich im Verlauf der Bewegung mit der Zeit stetig ändert. u, v und σ, τ seien die Koordinaten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bezüglich C_r.[1])

Es bestehen die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} u = -\cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y & \sigma = -\cos\varphi\,(x-\xi) - \sin\varphi\cdot(y-\eta) \\ v = \sin\varphi\cdot x - \cos\varphi\cdot y & \tau = \sin\varphi\,(x-\xi) - \cos\varphi\cdot(y-\eta). \end{cases}$$

Die Einheiten für Länge, Masse, Zeit sollen so wie in der Einleitung gewählt werden. Die dort gebrauchten Bezeichnungen wollen wir überhaupt beibehalten.

$\Pi\,(u, v)$ und $\Omega\,(\sigma, \tau)$ bezeichnen das Potential von $\mathfrak{S}$ und Ring bezw. von $\mathfrak{T}$ und Ring. Π kann als Funktion von x, y, φ, Ω als Funktion von x, y, ξ, η, φ aufgefaßt werden. Man hat

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial\Pi}{\partial x} = -\cos\varphi\frac{\partial\Pi}{\partial u} + \sin\varphi\frac{\partial\Pi}{\partial v} & \frac{\partial\Omega}{\partial x} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} = -\cos\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} + \sin\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\Pi}{\partial y} = -\sin\varphi\frac{\partial\Pi}{\partial u} - \cos\varphi\frac{\partial\Pi}{\partial v} & \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} = -\sin\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma} - \cos\varphi\frac{\partial\Omega}{\partial\tau} \\ \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Pi}{\partial u}\cdot v - \frac{\partial\Pi}{\partial v}\cdot u & \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi} = \frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}\cdot\tau - \frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\cdot\sigma \end{cases}$$

Die Anwendung der in den Elementen der Mechanik gelehrten Regeln gibt die Gleichungen

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \frac{\partial\Pi}{\partial x} - (1+\mu)\frac{\xi}{r^3} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \frac{\partial\Pi}{\partial y} - (1+\mu)\frac{\eta}{r^3} \\ \frac{d^2x}{dt^2} = \left(1+\frac{1}{M}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial x} + \frac{1}{M}\frac{\partial\Omega}{\partial x} - \mu\frac{\xi}{r^3} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \left(1+\frac{1}{M}\right)\frac{\partial\Pi}{\partial y} + \frac{1}{M}\frac{\partial\Omega}{\partial y} - \mu\frac{\eta}{r^3} \\ T\cdot\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial\Pi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet r den Abstand von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, T das Trägheitsmoment des Ringes in bezug auf eine durch den Ringschwerpunkt gehende zur Ringebene senkrechte Gerade.

Wir schreiben zwei Integrale des Systems (3) an, welche dem Integral der lebendigen Kraft und dem Flächenintegral entsprechen. Es sind:

---

1) Die Figur soll an die eingeführten Bezeichnungen erinnern.

$$\frac{M}{2(1+\mu+M)}(x'^2+y'^2)+\frac{\mu}{2(1+\mu+M)}(\xi'^2+\eta'^2)+\frac{T}{2}\varphi'^2+$$

$$(4)\qquad +\frac{\mu M}{2(1+\mu+M)}[(\xi'-x')^2+(\eta'-y')^2]-\frac{\mu}{r}-\Pi-\Omega=k$$

$$T\varphi'+\frac{M}{1+\mu+M}(xy'-x'y)+\frac{\mu}{1+\mu+M}(\xi\eta'-\xi'\eta)+$$

$$(5)\qquad \frac{M\mu}{1+\mu+M}[(\xi-x)(\eta'-y')-(\eta-y)(\xi'-x')]=f$$

wobei k und f Konstanten sind.

II. Der Ring $\mathfrak{R}$.

5. Wir nehmen ein mit $\mathfrak{R}$ fest verbundenes rechtwinkliges Koordinatensystem an, dessen Achsen durch die Benennungen erste, zweite, dritte Achse von einander unterschieden werden. Der Koordinatenanfangspunkt fällt mit dem Ringmittelpunkt zusammen und die erste und zweite Achse liegen auf der Ringebene.

Es bezeichne nun p die Entfernung eines innerhalb des Ringes auf der Ringebene gelegenen Punktes vom Ringmittelpunkt. Wir bilden[1])

$$(6)\qquad V=\int\frac{dm}{\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2+\gamma^2}}\qquad W=\int\frac{dm}{\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2}}.$$

Hierbei bedeuten $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ dm$ die Koordinaten eines Punktes von $\mathfrak{R}$ und ein Massenelement dieses Ringes. Die Integration erstreckt sich auf $\mathfrak{R}$. V ist hiernach das Potential von $\mathfrak{R}$ in einem Punkte der Ringebene, während W in einfacher Weise als Potential einer auf der Ringebene ausgebreiteten Masse aufgefaßt werden kann. Wir haben

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial p^2}=\int dm\left[-\frac{1}{(\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2+\gamma^2})^3}+3\frac{(\alpha-p)^2}{(\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2+\gamma^2})^5}\right]$$

$$(8)\quad W=\int\frac{dm}{\varrho}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\int\frac{dm}{\varrho^3}\cdot p^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\int\frac{dm}{\varrho^5}p^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\int\frac{dm}{\varrho^7}\cdot p^6+\cdots$$

In der Reihe 8[2]) dient ϱ vorübergehend zur Bezeichnung der Entfernung eines Punktes des Ringes $\mathfrak{R}$ von der Achse und die Integrationen erstrecken sich wieder auf $\mathfrak{R}$.

Ist der Abstand des betrachteten Punktes der Ringebene vom Ringmittelpunkt $=\mathfrak{r}_1-1$, so ergeben sich mit Rücksicht auf die in der

---

1) Die Quadratwurzeln sind in meiner Arbeit stets nicht negativ zu nehmen.

2) Dieselbe findet sich im Wesentlichen bei Laplace, Mechanik des Himmels, 6 Kap. Buch III.

Einleitung eingeführten Bezeichnungen und Voraussetzungen folgende Beziehungen

$$\left|\frac{\partial(V-W)}{\partial p}\right| = \left|\int \frac{dm\,(\alpha-p)}{(\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2})^3}\left[\left(\frac{\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2}}{\sqrt{(\alpha-p)^2+\beta^2+\gamma^2}}\right)^3-1\right]\right| \lesseqgtr$$

$$\lesseqgtr \int dm\left(1-\cos^3\frac{\omega}{2}\right) = \mathfrak{M}\left(1-\cos^3\frac{\omega}{2}\right) \lesseqgtr$$

$$\lesseqgtr \frac{\mathfrak{M}}{(\mathfrak{r}_1-1)\,\mathfrak{r}_2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{r}_1-1}{\mathfrak{r}_2}\right)^{2n};$$

$$\frac{\partial W}{\partial p} \gtreqless \frac{2\mathfrak{M}}{\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1-1)}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{r}_1-1}{\mathfrak{r}_2}\right)^{2n};$$

$$(9)\quad \frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial(V-W)}{\partial p}+\frac{\partial W}{\partial p} \gtreqless \frac{\mathfrak{M}}{(\mathfrak{r}_1-1)\,\mathfrak{r}_2}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{r}_1-1}{\mathfrak{r}_2}\right)^{2n}.$$

III. Der Ring R.

6. Um spätere Unterbrechungen zu vermeiden, wollen wir zunächst einen einfachen Satz beweisen.

Zu jeder Zahl $K > 0$ gibt es eine solche Zahl $k > 0$, daß Folgendes gilt: Genügen die für alle Werte von φ definierten eindeutigen stetigen Funktionen $\psi(\varphi)$, $\varepsilon(\varphi)$, $\eta(\varphi)$ den Bedingungen

$$(10)\qquad \varepsilon + \cos\varphi = \cos\psi \qquad\qquad \eta + \sin\varphi = \sin\psi,$$

besitzen ferner die als periodisch mit der Periode 2π vorausgesetzten ε, η stetige Ableitungen nach φ bis zur Ordnung n einschl. (wobei n eine der Zahlen 1, 2, 3 bedeutet) und sind die Absolutwerte von ε, η und die der genannten Ableitungen kleiner als k, so ist φ eine für alle ψ definierte eindeutige stetige Funktion von ψ. Diese Funktion wächst um 2π, sobald ψ um 2π wächst und besitzt stetige Ableitungen bis zur Ordnung n einschl. Die Absolutwerte der Ableitungen von $\varphi - \psi$ nach ψ bis zur Ordnung n einschl. sind kleiner als K.

Zum Beweise bemerken wir, daß, wenn für einen speziellen φ-Wert $\sin\psi \neq 0$ ist, für diesen φ-Wert $\frac{d\psi}{d\varphi}$ existiert und der Bedingung $\frac{d\varepsilon}{d\varphi} - \sin\varphi = -\sin\psi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi}$ genügt. Ist aber für den speziellen φ-Wert $\cos\psi \neq 0$, so existiert $\frac{d\psi}{d\varphi}$[1] und es gilt $\frac{d\eta}{d\varphi} + \cos\varphi = \cos\psi\cdot\frac{d\psi}{d\varphi}$. Es existiert daher in jedem Falle $\frac{d\psi}{d\varphi}$ und es gelten daher auch stets die

1) Wir bezeichnen in dieser Abhandlung nur *endliche* Ableitungen als existierend.

beiden letzten Gleichungen. Indem man dieselben mit $-\sin\psi$ bezw. $\cos\psi$ multipliziert und addiert, ergibt sich:

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = -(\eta + \sin\varphi)\left(\frac{d\varepsilon}{d\varphi} - \sin\varphi\right) + (\varepsilon + \cos\varphi)\left(\frac{d\eta}{d\varphi} + \cos\varphi\right) = 1 - \omega.$$

$$\omega = \eta\frac{d\varepsilon}{d\varphi} - \eta\sin\varphi + \sin\varphi\frac{d\varepsilon}{d\varphi} - \varepsilon\frac{d\eta}{d\varphi} - \varepsilon\cos\varphi - \cos\varphi\frac{d\eta}{d\varphi}.$$

Durch geeignete Wahl von k kann man offenbar $|\omega|$ so klein machen, daß etwa $\frac{3}{2} > \frac{d\psi}{d\varphi} > \frac{1}{2}$ gilt. Hieraus folgt dann, daß φ eine für alle ψ definierte eindeutige stetige Funktion ist mit dem stetigen Differentialquotienten

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = \frac{1}{1-\omega}.$$

Es ist auch klar, daß durch geeignete Wahl von k erreicht werden kann, daß

$$\left|\frac{d(\varphi - \psi)}{d\psi}\right| < K.$$

Wächst φ um 2π, so wächst ψ um ein positives Vielfaches von 2π, wie man mit Hilfe der Gleichungen (10) leicht erkennt. Dividiert man den Zuwachs von ψ, also $\nu \cdot 2\pi$ (wobei ν eine positive ganze Zahl ist), durch den Zuwachs von φ, also 2π, so ergibt die Ungleichung $\frac{3}{2} > \frac{d\psi}{d\varphi} > \frac{1}{2}$ die Beziehung $\frac{3}{2} > \nu > \frac{1}{2}$, d. h. $\nu = 1$. Wächst also φ um 2π, so wächst auch ψ um 2π. Hieraus folgt sofort, daß, wenn ψ um 2π wächst, auch φ um 2π wächst.

Damit ist der Satz für den Fall $n = 1$ bewiesen. Die Ergänzungen für $n = 2$ oder $n = 3$ ergeben sich von selbst.

7. Wir ziehen auf der Ringebene um den Mittelpunkt von $\mathfrak{R}$ einen Kreis mit dem Radius $2\mathfrak{r}_2$ und haben nach der Einleitung das Recht anzunehmen, daß der äußere Rand von R innerhalb dieses Kreises liegt. Durch den genannten Kreis legen wir eine zur Ringebene senkrechte Zylinderfläche und ziehen endlich zwei zur Ringebene parallele Ebenen, welche $\mathfrak{R}$ und R einschließen. Den so begrenzten Raumteil zerlegen wir in Teile und bezeichnen die innerhalb dieser Teile gelegenen Massen von $\mathfrak{R}$ und R mit $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n$ bezw. $(\mu_1 + \nu_1)$, $(\mu_2 + \nu_2) \ldots (\mu_n + \nu_n)$. Gemäß der Einleitung haben wir das Recht

$$|\nu_1| + |\nu_2| + \cdots + |\nu_n| < p$$

vorauszusetzen, wobei p eine positive Zahl ist, die wir mit Hilfe von $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mu, \mathfrak{M}, \tau$ beliebig definieren dürfen. Diese Zahl p möge kleiner als $\mathfrak{M}$ gewählt werden.

Nachdem wir wie im vorigen Abschnitt ein mit $\mathfrak{R}$ verbundenes rechtwinkliges Koordinatensystem eingeführt haben, wählen wir in jedem Teile des Zylinders einen Punkt und bezeichnen die der ersten und zweiten Achse entsprechenden Koordinaten dieser Punkte mit $(a_1\, b_1)$, $(a_2\, b_2) \ldots (a_n\, b_n)$. Es möge nun eine derartige Reihe von Teilungen des Zylinders ins Auge gefaßt werden, daß die Dimensionen der Teile beliebig klein werden. Wir haben dann, wenn α, β, 0 die Koordinaten des Schwerpunkts von R sind:

$$\mathfrak{Lim}\,\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}(\mu_\varrho+\nu_\varrho)\,a_\varrho}{M}=\mathfrak{Lim}\,\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\nu_\varrho\cdot a_\varrho}{M}=\alpha,$$

$$\mathfrak{Lim}\,\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}(\mu_\varrho+\nu_\varrho)\,b_\varrho}{M}=\mathfrak{Lim}\,\frac{\sum\limits_{\varrho=1}^{n}\nu_\varrho\cdot b_\varrho}{M}=\beta.$$

Da

$$M \gtreqless \mathfrak{M}-(|\nu_1|+|\nu_2|+\ldots+|\nu_n|)>\mathfrak{M}-p$$

gilt, so haben wir

$$|\alpha|,\ |\beta| \lesseqgtr \frac{2\,\mathfrak{r}_2\cdot p}{\mathfrak{M}-p}.$$

Diese Ungleichung lehrt mit Rücksicht auf die bei der Wahl von p herrschende Willkür, *daß man das Recht hat, dem Abstand des Schwerpunktes des Ringes R vom Mittelpunkt des Ringes $\mathfrak{R}$ einen beliebigen von $\mathfrak{r}_1\ \mathfrak{r}_2\ \mu\ \mathfrak{M}\ \tau$ abhängigen Kleinheitsgrad zuzuschreiben.*

8. Wir führen wieder wie im vorigen Abschnitt ein mit $\mathfrak{R}$ fest verbundenes rechtwinkliges Koordinatensystem ein, außerdem aber noch ein zweites mit denselben Achsenrichtungen, dessen Anfangspunkt im Schwerpunkt von R liegt. Die auf der Ringebene gelegenen Achsen (nur diese kommen in dieser Nummer in Betracht) wollen wir bei beiden Systemen durch die Benennungen Abszissen- und Ordinatenachse unterscheiden und die beiden durch diese Achsen gebildeten Systeme mit I und II bezeichnen. Die auf I bezüglichen Koordinaten des Schwerpunkts von R, den wir innerhalb des inneren Randes von R gelegen voraussetzen dürfen, seien α, β. Von den Koordinatenanfangspunkten von I und II ziehen wir Vektoren nach einem und demselben Punkte des inneren Randes von R. φ_0 sei ein Amplitudenwert des ersten Vektors bezüglich I, ψ_0 habe eine analoge Bedeutung für den anderen Vektor und das System II. Wir bewegen nun den Endpunkt der Vektoren auf dem inneren Rand von R in einer und darauf in der entgegengesetzten Richtung, indem wir die Amplituden (es seien dies φ und ψ) sich stetig von den Anfangswerten φ_0 und ψ_0 aus ändern lassen. Hier-

durch wird eine Zuordnung der ψ-Werte zu den φ-Werten[1]) eingeführt, derzufolge ψ für alle φ als eindeutige stetige Funktion von φ erscheint. Es seien nun r und ϱ die Radienvektoren eines Punktes des inneren Randes von R, φ und ψ seien irgend ein Wertepaar der Amplituden, das nach dem Obigen diesem Punkte entspricht. Dann haben wir

$$(10) \qquad r\cos\varphi = \alpha + \varrho\cos\psi \qquad\qquad r\sin\varphi = \beta + \varrho\sin\psi$$

$$(11) \qquad \varrho = \sqrt{r^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2r(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)}.$$

Man darf annehmen

$$(12) \qquad \varrho = \mathfrak{r}_1 + \chi(\varphi),$$

wobei χ eine für alle φ definierte eindeutige stetige und mit der Periode 2π periodische Funktion ist; dieselbe besitzt stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschl. und $|\chi(\varphi)|$, $|\chi'(\varphi)|$, $|\chi''(\varphi)|$, $|\chi'''(\varphi)|$ kann ein beliebiger, mittels $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{M}$, μ, τ definierter Kleinheitsgrad erteilt werden. Die Gleichungen (10) ergeben

$$\cos\psi = \cos\varphi + A \qquad\qquad \sin\psi = \sin\varphi + B$$

$$A = \left(\frac{r}{\varrho} - 1\right)\cos\varphi - \frac{\alpha}{\varrho} \qquad B = \left(\frac{r}{\varrho} - 1\right)\sin\varphi - \frac{\beta}{\varrho}.$$

Bezüglich A, B gelten dieselben Aussagen wie diejenigen, welche wir eben hinsichtlich $\chi(\varphi)$ gemacht haben. Die Anwendung des in der Nr. 6 angeführten Satzes zeigt somit die Zulässigkeit der Annahme, daß φ für alle ψ eine eindeutige stetige Funktion von ψ ist und stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschl. besitzt. Dabei können wir den Absolutwerten der Ableitungen von $\varphi - \psi$ nach ψ bis zur dritten Ordnung einschl. einen beliebig durch $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, τ, $\mathfrak{M}$ definierten Kleinheitsgrad zuweisen. Wächst ψ um 2π, so wächst auch φ um 2π. Die Gleichung (12) lehrt dann, daß man hat

$$(13) \qquad \varrho = \mathfrak{r}_1 + F(\psi),$$

wobei $F(\psi)$ eine für alle ψ definierte eindeutige stetige Funktion bedeutet, die periodisch mit der Periode 2π ist und stetige Ableitungen bis zur dritten Ordnung einschl. besitzt. $|F(\psi)|$, $|F'(\psi)|$, $|F''(\psi)|$, $|F'''(\psi)$, kann ein beliebig durch $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, τ, $\mathfrak{M}$ definierter Kleinheitsgrad zugewiesen werden.

9. In einem Punkte des inneren Randes ziehen wir die Normale in der Richtung nach innen und tragen auf ihr die Länge 1 ab. Dann

1) Aus der Einleitung folgt, daß φ bei einer der oben erwähnten Bewegungen entweder stets wächst oder stets abnimmt.



erhalten wir einen Punkt mit den auf II (vgl. die vorige Nummer) bezogenen Koordinaten

$$\varrho \cos\psi - \frac{\varrho\cos\psi + \frac{d\varrho}{d\psi}\sin\psi}{\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2}} \qquad \varrho\sin\psi + \frac{-\varrho\sin\psi + \frac{d\varrho}{d\psi}\cos\psi}{\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2}}.$$

Jedem Punkte des inneren Randes von R entspricht demgemäß ein Punkt auf der Ringebene, und wir können annehmen, daß diese letzteren Punkte niemals mit O, d. h. dem Schwerpunkt von R zusammenfallen. Den Inbegriff dieser Punkte wollen wir mit dem Namen „$\varDelta$-Kurve" belegen. Es ist nun offenbar möglich, eine für alle Werte der Variabeln ψ definierte stetige Funktion $\Omega(\psi)$ zu finden, welche folgende Eigenschaft besitzt: Ist Q ein Punkt des inneren Randes, P der entsprechende Punkt auf der Ringebene, ψ ein Amplitudenwert des von O nach Q gezogenen Vektors, so ist $\Omega(\psi)$ ein Amplitudenwert des von O nach P gezogenen Vektors. Bezeichnen wir nun noch die Länge des Vektors OP mit $\varDelta$, so haben wir:

$$\varDelta\cos\Omega(\psi) = \varrho\cos\psi - \frac{\varrho\cos\psi + \frac{d\varrho}{d\psi}\sin\psi}{\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2}}$$

$$\varDelta\sin\Omega(\psi) = \varrho\sin\psi + \frac{-\varrho\sin\psi + \frac{d\varrho}{d\psi}\cos\psi}{\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\psi}\right)^2}}.$$

Indem wir nun das im Anschluß an Gleichung (13) Gesagte berücksichtigen, haben wir

$$\varDelta\cos\Omega(\psi) = (\mathfrak{r}_1 - 1)\cos\psi + \varphi_1$$
$$\varDelta\sin\Omega(\psi) = (\mathfrak{r}_1 - 1)\sin\psi + \varphi_2,$$

wobei φ_1 und φ_2 für alle ψ definierte stetige und mit der Periode 2π periodische Funktionen sind, die mit stetigen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung versehen sind. Den Absolutwerten dieser Funktionen und ihrer eben genannten Ableitungen kann ein beliebig mittels $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, $\mathfrak{M}$, τ definierter Kleinheitsgrad zugewiesen werden. Aus den letzten Gleichungen folgt $\varDelta = \mathfrak{r}_1 - 1 + \varphi_3$, wobei bezüglich φ_3 dieselben Aussagen gelten wie von φ_1 und φ_2. Endlich folgt, wenn wir $\omega = \Omega(\psi)$ schreiben,

$$\cos\omega = \cos\psi + \varphi_4 \qquad \sin\omega = \sin\psi + \varphi_5,$$

wobei bezüglich φ_4, φ_5 dieselben Aussagen gelten wie bezüglich φ_1, φ_2, φ_3.

Nunmehr findet der in Nr. 6 dargestellte Satz Anwendung. Es ist demgemäß — immer unter der Voraussetzung, daß die Kleinheitsgrade geeignet gewählt sind — ψ eine für alle ω definierte mit ω gleichzeitig wachsende stetige Funktion von ω. Sobald ω um 2π wächst, wächst auch ψ um 2π und besitzt stetige Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschl. Den Absolutwerten der Ableitungen von $\psi - \omega$ nach ω bis zur zweiten Ordnung einschl. kann ein beliebiger mittels $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mu, \tau, \mathfrak{M}$ definierter Kleinheitsgrad zugewiesen werden. Hieraus und aus der vorher abgeleiteten Gleichung $\varDelta = \mathfrak{r}_1 - 1 + \varphi_3$ erhalten wir nunmehr leicht das folgende Resultat: Bezeichnet ω irgend eine Amplitude des von O nach einem Punkte der $\varDelta$-Kurve gezogenen Vektors, $\varDelta$ die Länge dieses Vektors, so ist

$$\varDelta = \mathfrak{r}_1 - 1 + f(\omega) \tag{14}$$

Hierbei bedeutet $f(\omega)$ eine für alle Werte von ω definierte mit der Periode 2π periodische stetige Funktion. Dieselbe besitzt stetige Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung und $|f(\omega)|$, $|f'(\omega)|$, $|f''(\omega)|$ kann ein beliebiger mittels $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mu, \tau, \mathfrak{M}$ definierter Kleinheitsgrad zugewiesen werden.

Alle Punkte der $\varDelta$-Kurve haben vom inneren Rand von R den Abstand 1. In der Tat; zunächst sieht man sofort, daß jeder Punkt[1]), der etwa vom inneren Rande von R den Abstand 1 hat, auf der $\varDelta$-Kurve liegt. Ferner ist sofort klar, daß der Abstand jedes Punktes der $\varDelta$-Kurve vom genannten inneren Rande $\gtreqless 1$ ist. Wäre nun für einen Punkt P der $\varDelta$-Kurve der Abstand < 1, so verbinde man P mit O durch eine Gerade. Da der Abstand des Punktes O vom Rande > 1 angenommen werden darf, so liegt, wie leicht zu sehen, auf OP zwischen O und P mindestens ein Punkt, für den der Abstand $= 1$ ist. Dieser Punkt müßte also der $\varDelta$-Kurve angehören, was nicht der Fall ist. Somit ist die versuchsweise gemachte Annahme zurückzuweisen; die $\varDelta$-Kurve gibt also die Gesamtheit der Punkte, welche den Abstand 1 vom Rande haben. Der Abstand ist eine stetige Funktion der Koordinaten des Punktes. Es folgt somit aus dem Umstande, daß innerhalb der $\varDelta$-Kurve Punkte existieren, deren Abstand > 1 ist, aber keine Punkte, deren Abstand $= 1$ ist, daß für alle Punkte innerhalb der $\varDelta$-Kurve der Abstand > 1 ist. Ähnlich schließt man, daß für alle Punkte außerhalb der $\varDelta$-Kurve der Abstand < 1 ist.

Wir führen nun ein Polarkoordinatensystem ein, dessen Pol in O liegt, während die Achse mit der positiven Abszissenachse zusammenfällt.

1) Wir sprechen nur von Punkten innerhalb des inneren Randes von R. Wir dürfen annehmen, daß die $\varDelta$-Kurve nur solche Punkte enthält.

Der positive Drehungssinn sei für das Polarsystem und rechtwinklige System derselbe. Nach dem Vorhergehenden können wir dann sagen: *Der Abstand eines Punktes vom inneren Rand von R ist größer, gleich oder kleiner als 1, je nachdem $r - \mathfrak{r}_1 + 1 - f(\varphi)$ kleiner, gleich oder größer als Null ist. Hierbei sind r, φ Polarkoordinaten des Punktes.* Wie bereits früher erwähnt, sprechen wir hierbei nur von Punkten innerhalb des inneren Randes von R.

Die in den beiden letzten Nummern entwickelten Resultate gelten, falls die nach der Einleitung verfügbaren Kleinheitsgrade geeignet gewählt sind. Diese Wahl wird beeinflußt durch die Kleinheitsgrade, welche wir für $|F(\psi)|$, $|F'(\psi)|$, $|F''(\psi)|$, $|F'''(\psi)|$ und $|f(\omega)|$, $|f'(\omega)|$, $|f''(\omega)|$ (vgl. (13) und (14)) wünschen; als ohne Einfluß auf die genannte Wahl können wir dagegen die Achsenrichtungen der gewählten Koordinatensysteme ansehen.

10. $\mathfrak{S}$ möge auf der $\varDelta$-Kurve liegen. Wir bezeichnen vorübergehend seine Entfernungen vom R-Schwerpunkt und vom $\mathfrak{R}$-Mittelpunkt mit ϱ und r, ferner die Entfernung der letzteren Punkte voneinander mit σ. Die Kraft, welche $\mathfrak{R}$ auf $\mathfrak{S}$ ausübt[1]), liefert in der Richtung vom R-Schwerpunkt zum Punkt $\mathfrak{S}$ die Komponente

$$V'(r)\left[1 + \frac{(r-\varrho)^2 - \sigma^2}{2r\varrho}\right] = V'(r)[1 + \varepsilon_1],$$

wobei $|\varepsilon_1|$ ein beliebiger von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{M}$, μ, τ abhängiger Kleinheitsgrad zugewiesen werden darf.[2]) Ferner dürfen wir schreiben:

$$V'(r) = V'(\mathfrak{r}_1 - 1) + [r - (\mathfrak{r}_1 - 1)]\, V''\big(\mathfrak{r}_1 - 1 + \vartheta[r - (\mathfrak{r}_1 - 1)]\big),$$
$$0 < \vartheta < 1.$$

Indem wir Gleichung (7) der Nr. 5 berücksichtigen, sehen wir, daß $V'(r) = V'(\mathfrak{r}_1 - 1) + \varepsilon_2$, wobei von ε_2 dasselbe wie von ε_1 gilt. Es folgt hieraus weiter, daß die oben erwähnte Kraftkomponente gleich $V'(\mathfrak{r}_1 - 1) + \varepsilon_3$ ist, wobei bezüglich ε_3 dieselben Aussagen gelten wie von ε_1 und ε_2.

Vergleichen wir nun die genannte Kraftkomponente mit der in dieselbe Richtung fallenden Komponente der Kraft, welche R auf $\mathfrak{S}$ ausübt, so sehen wir sofort, daß diese beiden Komponenten sich um eine Größe unterscheiden, deren Absolutwert man einen beliebigen von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{M}$, μ, τ abhängigen Kleinheitsgrad zuweisen darf. Bezeichnen wir daher das Potential von R mit Π, so gilt für einen Punkt der $\varDelta$-Kurve

1) Wir können annehmen, daß die ganze $\varDelta$-Kurve innerhalb des inneren Randes von $\mathfrak{R}$ liegt und den Mittelpunkt von $\mathfrak{R}$ umschließt.

2) Bezüglich der Bedeutung von V vgl. Nr. 5.

$\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} = V'(\mathfrak{r}_1 - 1) + \varepsilon$. Hierbei bezeichnet $\frac{\partial \Pi}{\partial \varrho}$ die in der Richtung vom R-Schwerpunkt zum Punkte der Δ-Kurve gebildete Ableitung von Π und $|\varepsilon|$ kann ein mittels $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{M}, \mu, \tau$ beliebig definierter Kleinheitsgrad zugewiesen werden. Berücksichtigt man noch Gl. (9) in Nr. 5, so ist klar, daß man das Recht hat zu setzen

$$(15) \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial \varrho} > \frac{\mathfrak{M}}{2\,\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - 1)} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\right)^2 \left(\frac{\mathfrak{r}_1 - 1}{\mathfrak{r}_2}\right)^{2n}.$$

IV. Hilfssätze.

11. Wir führen drei stets positive Funktionen $f_1(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \tau)$, $f_2(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \tau)$, $f_3(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \tau)$ ein. Diese Funktionen gelten von nun an als fest gewählt, wobei wir uns aber der bei ihrer Wahl zugelassenen Willkür erinnern wollen. Die Voraussetzungen gestatten folgende Annahme: *Liegt $\mathfrak{S}$ innerhalb der Δ-Kurve oder auf derselben, so ist seine Entfernung vom R-Schwerpunkt* $< \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3$. *Gilt dabei außerdem*[1] $r \gtreqless \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 - 1 + \tau + f_1$, *so ist die Entfernung des dann außerhalb des Ringes R liegenden materiellen Punktes $\mathfrak{T}$ vom Ring R größer als τ.* Unter diesen Umständen haben wir ferner

$$(16) \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2} < \frac{M \cdot \mu}{\tau^2}, \quad \sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2} \overline{\overline{<}} M.$$

Die Gleichungen (3) aus Nr. 4 geben daher, wenn α, β irgend welche der Bedingung $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ genügende Zahlen sind

$$(17) \qquad \left|\alpha \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right| < M + 1 + \frac{\mu}{\tau^2} + \frac{\mu}{(\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 - 1 + \tau + f_1)^2}.$$

Wir haben das Recht, $\mathfrak{M}$, $|\mathfrak{M} - M|$ und μ einen Kleinheitsgrad zuzuweisen, der beliebig von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ abhängt. Somit ist es gestattet anzunehmen

$$(18) \qquad \left|\alpha \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right| < 1 + f_2(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \tau).$$

Für die rechtsstehende Summe wollen wir die Abkürzung K einführen. Der Hilfssatz, welcher in dieser Nummer abgeleitet wird, ist folgender:

Es liege eine sich auf das Zeitintervall $t_0 \overline{\overline{<}} t \overline{\overline{<}} t_0 + \mathfrak{t}$ erstreckende Bewegung des Ringes R und der materiellen Punkte $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ vor, bei welcher $\mathfrak{S}$ innerhalb der Δ-Kurve oder auf derselben liegt und stets

---

1) Wir kehren wieder zu der durch die Figur veranschaulichten Bezeichnungsweise zurück.

$r \gtreqless \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 - 1 + \tau + f_1$ gilt. Ferner sei $(x_0')^2 + (y_0')^2 \gtreqless 4K(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3) = g^2$, wobei x_0' und y_0' die Werte von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ für $t = t_0$ bedeuten. Dann gilt

$$(19) \qquad \mathfrak{t} < 4\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}, \qquad \mathfrak{t} < 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}.$$

Zum Beweise wählen wir

$$\alpha = \frac{x_0'}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}, \qquad \beta = \frac{y_0'}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}$$

und bezeichnen mit x_0, y_0 die Werte von x, y für $t = t_0$. Es gilt, wie die Taylorsche Formel lehrt,

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) \gtreqless \sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}\,(t - t_0) - \frac{K}{2}(t - t_0)^2.$$

Da ferner

$$2[\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3] > \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \gtreqless \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0),$$

so haben wir

$$2[\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3] > \sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}\,(t - t_0) - \frac{K}{2}(t - t_0)^2$$

und hieraus, wenn wir vorübergehend $\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2} = h$, $t - t_0 = w$ setzen

$$\frac{K}{2}\left[w^2 - 2\frac{h}{K}w + \frac{g^2}{K^2}\right] > 0, \qquad \left(w - \frac{h}{K}\right)^2 > \frac{h^2 - g^2}{K^2}.$$

Da $h^2 - g^2$ nach der Voraussetzung $\gtreqless 0$ ist, so kann niemals $w = \frac{h}{K}$ werden, es ist somit stets

$$\frac{h}{K} - w > \sqrt{\frac{h^2 - g^2}{K^2}}, \qquad w < \frac{h - \sqrt{h^2 - g^2}}{K} \lesseqgtr \frac{g^2}{hK}.$$

Bildet man die letzte Ungleichung für $t = t_0 + \mathfrak{t}$ und ersetzt g^2 und h durch ihre Werte, so erhält man

$$\mathfrak{t} < \frac{4(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)}{\sqrt{(x_0')^2 + (y_0')^2}}.$$

Aus der letzten Ungleichung folgt, da $(x_0)^2 + (y_0')^2 \gtreqless g^2$,

$$\mathfrak{t} < 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}.$$

Somit sind die Ungleichungen (19) bewiesen.

12. Um die Betrachtungen der folgenden Nummer nicht zu unterbrechen, begründe ich zunächst folgenden einfachen (vielleicht sogar bekannten) Satz: *Für alle t des Intervalls $t_0 \lesseqgtr t < t_0 + k$, $k > 0$ seien n Funktionen $y_1 y_2 \ldots y_n$ definiert, die mit endlichen Differentialquotienten*

erster Ordnung versehen sind und für $t = t_0$ *verschwinden. Es gelte für das genannte Intervall*

$$(20)\qquad \left|\frac{dy_i}{dt}\right| \leqq \alpha + \beta \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu|, \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei α *und* β *positive Konstanten sind. Dann haben wir für alle* t *des Intervalls*

$$(21)\qquad \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} \leqq \frac{\alpha}{\sqrt{n} \cdot \beta}(e^{\beta n k} - 1).$$

Um diesen Satz zu beweisen, wählen wir einen t-Wert des Intervalls, es sei dies t_1. Ist für $t = t_1$ $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$, so ist die Behauptung richtig. Es genügt also, den Fall $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} > 0$ zu betrachten, wobei dann $t_1 > t_0$ ist. Es muß offenbar einen t-Wert t_2 geben, der der Bedingung $t_0 \leqq t_2 < t_1$ genügt und für den $y_1 = y_2 = \cdots = y_n = 0$ ist, während für $t_2 < t < t_1$ $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2} > 0$ gilt. Der Kürze wegen sei $s = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}$ gesetzt. Wir haben für $t_2 < t < t_1$

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{y_1 \frac{dy_1}{dt} + y_2 \frac{dy_2}{dt} + \cdots + y_n \frac{dy_n}{dt}}{s}\right| \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu| \cdot \left(\alpha + \beta \sum_{\mu=1}^{n} |y_\mu|\right)}{s}$$

$$\leqq \sqrt{n} \cdot \alpha + \beta n s.$$

Somit haben wir

$$e^{-\beta n t}\left(\frac{ds}{dt} - \beta n s - \sqrt{n} \cdot \alpha\right) \leqq 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(s e^{-\beta n t} + \frac{\alpha}{\beta \sqrt{n}} e^{-\beta n t}\right) \leqq 0.$$

Der in der letzten Ungleichung vorkommende Klammerausdruck ist daher für $t = t_1$ gleich oder kleiner als der Wert desselben Ausdrucks für $t = t_2$. Berücksichtigt man noch, daß für $t = t_2$ $s = 0$ gilt, und bezeichnet man mit s_1 den Wert von s für $t = t_1$, so erhält man

$$s_1 \leqq \frac{\alpha}{\beta \sqrt{n}}(e^{\beta n (t_1 - t_2)} - 1)$$

und folglich

$$s_1 \leqq \frac{\alpha}{\sqrt{n} \cdot \beta}(e^{n \beta k} - 1), \quad \text{w. z. b. w.}$$

13. Wir führen vier weitere positive Funktionen von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ ein. Im folgenden werden diese willkürlich gewählten Funktionen, welche

wir mit f_4, f_5, f_6, f_7 bezeichnen, als gegeben angenommen. Der Kürze wegen setzen wir

$$\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 - 1 + \tau + f_1 = \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{r} + f_4 = q, \quad q + f_5 = p,$$
$$p + f_6 = P, \quad P + f_7 = Q,$$

so daß also $\mathfrak{r} < q < p < P < Q$ gilt.

Wir wollen nun annehmen, zu Anfang einer Bewegung, etwa für $t = t_1$, liege $\mathfrak{S}$ innerhalb der $\varDelta$-Kurve und es sei $(x_1')^2 + (y_1')^2 \geqq g^2$, wobei g^2 dieselbe Bedeutung hat wie in Nr. 11 und x_1', y_1' die Werte von $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ für $t = t_1$ sind. Im übrigen seien die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ derartige, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Wirkung von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{S}$ der materielle Punkt $\mathfrak{T}$ eine Ellipse um $\mathfrak{S}$ beschreiben würde, deren große Halbachse a und lineare Exzentrizität e den Bedingungen $a + e \leqq P$, $a - e \geqq p$ genügen. Aus diesen Anfangsbedingungen folgt, daß zu Anfang der Bewegung $r \geqq p$, $r \leqq P$ und somit $r > q$, $r < Q$ gilt. Aus dem Satze in Nr. 11 schließen wir, *daß im Verlaufe der Bewegung ein bestimmter Moment $t = t_2$ eintreten muß, in dem zum ersten Male mindestens eine der Bedingungen: „$\mathfrak{S}$ liegt innerhalb der $\varDelta$-Kurve und $r > q$" verletzt wird. Für $t = t_2$ liegt $\mathfrak{S}$ innerhalb oder auf der $\varDelta$-Kurve und es gilt $r \geqq q$. Ferner haben wir $t_2 - t_1 < 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_2 - 1 + f_2}{K}}$.*

Wir behalten nun die Anfangslagen und die Anfangsgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ bei, lassen aber den Ring fort und vernachlässigen die Wirkung von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{S}$. Bezeichnen wir dann mit Ξ, H die Koordinaten von $\mathfrak{T}$ in bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Anfangspunkt in $\mathfrak{S}$ liegt und dessen Achsen denjenigen des Systems C_f (siehe Nr. 4) gleichgerichtet sind, so gilt

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\Xi}{dt^2} = -\dfrac{\Xi}{(\sqrt{\Xi^2 + H^2})^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2 H}{dt^2} = -\dfrac{H}{(\sqrt{\Xi^2 + H^2})^3}. \end{cases}$$

Für die wirklich eintretende Bewegung haben wir aber nach den Gleichungen (3) aus Nr. 4

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\Pi}{\partial x} - (1+\mu)\dfrac{\xi}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})^3}, \\[2ex] \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{\partial\Omega}{\partial\eta} + \dfrac{\partial\Pi}{\partial y} - (1+\mu)\dfrac{\eta}{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})^3}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen sind für ein Zeitintervall anwendbar, welches das durch $t_1 \leqq t \leqq t_2$ definierte Intervall nach beiden Seiten hin übertrifft.

Da für das Intervall $t_1 \overline{\gtrless} t \overline{\gtrless} t_2$, welches wir vorübergehend mit I bezeichnen wollen, die Ungleichungen (16) aus Nr. 11 zutreffen, so ist klar, daß für das Intervall I

$$\varphi = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \frac{\partial \Pi}{\partial x} - \mu\frac{\xi}{r^3}, \quad \psi = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} - \mu\frac{\eta}{r^3}$$

Funktionen von t sind, deren Absolutwerten ein beliebiger von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ abhängiger Kleinheitsgrad zugewiesen werden darf.

Aus (22) und (23) erhalten wir nun

$$(24) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2(\xi - \Xi)}{dt^2} = \varphi - \left[\dfrac{\xi}{(\sqrt{\xi^2+\eta^2})^3} - \dfrac{\Xi}{(\sqrt{\Xi^2+H^2})^3}\right], \\ \dfrac{d^2(\eta - H)}{dt^2} = \psi - \left[\dfrac{\eta}{(\sqrt{\xi^2+\eta^2})^3} - \dfrac{H}{(\sqrt{\Xi^2+H^2})^3}\right]. \end{cases}$$

Wir setzen wie bisher $\sqrt{\xi^2+\eta^2} = r$ und außerdem vorübergehend $\xi - \Xi = m$, $\eta - H = n$, $\sqrt{\Xi^2 + H^2} = \varrho$. Es besteht offenbar die Ungleichung $|\varrho - r| \overline{\gtrless} \sqrt{m^2+n^2} \overline{\gtrless} |m| + |n|$. Nun folgt für das Intervall I

$$\left|\frac{\xi}{r^3} - \frac{\Xi}{\varrho^3}\right| = \left|\xi\left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{\varrho^3}\right) + \frac{\xi - \Xi}{\varrho^3}\right|$$

$$= \left|\xi\frac{(\varrho - r)(\varrho^2 + r^2 + \varrho r)}{r^3\varrho^3} + \frac{m}{\varrho^3}\right| \overline{\gtrless} (|m| + |n|)\left(\frac{1}{q^2p} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{qp^2}\right) + \frac{|m|}{p^3}$$

$$\left|\frac{\eta}{r^3} - \frac{H}{\varrho^3}\right| \overline{\gtrless} (|m| + |n|)\left(\frac{1}{q^2p} + \frac{1}{p^3} + \frac{1}{qp^2}\right) + \frac{|n|}{p^3}.$$

Wir setzen $\frac{dm}{dt} = m'$, $\frac{dn}{dt} = n'$. Es ist nach dem Vorhergehenden klar, daß man eine positive Funktion $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ derart angeben kann, daß für das Intervall I die Ungleichungen

$$\left|\frac{dm'}{dt}\right| \overline{\gtrless} |\varphi| + \mathfrak{B}(|m| + |n|), \quad \left|\frac{dm}{dt}\right| \overline{\gtrless} \mathfrak{B}|m'|,$$

$$\left|\frac{dn'}{dt}\right| \overline{\gtrless} |\psi| + \mathfrak{B}(|m| + |n|), \quad \left|\frac{dn}{dt}\right| \overline{\gtrless} \mathfrak{B}|n'|$$

gelten. Es würde z. B. genügen, $\mathfrak{B} = 1 + \frac{1}{q^2p} + \frac{2}{p^3} + \frac{1}{qp^2}$ anzunehmen. Da wir das Recht haben, $|\varphi|$, $|\psi| < f(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \tau)$ vorauszusetzen, wobei die positive Funktion f beliebig gewählt werden darf, so folgt aus dem Satze der vorigen Nummer, daß wir $|m|$, $|n|$, $|m'|$, $|n'|$ für das Intervall I einen beliebigen von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ abhängigen Kleinheitsgrad zuschreiben dürfen. Hieraus folgt weiter die Berechtigung für die Annahme, daß im Intervall I stets $r > q$, $r < Q$ gilt. Da dann für $t = t_2$ die Bedingung $r > q$ *nicht* verletzt wird, so darf für $t = t_2$ $\mathfrak{S}$ nicht innerhalb der Δ-Kurve liegen; es liegt daher dieser materielle Punkt für $t = t_2$ *auf* der Δ-Kurve. Unter der Voraussetzung, daß die zu

unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade geeignet gewählt sind, können wir daher folgenden Satz aussprechen: *Es liege zu Anfang einer Bewegung* $\mathfrak{S}$ *innerhalb der* $\varDelta$*-Kurve und es sei im Anfang* $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \gtreqless g^2$. *Im übrigen seien die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{T}$ *derartige, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Wirkung von* $\mathfrak{T}$ *auf* $\mathfrak{S}$ *der materielle Punkt* $\mathfrak{T}$ *eine Ellipse um* $\mathfrak{S}$ *beschreiben würde, deren große Halbachse* a *und lineare Exzentrizität* e *den Bedingungen* $a + e \lesseqgtr P$, $a - e \gtreqless p$ *genügen. Dann tritt nach Verlauf eines bestimmten positiven Zeitintervalls, welches* $< 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}$ *ist, ein Moment ein, in welchem* $\mathfrak{S}$ *auf der* $\varDelta$*-Kurve liegt. Vor diesem Moment liegt* $\mathfrak{S}$ *innerhalb der* $\varDelta$*-Kurve und die Entfernung von* $\mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{T}$, *d. h.* r, *ist* $> q$ *und* $< Q$. *Die Ungleichungen* $r > q$, $r < Q$ *sind auch im genannten Moment erfüllt.*

V. Stabilitätsbetrachtungen.

14. Wir führen zunächst noch eine positive Funktion $\Phi(\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \tau, \mu)$ ein, welche im folgenden als gegeben betrachtet wird.

Es möge nun eine Bewegung von $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ und R vorliegen, die sich auf das Intervall $t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_0 + \mathfrak{t}$ erstreckt, wobei $\mathfrak{t}$ eine positive Zahl ist. Bei dieser Bewegung liege $\mathfrak{S}$ stets innerhalb oder auf der $\varDelta$-Kurve, auch gelte immer $r \gtreqless \mathfrak{r}$. Die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ für $t = t_0$ seien wieder so gewählt, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Wirkung von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{S}$ der materielle Punkt $\mathfrak{T}$ eine Ellipse um $\mathfrak{S}$ beschreiben würde, deren große Halbachse a und lineare Exzentrizität e den Bedingungen $a + e \lesseqgtr P$, $a - e \gtreqless p$ genügen. (Im folgenden wollen wir diese letztere Voraussetzung bezüglich der Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ durch das Zeichen $[\beta]$ charakterisieren). Außerdem nehmen wir an, daß $(x_0')^2 + (y_0')^2 \lesseqgtr g^2$ und $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|_0 \lesseqgtr \Phi$ gelte. Der Index 0 weist hier, wie überhaupt in dieser Nummer, darauf hin, daß die betreffende Größe für $t = t_0$ zu bilden ist; die Striche oberhalb der Buchstaben deuten Differentialquotienten nach t an. Aus diesen Annahmen folgt

$$|\xi_0 \eta_0' - \xi_0' \eta_0| = \sqrt{\frac{a^2 - e^2}{a}}, \tag{25}$$

$$-\tfrac{1}{2}[(\xi_0')^2 + (\eta_0')^2] + \frac{1}{r_0} = \frac{1}{2a}, \tag{26}$$

$$(\xi_0')^2 + (\eta_0')^2 = -\frac{1}{a} + \frac{2}{r_0} \lesseqgtr -\frac{1}{a} + \frac{2}{a-e} = \frac{1}{a}\,\frac{a+e}{a-e} < \frac{P}{p^2}. \tag{27}$$

Während der ganzen Bewegung gilt offenbar

$$\Pi \gtrless M, \quad \Omega < \frac{M \cdot \mu}{\tau}. \tag{28}$$

Nunmehr erinnern wir an das Integral (4) der Nr. 4 sowie an die in der Einleitung angegebenen Voraussetzungen hinsichtlich der Kleinheitsgrade von μ und M. Es ergibt sich dann mit Rücksicht auf das in dieser Nummer Gesagte die Berechtigung des Ansatzes

$$\frac{2k}{\mu} = -\frac{2}{r_0} + (\xi_0')^2 + (\eta_0')^2 + \eta_1 = -\frac{1}{a} + \eta_1, \tag{29}$$

wobei $|\eta_1|$ jeder von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ abhängige Kleinheitsgrad zugewiesen werden darf. Erinnert man sich an das Integral (5) der Nr. 4, so erkennt man die Berechtigung des Ansatzes

$$\left|\frac{f}{\mu}\right| = |\xi_0\eta_0' - \xi_0'\eta_0| + \eta_2 = \sqrt{\frac{a^2-e^2}{a}} + \eta_2, \tag{30}$$

wobei von η_2 dieselbe Aussage gilt, wie von η_1. Indem wir die Formel

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4| \gtrless \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2}$$

anwenden, uns auf die Kenntnis der bereits erwähnten Integrale (4) und (5) stützen und der Kürze wegen

$$s = 1 + \mu + M, \quad \varrho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sigma = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

schreiben, finden wir, daß während der betrachteten Bewegung folgende Ungleichungen gelten:

$$\begin{aligned}
\mu\left|\sqrt{\frac{a^2-e^2}{a}} + \eta_2\right| &\gtrless T \cdot |\varphi'| + \frac{M\cdot\varrho}{s}\sqrt{x'^2+y'^2} + \frac{\mu}{s}\cdot r\sqrt{\xi'^2+\eta'^2} + \\
&+ \frac{M\mu\sigma}{s}\sqrt{(\xi'-x')^2+(\eta'-y')^2} \gtrless \sqrt{T + \frac{M}{s}\varrho^2 + \frac{\mu}{s}r^2 + \frac{M\mu}{s}\cdot\sigma^2}\;\cdot \\
&\sqrt{T\cdot\varphi'^2 + \frac{M}{s}(x'^2+y'^2) + \frac{\mu}{s}(\xi'^2+\eta'^2) + \frac{M\mu}{s}[(\xi'-x')^2+(\eta'-y')^2]} = \\
&= \sqrt{T + \frac{M}{s}\varrho^2 + \frac{\mu}{s}\cdot r^2 + \frac{M\mu}{s}\cdot\sigma^2}\cdot\sqrt{-\frac{\mu}{a} + \mu\eta_1 + \frac{2\mu}{r} + 2\Pi + 2\Omega} = \\
&= \sqrt{\frac{s\cdot T}{\mu} + \frac{M}{\mu}\cdot\varrho^2 + r^2 + M\sigma^2}\cdot\frac{\mu}{\sqrt{s}}\cdot\sqrt{-\frac{1}{a} + \frac{2}{r} + \eta_3},
\end{aligned}$$

wobei von η_3 dasselbe gilt, wie von η_1 und η_2. Nun haben wir $\varrho < \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3$ (vgl. den Anfang von Nr. 11); ferner $\sigma \leqq r + \varrho < r + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3$. Wir können daher schreiben

$$\frac{s\cdot T}{\mu} + \frac{M\varrho^2}{\mu} + r^2 + M\sigma^2 < r^2 + M(r^2 + 2r(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)) + \eta_4,$$

wobei von η_4 dasselbe gilt, wie von $\eta_1\ \eta_2\ \eta_3$. Somit haben wir

$$\left[\sqrt{\frac{a^2-e^2}{a}}+\eta_2\right]^2 \gtreqless \frac{1}{s}[(1+M)r^2+2M(\mathfrak{r}_1-1+f_3)r+\eta_4]\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{r}+\eta_3\right).$$

Da $r \gtreqless \mathfrak{r}$ und $a \gtreqless p+e \gtreqless p$, so gilt von $\eta_5 = \frac{\eta_4}{s}\left(-\frac{1}{a}+\frac{2}{r}+\eta_3\right)$ dasselbe, wie von η_1, η_2, η_3, η_4. Ferner ist $\frac{a^2-e^2}{a} \leqq P$ und somit

$$\left(\sqrt{\frac{a^2-e^2}{a}}+\eta_2\right)^2 = \frac{a^2-e^2}{a}+\eta_6,$$

wobei von η_6 dasselbe gilt, wie von η_1, η_2, η_3, η_4, η_5.

Auf Grund des Gesagten finden wir nun

$$\left(-\frac{1}{a}+\eta_7\right)r^2+(1+\eta_8)\,2r-\frac{a^2-e^2}{a}+\eta_9 \gtreqless 0,$$

wobei von η_7, η_8, η_9 dasselbe gilt, wie von η_1, $\eta_2 \cdots \eta_6$. Mit Rücksicht auf die für $a+e$ und $a-e$ geltenden Ungleichungen erkennt man schließlich, daß man das Recht hat zu schreiben

$$r^2-2ar+a^2-e^2-2\eta_{10}r+\eta_{11} \gtreqless 0,$$

wobei von η_{10} und η_{11} dasselbe gilt, wie von den η_1, $\eta_2 \cdots \eta_9$. Es ist klar, daß aus dieser Ungleichung folgt

$$D = (a+\eta_{10})^2-(a^2-e^2+\eta_{11}) \gtreqless 0.$$

Somit haben wir

$$(r-[a+\eta_{10}+\sqrt{D}])\,(r-[a+\eta_{10}-\sqrt{D}]) \gtreqless 0.$$

Hieraus folgt

$$a+\eta_{10}-\sqrt{D} \gtreqless r \gtreqless a+\eta_{10}+\sqrt{D}.$$

Man kann offenbar setzen $D = e^2+\eta_{12}$, wobei von η_{12} dasselbe gilt, wie von η_1, $\eta_2 \cdots \eta_{11}$.

Sind A und B zwei Zahlen, die der Bedingung $A > B \gtreqless 0$ genügen, so ist.

$$\sqrt{A}-\sqrt{B} = \frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \gtreqless \frac{\sqrt{A-B}\cdot\sqrt{A}}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} \gtreqless \sqrt{A-B}.$$

Es gilt also stets, wenn α, β nicht negative Zahlen bedeuten,

$$|\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}| \gtreqless \sqrt{|\alpha-\beta|}.$$

Aus dieser Bemerkung folgt

$$|\sqrt{D}-e| = |\sqrt{e^2+\eta_{12}}-\sqrt{e^2}| \gtreqless \sqrt{|\eta_{12}|}.$$

Somit können wir setzen $\sqrt{D} = e + \eta_{13}$, wobei von η_{13} dasselbe gilt, wie von $\eta_1, \eta_2 \cdots \eta_{12}$. Somit haben wir

$$a - e + \varepsilon \gtreqless r \gtreqless a + e + \eta,$$

wobei den $|\varepsilon|$, $|\eta|$ ein beliebiger von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ abhängiger Kleinheitsgrad zugewiesen werden darf. Wie man daher auch eine positive Funktion $F(\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \tau)$ gewählt haben möge, man kann immer die zu unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade so wählen, daß bei der von uns betrachteten Bewegung

$$a - e - F \gtreqless r \gtreqless a + e + F \tag{31}$$

gilt. Man ist im besonderen berechtigt anzunehmen, daß im Verlauf der Bewegung $q < r < Q$ gilt.

Das Integral (4) liefert

$$T \cdot \varphi'^2 \gtreqless 2k + \frac{2\mu}{r} + 2\Pi + 2\Omega$$

$$T \cdot \varphi'^2 < -\frac{\mu}{a} + \mu \cdot \eta_1 + \frac{2\mu}{q} + 2M + \frac{2M\mu}{\tau}.$$

Da $T > M$ angenommen werden darf, so kann man schreiben

$$\varphi'^2 < -\frac{\mu}{M} \cdot \frac{1}{a} + \frac{\mu}{M} \cdot \eta_1 + \frac{\mu}{M} \cdot \frac{2}{q} + 2 + \frac{2\mu}{\tau}$$

$$\varphi'^2 < \frac{\mu}{M}\left[-\frac{1}{a} + \frac{2}{q} + \eta_{14}\right],$$

wobei von η_{14} dasselbe wie von $\eta_1\, \eta_2 \cdots \eta_{13}$ gilt. Da $a + e \gtreqless P$ und folglich $a \gtreqless P$ und man $|\eta_{14}| < \frac{1}{q}$ voraussetzen darf, so kann man schreiben

$$\varphi'^2 < \frac{\mu}{M}\left[-\frac{1}{a} + \frac{3}{q}\right] \gtreqless \frac{\mu}{M}\left[\frac{3}{q} - \frac{1}{P}\right]. \tag{32}$$

15. Zu Anfang einer Bewegung (für $t = t_0$) seien zunächst die Bedingungen $[\beta]$ (vgl. den Anfang der vorigen Nr.) erfüllt, ferner liege in diesem Moment $\mathfrak{S}$ *innerhalb* der Δ-Kurve und $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$ sei $\gtreqless \Phi$. Aus diesen Bedingungen folgt bereits für $t = t_0$ $r > q$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle, jenachdem für $t = t_0$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \geqq g^2$ oder $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 < g^2$ ist. Nach dem am Schluße der Nr. 13 formulierten Satz tritt im *ersten* Fall nach Verlauf eines bestimmten positiven Zeitintervalls, welches $< 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_s}{K}}$ ist, ein Moment ein, in welchem $\mathfrak{S}$ auf der Δ-Kurve liegt. Vor diesem Moment liegt $\mathfrak{S}$ innerhalb der

Δ-Kurve und die Entfernung von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, d. h. r, ist $> q$ und $< Q$. Die Ungleichungen $r > q$, $r < Q$ sind auch im genannten Moment erfüllt. Wir wollen nun eine obere Grenze feststellen für die Änderung, die φ' hierbei erfahren kann. Zu diesem Zwecke ziehen wir die letzte der Gleichungen (3) aus der Nr. 4 heran. Aus derselben folgt

$$T \cdot \left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| \lesseqgtr \left|\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right| + \left|\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\right|.$$

Aus den Gleichungen (2) der Nr. 4 folgt weiter

$$\left|\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi}\right| \lesseqgtr \sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial v}\right)^2} = \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2}$$

$$\left|\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}\right| \lesseqgtr \sqrt{\sigma^2+\tau^2}\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right)^2+\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2}.$$

Nun können wir, wie bereits erwähnt, $T > M$ annehmen und ferner haben wir nach (16) aus Nr. 11

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta}\right)^2} < \frac{M\mu}{\tau^2} \qquad \sqrt{\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \Pi}{\partial y}\right)^2} \lesseqgtr M.$$

Ferner ist nach Nr. 11 $\sqrt{x^2+y^2} < \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3$ und außerdem

$$\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2} \lesseqgtr r + \sqrt{x^2+y^2} < Q + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3.$$

Also gilt für das Zeitintervall vom Anfang der Bewegung bis zum charakterisierten Moment einschließlich

$$\left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| < (\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3) + (Q + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)\frac{\mu}{\tau^2}.$$

Dem zweiten Summanden auf der rechten Seite dieser Ungleichung können wir jeden von $\mathfrak{r}_1\, \mathfrak{r}_2\, \tau$ abhängigen Kleinheitsgrad zuweisen. Wir können somit schreiben

$$\left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| < 2(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3). \tag{32a}$$

Erinnern wir uns, daß das genannte Zeitintervall $< 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}$ war, so sehen wir, daß $\frac{d\varphi}{dt}$ sich in diesem Intervall um weniger als

$$4\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}\cdot(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)$$

vom Anfangswert entfernt. Da für $t = t_0$ $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \lesseqgtr \Phi$ gilt, so haben wir also während des genannten Zeitintervalls

$$\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| < \Phi + 4(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}.$$

Wir dürfen annehmen

$$\frac{M}{\mu}\left[\Phi + 4(\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{K}}\right]^2 < \frac{3}{q} - \frac{1}{P},$$

und dann haben wir für das genannte Intervall

$$(33) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 < \frac{\mu}{M}\left(\frac{3}{q} - \frac{1}{P}\right).$$

Wir gehen nun zur Betrachtung des *zweiten* Falles über, wo für $t = t_0$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 < g^2$ gilt. Wir haben dann zwei Möglichkeiten: entweder die Bewegung setzt sich ohne Ende in der Weise fort, daß $\mathfrak{S}$ stets innerhalb der $\varDelta$-Kurve liegt und immer $r > q$ ist (Fall A), oder es tritt nach Ablauf einer endlichen Zeit zum ersten Mal ein Moment ein, wo mindestens eine der beiden letzten Aussagen nicht zutrifft (Fall B). Nun sind wir aber nach dem eben in Nr. 14 Bewiesenen berechtigt, anzunehmen, daß im letzten Fall für den charakterisierten Moment $r > q$ gilt. Also muß für diesen Moment $\mathfrak{S}$ auf der $\varDelta$-Kurve liegen.

Die vorhergehenden Resultate lehren somit folgendes: Im Falle A gilt immer

$$(34) \qquad q < r < Q \qquad \varphi'^2 < \frac{\mu}{M}\left(\frac{3}{q} - \frac{1}{P}\right).$$

Im Falle B gelten die Beziehungen (34) vom Anfang der Bewegung bis zu dem Moment, wo $\mathfrak{S}$ zum ersten Male auf der $\varDelta$-Kurve liegt, wobei die Grenzen dieses Zeitintervalls eingeschlossen sind. Alle diese Behauptungen haben zur Voraussetzung, daß die zu unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade geeignet gewählt sind. Indem wir das Gesagte zusammenfassen, gelangen wir zu folgendem Satz: *Es seien zu Anfang einer Bewegung (für $t = t_0$) die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ so gewählt, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Wirkung von $\mathfrak{T}$ auf $\mathfrak{S}$ der materielle Punkt $\mathfrak{T}$ eine Ellipse um $\mathfrak{S}$ beschreiben würde, deren große Halbachse a und lineare Exzentrizität e den Bedingungen $a + e \gtreqless P$ $\quad a - e \gtreqless p$ genügen. Für $t = t_0$ möge $\mathfrak{S}$ innerhalb der $\varDelta$-Kurve liegen und es sei für diesen Moment $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right| \gtreqless \Phi$. Dann sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder setzt sich die Bewegung ohne Ende in der Weise fort, daß $\mathfrak{S}$ stets innerhalb der $\varDelta$-Kurve liegt und*

$$(35) \qquad q < r < Q \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 < \frac{\mu}{M}\left(\frac{3}{q} - \frac{1}{P}\right)$$

gilt, oder es tritt nach Verlauf eines endlichen Zeitintervalls für $t = t_0 + \mathfrak{t}$ zum ersten Mal der Fall ein, daß $\mathfrak{S}$ auf der $\varDelta$-Kurve liegt, wobei für

$t_0 \lesseqgtr t \lesseqgtr t_0 + \mathfrak{t}$ *die Beziehungen (35) stets erfüllt sind. Die zweite Möglichkeit tritt immer ein, wenn für* $t = t_0$ $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \gtreqless g^2$ *gilt, und zwar haben wir dann*

$$\mathfrak{t} < 2\sqrt{\frac{\mathfrak{r}_1 - 1 + f_s}{K}}. \tag{36}$$

Als eine unmittelbare Folge dieses Satzes erhalten wir folgendes Theorem:

Die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von Saturn und Trabant seien so gewählt, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Einwirkung des Trabanten auf den Saturn der Trabant um den Saturn eine Ellipse beschreiben würde, deren grosse Halbachse a und lineare Exzentrizität e den Bedingungen $a + e \lesseqgtr P$ $a - e \gtreqless p$ *genügen. Der Ring umschließe zu Anfang die Saturnkugel ohne Berührung (dann liegt der Trabant außerhalb des Ringes ohne Berührung) und die Drehungsgeschwindigkeit des Ringes um den Schwerpunkt sei dem absoluten Betrage nach* $\lesseqgtr \Phi$. *Bei diesen Anfangsbedingungen kann die Bewegung der drei Körper nur durch einen Zusammenstoß zwischen Saturn und Ring ein Ende finden, nicht aber durch einen Zusammenstoß von Ring und Trabant. Für die gesamte Dauer der Bewegung ist die Entfernung zwischen Saturn und Trabant zwischen den Grenzen q und Q eingeschlossen.*

VI. Über den Fall, in welchem $\mathfrak{S}$ auf der Δ-Kurve liegt.

16. Wir führen zwei auf der Ringebene gelegene Polarkoordinatensysteme ein. Der Pol und die Achse des einen möge mit dem Koordinatenanfangspunkt und der positiven Abszissenachse von C_r (vgl. Nr. 4) zusammenfallen. Die positive Drehungsrichtung für dieses Polarkoordinatensystem I sei so gewählt, daß eine in dieser Richtung erfolgende Drehung der positiven Abszissenachse von C_r um 90^0 dieselbe in die Lage der positiven Ordinatenachse bringt. Das zweite Polarkoordinatensystem II liege ebenso bezüglich $C_\mathfrak{r}$. Die in der Nr. 9 gefundenen Resultate berechtigen zu folgender Aussage: Liegt $\mathfrak{S}$ im Pol von I, so ist der Abstand vom inneren Rande von R größer als 1. Schließen wir diese Lage aus, nehmen aber an, daß $\mathfrak{S}$ innerhalb R liegt, so ist der genannte Abstand größer, gleich, oder kleiner als 1 je nachdem

$$\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\psi) \tag{37}$$

kleiner, gleich oder größer als Null ist. Hiebei ist ϱ der Abstand des Punktes $\mathfrak{S}$ vom R-Schwerpunkt, ψ ein Polarwinkel von $\mathfrak{S}$ bezüglich

des Systems I. $\chi(z)$ ist eine für alle Werte von z definierte periodische stetige Funktion mit der Periode 2π. Dieselbe besitzt stetige Differentialquotienten 1. und 2. Ordnung und $|\chi(z)|$, $|\chi'(z)|$, $|\chi''(z)|$ kann ein beliebiger mittels $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, μ, r, $\mathfrak{M}$ definierter Kleinheitsgrad zugewiesen werden. Wir bezeichnen nun, indem wir die letzte Annahme hinsichtlich der Lage von $\mathfrak{S}$ beibehalten, mit ω einen Polarwinkel des R-Schwerpunkts bezüglich des Systems II. Dann ist $\omega + \pi - \psi - \varphi$ ein ganzes Vielfaches von 2π und daher $\chi(\psi) = \chi(\omega + \pi - \varphi)$, wobei φ dieselbe Bedeutung hat, wie in Nr. 4. Wir können daher in dem eben erwähnten (auf den Abstand des Punktes $\mathfrak{S}$ vom inneren R-Rande bezüglichen) Kriterium an Stelle von (37), d. h. $\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\psi)$, auch $\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\omega + \pi - \varphi)$ setzen.

Wir wollen uns nunmehr vorstellen, es sei in einem Moment $t = t_0$ eine Lage von R, $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}$ gegeben, bei welcher $\mathfrak{T}$ außerhalb R liegt, $\mathfrak{S}$ innerhalb R, ohne mit dem R-Schwerpunkt zusammenzufallen. Ein Polarwinkel des R-Schwerpunkts bezüglich II sei ω_0. Im übrigen sei der Bewegungszustand für $t = t_0$ beliebig gegeben. Es gibt dann eine solche positive Zahl p, daß folgende Aussagen gelten: Den für $t = t_0$ gegebenen Bedingungen entspricht eine Bewegung, welche sich im Intervall $t_0 - p \leqq t \leqq t_0 + p$ nach den Gl. (3) der Nr. 4 in der Weise vollzieht, daß stets $\mathfrak{S}$ innerhalb, $\mathfrak{T}$ außerhalb des Ringes liegt und $\mathfrak{S}$ niemals mit dem R-Schwerpunkt zusammenfällt. Man kann dabei den Polarwinkel ω des R-Schwerpunktes bezüglich II so wählen, daß ω im genannten Intervall eine stetige Funktion von t mit stetigen Ableitungen beliebiger Ordnung ist und sich für $t = t_0$ auf ω_0 reduziert. Dabei gilt stets

$$(38)\qquad \varrho^2 \frac{d\omega}{dt} = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}, \qquad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}}{\varrho^2} - \frac{2\frac{d\varrho}{dt}\cdot\frac{d\omega}{dt}}{\varrho}.$$

In diesen Formeln haben x und y dieselbe Bedeutung wie in den Gl. (3) der Nr. 4 und es ist $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Wir beweisen nun folgenden Satz: *In einem Moment* $t = t_0$ *möge* $\mathfrak{S}$ *auf der* Δ*-Kurve liegen und es sei* $r \geqq \mathfrak{r}$. *Ferner sei für* $t = t_0$

$$(39)\qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \leqq \frac{\mu}{M}\left(\frac{3}{q} - \frac{1}{P}\right), \qquad \frac{d}{dt}[\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\omega + \pi - \varphi)] = 0.$$

Dann ist

$$(40)\qquad \frac{d^2}{dt^2}[\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\omega + \pi - \varphi)] > 0.$$

Dieser Satz gilt unter der Annahme, daß die zu unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade geeignet gewählt sind.

Um diesen Satz zu beweisen, bilden wir:

$$(41)\quad \frac{d^2}{dt^2}[\varrho - \mathfrak{r}_1 - \chi(\omega + \pi - \varphi)] = \frac{d^2\varrho}{dt^2} - \chi''(\omega + \pi - \varphi)\left[\frac{d\omega}{dt} - \frac{d\varphi}{dt}\right]^2$$
$$- \chi'(\omega + \pi - \varphi)\left[\frac{d^2\omega}{dt^2} - \frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]$$

$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} = \frac{x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}}{\varrho} + \varrho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

$$x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{M+1}{M}\left(x\frac{\partial\Pi}{\partial x} + y\frac{\partial\Pi}{\partial y}\right) + \frac{1}{M}\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right) - \frac{\mu}{r^3}(x\xi + y\eta).$$

Indem wir die Ungleichung (15) der Nr. 10 berücksichtigen, finden wir für $t = t_0$:

$$(42)\quad x\frac{\partial\Pi}{\partial x} + y\frac{\partial\Pi}{\partial y} = \varrho\left[\frac{u}{\varrho}\frac{\partial\Pi}{\partial u} + \frac{v}{\varrho}\frac{\partial\Pi}{\partial v}\right]$$
$$> \frac{\varrho\cdot\mathfrak{M}}{2\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - 1)}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2n}\right)^2\left(\frac{\mathfrak{r}_1 - 1}{\mathfrak{r}_2}\right)^{2n}$$

Ferner haben wir (man vgl. (16) aus der Nr. 11) für $t = t_0$

$$\left|x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y}\right| < \varrho\frac{M\mu}{\tau^2} \qquad |x\xi + y\eta| \lesseqgtr \varrho\cdot r.$$

Also für $t = t_0$

$$\frac{x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}}{\varrho} > \frac{M+1}{M}\cdot\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - 1)}\cdot\sum - \frac{\mu}{\tau^2} - \frac{\mu}{r^2}$$
$$\frac{d^2\varrho}{dt^2} > \frac{M+1}{M}\cdot\frac{\mathfrak{M}}{2\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - 1)}\cdot\sum - \frac{\mu}{\tau^2} - \frac{\mu}{r^2} + \varrho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2,$$

wobei $\sum$ die in (42) vorkommende Summe bedeutet. Indem wir die zu unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade geeignet wählen, können wir für $t = t_0$ schreiben:

$$(43)\quad \frac{d^2\varrho}{dt^2} > \frac{1}{4\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - 1)}\sum + \varrho\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2.$$

Mit Hilfe der letzten der Gleichungen (3) aus Nr. 4 erhalten wir:

$$T\left|\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right| \lesseqgtr \varrho M + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}\sqrt{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\tau}\right)^2}.$$

Wir können annehmen, daß ein Punkt, dessen Entfernung von dem auf der Δ-Kurve gelegenen $\mathfrak{S}$ gleich oder größer als $\mathfrak{r}$ ist, sich außerhalb des Ringes R befindet und von R einen Abstand besitzt, der größer ist als τ (vgl. den Anfang von Nr. 11). Wenn wir daher um $\mathfrak{S}$ einen Kreis mit dem Radius $\mathfrak{r} - \tau$ ziehen, so muß er den Ring, so-

weit dieser auf der Ringebene liegt, in seinem Innern einschließen. Da für $t = t_0$ $r \geqq \mathfrak{r}$, so ist in diesem Moment die Entfernung des Punktes T vom Ringe $> r - \mathfrak{r} + \tau$ und es gilt

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\right)^2} < \frac{M\mu}{(r - \mathfrak{r} + \tau)^2}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \sigma}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \tau}\right)^2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} < \frac{M\mu}{(r - \mathfrak{r} + \tau)^2} \cdot (\varrho + r) = \frac{M\mu}{\varrho + r} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathfrak{r} - \tau + \varrho}{r + \varrho}\right)^2} \lesseqgtr$$

$$\lesseqgtr \frac{M\mu}{\mathfrak{r} + \varrho} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathfrak{r} - \tau + \varrho}{\mathfrak{r} + \varrho}\right)^2} = \frac{M\mu\,(\mathfrak{r} + \varrho)}{\tau^2} < \frac{M\mu\,(\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3)}{\tau^2}.$$

(Bezüglich f_3 vgl. Nr. 11.) Da $T > M$ ist, so erhalten wir

$$\left|\frac{d^2 \varphi}{dt^2}\right| < \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3 + \mu \left(\frac{\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{\tau^2}\right) \tag{44}$$

$$\left| x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2} \right| \lesseqgtr \left(1 + \frac{1}{M}\right) \left| x\frac{\partial \Pi}{\partial y} - y\frac{\partial \Pi}{\partial x} \right| + \frac{1}{M} \left| x\frac{\partial \Omega}{\partial y} - y\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right| + \frac{\mu}{r^3} |x\eta - y\xi|$$

$$\lesseqgtr (M + 1)\,\varrho + \frac{\varrho\mu}{\tau^2} + \frac{\mu\varrho}{r^2}.$$

Man kann $\varrho > \frac{\mathfrak{r}_1 - 1}{2}$ annehmen und schreiben

$$\frac{|xy'' - yx''|}{\varrho^2} \lesseqgtr \left[M + 1 + \frac{\mu}{\tau^2} + \frac{\mu}{\mathfrak{r}^2}\right] \frac{2}{\mathfrak{r}_1 - 1}.$$

Aus der zweiten der Beziehungen (39) ergibt sich

$$2\,\frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\varrho}\,\frac{d\omega}{dt} = 2\chi'(\omega + \pi - \varphi)\,\frac{\omega' - \varphi'}{\varrho}\,\omega'$$

$$\left| 2\,\frac{\frac{d\varrho}{dt}}{\varrho} \cdot \frac{d\omega}{dt} \right| \lesseqgtr \frac{2\,|\chi'(\omega + \pi - \varphi)|}{\mathfrak{r}_1 - 1} \left(3\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right).$$

Also haben wir

$$\left|\frac{d^2 \omega}{dt^2}\right| \lesseqgtr \frac{2}{\mathfrak{r}_1 - 1}\left(M + 1 + \frac{\mu}{\tau^2} + \frac{\mu}{\mathfrak{r}^2}\right) + \frac{2\,|\chi'(\omega + \pi - \varphi)|}{\mathfrak{r}_1 - 1}\left(3\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right). \tag{45}$$

Aus (41) ergibt sich nun

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\omega + \pi - \varphi)\right) > \frac{1}{4\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1 - 1)} \sum + \varrho \left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$$

$$- 2\,|\chi''(\omega + \pi - \varphi)| \left(\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)$$

$$- |\chi'(\omega + \pi - \varphi)| \left[\frac{2}{\mathfrak{r}_1 - 1}\left(M + 1 + \frac{\mu}{\tau^2} + \frac{\mu}{\mathfrak{r}^2}\right)\right. \tag{46}$$

$$\left. + \frac{2\,|\chi'(\omega + \pi - \varphi)|}{\mathfrak{r}_1 - 1}\left(3\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3 + \mu\,\frac{\mathfrak{r} + \mathfrak{r}_1 - 1 + f_3}{\tau^2}\right].$$

Wir machten bereits die Bemerkung, daß man $\varrho > \frac{\mathfrak{r}_1 - 1}{2}$ annehmen kann. Man kann daher offenbar durch geeignete Wahl der verfügbaren Kleinheitsgrade erreichen, daß die auf der rechten Seite von (46) mit dem Faktor $\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2$ behafteten Glieder eine nicht negative Summe geben. Schließen wir die genannten Glieder, sowie das erste Glied von der rechten Seite der Beziehung (46) aus, so verbleibt daselbst eine Summe, deren Absolutwert ein beliebiger von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, τ, μ, $\mathfrak{M}$ abhängiger Kleinheitsgrad zugewiesen werden kann. Dies ergibt sich mit Berücksichtigung der ersten Beziehung (39) sofort, wenn man sich daran erinnert, wie die Kleinheitsgrade nach der Voraussetzung bestimmt werden dürfen. Man darf daher offenbar schreiben

$$(47) \qquad \frac{d^2}{dt^2}\left(\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi\,(\omega + \pi - \varphi)\right) > \frac{1}{5\mathfrak{r}_2\,(\mathfrak{r}_1 - 1)} \sum{}' > 0,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Sind die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllt, so hat demnach $\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi\,(\omega + \pi - \varphi)$ für $t = t_0$ ein Minimum. Für t-Werte, die von $t = t_0$ verschieden sind, diesem Wert aber genügend nahe liegen, haben wir also $\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi > 0$ unabhängig davon, ob diese t-Werte größer oder kleiner als t_0 sind. Für diese t-Werte liegt daher $\mathfrak{S}$ außerhalb der Δ-Kurve. Auf Grund des eben bewiesenen Satzes kommen wir zu folgendem Ergebnis:

In einem Moment $t = t_0$ möge $\mathfrak{S}$ auf der Δ-Kurve liegen und es sei $r \gtrless \mathfrak{r}$. Ferner sei für $t = t_0$:

$$(48) \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \leqq \frac{\mu}{M}\left(\frac{3}{q} - \frac{1}{p}\right).$$

Wir können dann t_0 zwischen zwei solche t-Werte $t_1 < t_0$ und $t_2 > t_0$ einschließen, daß die Bewegung im Intervall $t_1 \leqq t \leqq t_2$ nach den Gleichungen (3) *der Nr.* 4 *geschieht und einer der folgenden drei Fälle eintritt.*

1. *$\mathfrak{S}$ liegt für $t_1 \leqq t < t_0$ innerhalb, für $t_0 < t \leqq t_2$ außerhalb der Δ-Kurve.*

2. *$\mathfrak{S}$ liegt für $t_1 \leqq t < t_0$ außerhalb, für $t_0 < t \leqq t_2$ innerhalb der Δ-Kurve.*

3. *$\mathfrak{S}$ liegt für $t_1 \leqq t < t_0$ und $t_0 < t \leqq t_2$ außerhalb der Δ-Kurve*

Haben wir nämlich für $t = t_0$

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi\,(\omega + \pi - \varphi)\right] \neq 0,$$

so tritt offenbar einer der beiden ersten Fälle ein. Ist aber

$$\frac{d}{dt}\left[\varrho - \mathfrak{r}_1 + 1 - \chi(\omega + \pi - \varphi)\right] = 0,$$

so gelangen wir zu den Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes. Es tritt dann also der Fall 3 ein.

VII. Beweis des angekündigten Theorems.

17. In dieser Nummer wird ein Hilfssatz abgeleitet, der in der folgenden Nummer zur Anwendung gelangt. Wir setzen dabei $\mathfrak{r}_1 - 1 + f_3 = \mathfrak{L}$ (vgl. den Anfang von Nr. 11), $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ und behalten die bisher gebrauchte Bezeichnung $K = 1 + f_2$ bei. Sind die zu unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade geeignet gewählt, so gilt folgender Satz:

Im Moment $t = t_0$ seien die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ der Bedingung $[\beta]$ (vgl. den Anfang von Nr. 14) gemäß gewählt. Der Ring R liege für $t = t_0$ so, daß $\mathfrak{S}$ sich innerhalb der $\varDelta$-Kurve befindet. Außerdem nehmen wir an, daß

$$\gamma = \sqrt{u_0'^2 + v_0'^2} \geqq \frac{3}{2}\,\Phi \cdot \mathfrak{L} + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2}{4} + 4\mathfrak{L}\right)\mathfrak{L}^2 + 4K\mathfrak{L}}$$

und $|\varphi_0'| \leqq \Phi$ gelte. Der Index 0 deutet hierbei, wie im Folgenden, auf $t = t_0$ hin, u und v haben dieselbe Bedeutung, wie in Nr. 4. Nach Verlauf eines gewissen Zeitintervalls tritt dann (etwa für $t = t_0 + \mathfrak{t}$ $\mathfrak{t} > 0$) ein Moment ein, für den $\mathfrak{S}$ zum ersten Mal auf der $\varDelta$-Kurve liegt, während für $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \mathfrak{t}$ stets $q < r < Q$ gilt. Für $t = t_0 + \mathfrak{t}$ ist

$$u_0'(u - u_0) + v_0'(v - v_0) > 0.$$

Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, daß aus den Gleichungen (1) der Nr. 4 folgt

$$\text{(49)} \qquad \begin{cases} u' = -\cos\varphi\, x' - \sin\varphi\, y' + v\varphi' \\ v' = \sin\varphi\, x' - \cos\varphi\, y' - u\varphi'. \end{cases}$$

Also haben wir

$$x_0'^2 + y_0'^2 = [u_0' - v_0\varphi_0']^2 + [v_0' + u_0\varphi_0']^2 = \gamma^2 + \varphi_0'^2\varrho_0^2 + 2\varphi_0'(u_0v_0' - v_0u_0')$$

$$\text{(50)} \qquad \geqq \gamma^2 + \varphi_0'^2\varrho_0^2 - 2|\varphi_0'|\varrho_0\gamma = (\gamma - |\varphi_0'|\cdot\varrho_0)^2$$

Da $\varrho_0 < \mathfrak{L}$ (vgl. den Anfang der Nr. 11), so ist

$$\text{(51)} \qquad \gamma - |\varphi_0'|\varrho_0 \geqq \gamma - \Phi\cdot\mathfrak{L} > \tfrac{1}{2}\Phi\mathfrak{L} + \sqrt{4K\mathfrak{L}} > \sqrt{4K\mathfrak{L}}.$$

Also nach (50):

$$x_0'^2 + y_0'^2 > 4K\mathfrak{L}. \tag{52}$$

Aus dem ersten der beiden am Schluß von Nr. 15 formulierten Sätze folgt (da $g^2 = 4K\mathfrak{L}$) unmittelbar, daß nach Ablauf eines Zeitintervalls $\mathfrak{t}$ der Punkt $\mathfrak{S}$ zum ersten Mal auf der Δ-Kurve liegt, während für $t_0 < t < t_0 + \mathfrak{t}$ stets $q < r < Q$ gilt. Aus dem in der Nr. 11 bewiesenen Satz folgt dann

$$\mathfrak{t} < 4 \frac{\mathfrak{L}}{\sqrt{x_0'^2 + y_0'^2}} \tag{53}$$

(vgl. Gleichung (19). Man beachte dabei, daß $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_1 - 1 + \tau + f_1 = \mathfrak{r} < q$ gilt (vgl. den Anfang von Nr. 13).

Wir wählen nun auf der Ringebene ein mit R fest verbundenes, mit C_r gleichgeordnetes, rechtwinkliges Koordinatensystem D_r so aus, daß der Anfangspunkt desselben derjenige Punkt der Ringebene ist, in welchem sich $\mathfrak{S}$ für $t = t_0$ befindet. Die neue Ordinatenachse habe die Richtung des Vektors, der für einen mit R fest verbundenen Beobachter die Richtung der Geschwindigkeit von $\mathfrak{S}$ für $t = t_0$ angibt. Die Größe dieser Geschwindigkeit ist nach dem Vorigen $\gamma > 0$. Ist α eine Amplitude der neuen Abszissenachse bezüglich C_r, so hat man

$$\cos\alpha = \frac{v_0'}{\gamma} \qquad \sin\alpha = -\frac{u_0'}{\gamma}. \tag{54}$$

Bezeichnen wir die Koordinaten von $\mathfrak{S}$ bezüglich D_r mit U, V, so ist

$$\begin{cases} u - u_0 = \cos\alpha\, U - \sin\alpha\, V \\ v - v_0 = \sin\alpha\, U + \cos\alpha\, V. \end{cases} \tag{55}$$

Wir führen noch ein mit C_f fest verbundenes und mit ihm gleichgeordnetes rechtwinkliges Koordinatensystem[1]) D_f ein. Der Anfangspunkt von D_f falle mit dem von C_f zusammen. Eine Amplitude der neuen Abszissenachse bezüglich C_f sei $\varphi_0 + \alpha$. Bezeichnen wir dann die Koordinaten des R-Schwerpunkts bezüglich D_f mit X, Y, so ist

$$\begin{cases} x = \cos(\varphi_0 + \alpha) X - \sin(\varphi_0 + \alpha) Y \\ y = \sin(\varphi_0 + \alpha) X + \cos(\varphi_0 + \alpha) Y. \end{cases} \tag{56}$$

Aus (55) folgt

$$V = -\sin\alpha\,(u - u_0) + \cos\alpha\,(v - v_0) \tag{57}$$

Berücksichtigt man die Gleichungen (1) aus der Nr. 4, so gibt eine leichte Rechnung

$$V = \sin(\varphi - \varphi_0) X - \cos(\varphi - \varphi_0) Y + Y_0, \tag{58}$$

1) Wir könnten auch die Einführung neuer Koordinatensysteme vermeiden in Hinblick auf die bei der Wahl von C_f und C_r vorhandene Willkür.

wobei Y_0 der Wert von Y für $t = t_0$ ist. Wir haben also

$$(59)\quad V = 2\sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) X + \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) Y\right] - [Y - Y_0].$$

Indem wir die Bedingungen beachten, unter denen die Ungleichung (32a) aus der Nr. 15 abgeleitet wurde, erkennen wir, daß dieselbe in unserem Falle für $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \mathfrak{t}$ gilt. Für dieses Intervall haben wir also $|\varphi''| < 2\mathfrak{L}$. Somit ist

$$(60)\qquad |\varphi - \varphi_0| \leqq \Phi(t - t_0) + \mathfrak{L}(t - t_0)^2.$$

Nach (56) und der Ungleichung (18) aus der Nr. 11 können wir annehmen $\left|\frac{d^2 Y}{dt^2}\right| < K$ und haben somit

$$- Y + Y_0 \geqq - Y_0'(t - t_0) - \frac{(t - t_0)^2}{2} K.$$

Die Gleichungen (56) geben

$$Y_0' = -\sin(\varphi_0 + \alpha)\, x_0' + \cos(\varphi_0 + \alpha)\, y_0'.$$

Berücksichtigt man noch (49) und sodann (54), so erhält man

$$Y_0' = \sin\alpha \cdot u_0' - \cos\alpha\, v_0' - (\sin\alpha\, v_0 + \cos\alpha\, u_0)\,\varphi_0'$$
$$\leqq -\gamma + \Phi\varrho_0 < -\gamma + \Phi\mathfrak{L}.$$

Also ist

$$(61)\qquad - Y + Y_0 \geqq (\gamma - \Phi\mathfrak{L})(t - t_0) - \frac{K}{2}(t - t_0)^2.$$

Berücksichtigen wir noch $2\left|\sin\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right)\right| \leqq |\varphi - \varphi_0|$, sowie $\varrho < \mathfrak{L}$, so erhalten wir aus (59), (60) und (61):

$$(62)\qquad V \geqq (t - t_0)\left[\gamma - \Phi\mathfrak{L} - \left(\Phi\mathfrak{L} + (t - t_0)\left(\frac{K}{2} + \mathfrak{L}^2\right)\right)\right].$$

Aus (51) sehen wir, daß die positive Größe $\gamma - |\varphi_0'| \cdot \varrho_0 \geqq \gamma - \Phi\mathfrak{L} > 0$. Nach (50) ist also $x_0'^2 + y_0'^2 \geqq (\gamma - \Phi\mathfrak{L})^2$. Somit haben wir nach (53):

$$(63)\qquad \mathfrak{t} < \frac{4\mathfrak{L}}{\gamma - \Phi\mathfrak{L}}.$$

Da $t - t_0 \leqq \mathfrak{t}$ ist, so erhalten wir

$$(64)\qquad \Phi\mathfrak{L} + (t - t_0)\left(\frac{K}{2} + \mathfrak{L}^2\right) < \Phi\mathfrak{L} + \frac{4\mathfrak{L}}{\gamma - \Phi\mathfrak{L}}\left(\frac{K}{2} + \mathfrak{L}^2\right).$$

Wir setzen

$$(65)\qquad z = \frac{\gamma - \Phi\mathfrak{L}}{\mathfrak{L}} \geqq \frac{1}{2}\Phi + \frac{1}{\mathfrak{L}}\sqrt{\left(\frac{\Phi^2}{4} + 4\mathfrak{L}\right)\mathfrak{L}^2 + 4K\mathfrak{L}} > 0.$$

Dann ist

$$(\gamma - \Phi\mathfrak{L}) - \left(\Phi\mathfrak{L} + (t - t_0)\left(\frac{K}{2} + \mathfrak{L}^2\right)\right) > \mathfrak{L}z - \Phi\mathfrak{L} - \frac{2K + 4\mathfrak{L}^2}{z}$$
$$= \frac{\mathfrak{L}}{z}\left[\left(z - \frac{\Phi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Phi^2}{4} + \frac{2K}{\mathfrak{L}} + 4\mathfrak{L}\right)\right] \gtreqless \frac{\mathfrak{L}}{z} \cdot \frac{2K}{\mathfrak{L}} > 0.$$

Also ist der Koeffizient von $t - t_0$ auf der rechten Seite von (62) größer als Null. *Somit gilt für das ganze Intervall* $t_0 < t \leqq t_0 + \mathfrak{t}$ $V > 0$. Mit Rücksicht auf (54) und (57) erkennen wir die Richtigkeit unseres Satzes. Wir können ihn auch in der Form aussprechen, *daß die Ordinate von* $\mathfrak{S}$ *bezüglich des Systems* D_r *für* $t = t_0 + \mathfrak{t}$ *größer als Null ist.*

18. Zur Zeit $t = t_0$ mögen die Lagen und Geschwindigkeiten von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ den Bedingungen $[\beta]$ genügen. Die Anfangslage des Ringes R werde nur durch die Bedingung beschränkt, daß für $t = t_0$ sich $\mathfrak{S}$ innerhalb der Δ-Kurve befindet. Endlich sei $|\varphi_0'| \leqq \Phi$. Die Gleichungen (49) aus der vorigen Nummer zeigen unmittelbar, daß man dem Ringschwerpunkt eine solche Anfangsgeschwindigkeit erteilen kann, daß u_0', v_0' beliebig gegebene Werte annehmen. Es muß zu diesem Zweck sein

$$(66) \qquad \begin{cases} x_0' = -\cos\varphi_0\,[u_0' - v_0\varphi_0'] + \sin\varphi_0\,[v_0' + u_0\varphi_0'] \\ y_0' = -\sin\varphi_0\,[u_0' - v_0\varphi_0'] - \cos\varphi_0\,[v_0' + u_0\varphi_0']. \end{cases}$$

Wir wollen nun die Gesamtheit der u_0', v_0'-Werte ins Auge fassen, welche der Bedingung

$$(67) \qquad u_0'^2 + v_0'^2 \leqq H^2$$

genügen, wobei

$$(68) \qquad H = \frac{3}{2}\,\Phi\mathfrak{L} + \sqrt{\left(\frac{\Phi^2}{4} + 4\mathfrak{L}\right)\mathfrak{L}^2 + 4\mathfrak{L}K}.$$

K und $\mathfrak{L}$ haben in (68) dieselbe Bedeutung, wie in der vorigen Nummer.

Man kann u_0', v_0' *gemäß der Bedingung* (67) *so wählen, daß bei der entsprechenden Bewegung* $\mathfrak{S}$ *stets innerhalb der* Δ*-Kurve bleibt und* $\mathfrak{T}$ *von* R *stets um mehr als* τ *absteht. Die genannte Bewegung erstreckt sich auf alle* $t \geqq t_0$ *und es gilt dabei stets* $q < r < Q$.

Um diesen Satz zu beweisen, nehmen wir versuchsweise an, er sei nicht richtig. Wie man dann auch u_0', v_0' der Bedingung (67) gemäß wählen möge, stets sind für $t = t_0$ die Bedingungen des ersten der beiden am Schluß von Nr. 15 formulierten Sätze erfüllt. Auf Grund dieses Satzes und unserer versuchsweise gemachten Annahme können wir sagen: Wie man auch u_0', v_0' der Bedingung (67) gemäß wählen möge, stets tritt nach Verlauf eines endlichen Zeitintervalls für $t = t_0 + \mathfrak{t}$

zum ersten Mal der Fall ein, daß $\mathfrak{S}$ auf der Δ-Kurve liegt, wobei für $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \mathfrak{t}$ stets

$$q < r < Q, \qquad \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 < \frac{\mu}{M}\left(\frac{3}{q} - \frac{1}{P}\right)$$

gilt. Natürlich kann $\mathfrak{t}$ von der Wahl der u_0', v_0' abhängen. Jedem einzelnen der Bedingung (67) genügenden Wertsystem u_0', v_0' ordnen wir denjenigen Punkt der Δ-Kurve zu, welcher im eben geschilderten Moment $t = t_0 + \mathfrak{t}$ mit $\mathfrak{S}$ zusammenfällt. Die Koordinaten dieser zugeordneten Punkte bezüglich C_r können nach dem Gesagten als eindeutige Funktionen der u_0', v_0' aus dem Gebiete (67) aufgefaßt werden. Die so definierten Funktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{U}(u_0', v_0')$, $\mathfrak{V}(u_0' v_0')$ und wollen nun ihre *Stetigkeit* nachweisen.

Zu diesem Zweck wählen wir irgend eine Stelle α, β des Gebietes (67) fest aus. Bei der entsprechenden Bewegung (wir bezeichnen sie mit B) tritt nach Verlauf eines endlichen Zeitintervalls, etwa für $t = t_0 + T$ der oben gekennzeichnete Moment ein. Für diesen wird $u = \mathfrak{U}(\alpha, \beta)$, $v = \mathfrak{V}(\alpha, \beta)$ und es sind für ihn die Bedingungen des Satzes am Schluß der Nr. 16 erfüllt, wobei $t_0 + T$ in unserem Fall die Rolle von t_0 im genannten Satz spielt. Wir können nach dem letzteren $t_0 + T$ zwischen zwei solche Werte $t_0 + T_1$ und $t_0 + T_2$ $(0 < T_1 < T < T_2)$ einschließen, daß die Bewegung im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_0 + T_2$ nach den Gleichungen (3) der Nr. 4 geschieht und $\mathfrak{S}$ für $t_0 + T_1 \leqq t < t_0 + T$ innerhalb, für $t_0 + T < t \leqq t_0 + T_2$ außerhalb der Δ-Kurve liegt. Die im angeführten Satz vorkommenden Möglichkeiten 2. und 3. sind nämlich in unserem Fall offenbar ausgeschlossen. Um nun die Stetigkeit der Funktionen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ für die Stelle $u_0' = \alpha$, $v_0' = \beta$ nachzuweisen, wählen wir beliebig eine positive Zahl p. Sodann bestimmen wir τ_1 und τ_2 in der Weise, daß erstens $T_1 < \tau_1 < T \quad T < \tau_2 < T_2$ ist und zweitens bei der Bewegung B im Intervall $t_0 + \tau_1 \leqq t \leqq t_0 + \tau_2$

$$|u - \mathfrak{U}(\alpha, \beta)| < \frac{p}{2}, \qquad |v - \mathfrak{V}(\alpha, \beta)| < \frac{p}{2}$$

gilt. Eine solche Wahl der τ_1, τ_2 ist offenbar möglich. Unterwerfen wir die Stelle u_0', v_0' der Bedingung, dem Gebiete (67) anzugehören und der Stelle α, β genügend nahe zu liegen, so können wir dadurch erreichen, daß die einer solchen Stelle u_0', v_0' entsprechende Bewegung sich im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \tau_2$ nach den Gleichungen (3) der Nr. 4 vollzieht und daß die u, v bei dieser Bewegung sich von den für gleiche Zeiten gebildeten u, v bei der Bewegung B beliebig wenig unterscheiden. Wir bedenken noch, daß bei der Bewegung B der Punkt $\mathfrak{S}$ im Intervall $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \tau_1$ von der Δ-Kurve um mehr

als eine für dieses ganze Intervall angebbare positive Größe absteht. Dann ist nach dem Gesagten die Berechtigung folgender Behauptung klar. Unterwirft man die Stelle u_0', v_0' der Bedingung, dem Gebiete (67) anzugehören und der Stelle α, β genügend nahe zu liegen, so können wir dadurch erreichen:

a) daß die einer solchen Stelle u_0', v_0' entsprechende Bewegung sich im Intervall $t_0 \gtreqless t \gtreqless t_0 + \tau_2$ nach den Gleichungen (3) der Nr. 4 vollzieht,

b) daß bei dieser Bewegung $\mathfrak{S}$ im Intervall $t_0 \gtreqless t \gtreqless t_0 + \tau_1$ innerhalb der Δ-Kurve liegt, für $t = t_0 + \tau_2$ aber außerhalb der Δ-Kurve, sodaß der charakteristische Moment bei einem t-Wert θ eintritt, für welchen $t_0 + \tau_1 < \theta < t_0 + \tau_2$ gilt,

c) daß im Intervall $t_0 \gtreqless t \gtreqless t_0 + \tau_2$ die u, v bei dieser Bewegung sich von den für gleiche Zeiten gebildeten u, v bei der Bewegung B weniger als um $\frac{p}{2}$ unterscheiden.

Hat man die Stelle u_0', v_0' den genannten Bedingungen unterworfen, so folgt aus b) und c):

$$(70)\quad \begin{cases} |\mathfrak{U}(u_0', v_0') - \mathfrak{U}(\alpha, \beta)| \gtreqless |\mathfrak{U}(u_0', v_0') - u_B(\theta)| + |u_B(\theta) - \mathfrak{U}(\alpha, \beta)| \\ \qquad < \frac{p}{2} + \frac{p}{2} \\ |\mathfrak{V}(u_0', v_0') - \mathfrak{V}(\alpha, \beta)| \gtreqless |\mathfrak{V}(u_0' v_0') - v_B(\theta)| + |v_B(\theta) - \mathfrak{V}(\alpha, \beta)| \\ \qquad < \frac{p}{2} + \frac{p}{2}. \end{cases}$$

Hierbei bezeichnen $u_B(t)$, $v_B(t)$ die Funktionen von t, denen u, v bei der Bewegung B gleich sind. Aus (70) folgt, daß

$$|\mathfrak{U}(u_0', v_0') - \mathfrak{U}(\alpha, \beta)| \text{ und } |\mathfrak{V}(u_0', v_0') - \mathfrak{V}(\alpha, \beta)|$$

kleiner als p sind, sobald die Stelle u_0', v_0' der Bedingung unterworfen wird, dem Gebiet (67) anzugehören und der Stelle α, β genügend nahe zu liegen. Damit ist die Stetigkeit der Funktionen $\mathfrak{U}(u_0', v_0')$, $\mathfrak{V}(u_0' v_0')$ bewiesen.

Es möge nun eine Stelle u_0', v_0' des Gebietes (67) gewählt sein, für welche $u_0'^2 + v_0'^2 = H^2$ gilt. Bei der entsprechenden Bewegung sind für $t = t_0$ die Bedingungen des am Anfang der vorigen Nummer angegebenen Satzes erfüllt. Es folgt aus dem letzteren, daß für den charakteristischen Moment bei der genannten Bewegung $u_0'(u - u_0) + v_0'(v - v_0) > 0$ gilt. Die letzte Ungleichung können wir auch schreiben

$$(71)\qquad u_0'[\mathfrak{U}(u_0', v_0') - u_0] + v_0'[\mathfrak{V}(u_0', v_0') - v_0] > 0.$$

Wir können somit sagen: Im Gebiete (67) sind $\mathfrak{U}(u_0' v_0') - u_0$ und $\mathfrak{V}(u_0', v_0') - v_0$ stetige Funktionen der u_0', v_0'; außerdem besteht für die Stellen auf der Grenze des Gebietes (67) die Ungleichung (71). Es ist leicht zu sehen, daß die Funktionen $\mathfrak{U}(u_0', v_0') - u_0$ und $\mathfrak{V}(u_0', v_0') - v_0$ für keine Stelle des Gebietes (67) gleichzeitig verschwinden. Zu diesem Zweck beachte man, daß $\mathfrak{U}(u_0', v_0')$, $\mathfrak{V}(u_0', v_0')$ stets die Koordinaten u, v eines Punktes der Δ-Kurve sind, während u_0, v_0 die u, v-Koordinaten eines *innerhalb* der Δ-Kurve gelegenen Punktes darstellen.

Wir benutzen jetzt folgenden allgemeinen Satz: *Es ist nicht möglich, daß zwei für die x, y des Gebietes $x^2 + y^2 \lesseqgtr p^2$ $(p > 0)$ definierte und daselbst stetige Funktionen $X(x, y)$, $Y(x, y)$ für keine Stelle des genannten Gebietes gleichzeitig verschwinden, während für die der Bedingung $x^2 + y^2 = p^2$ genügenden Stellen $xX + yY > 0$ gilt.* Was den Beweis dieses Satzes anlangt, so würde er bei etwas spezielleren Annahmen hinsichtlich der X, Y aus den Betrachtungen folgen, welche sich an die Kroneckersche Charakteristik anschließen. In der angeführten allgemeinen Form habe ich ihn in meiner Schrift „Über gewisse Differentialgleichungen allgemeinen Charakters ...“ (Dorpat 1900, russisch) bewiesen. Er folgt übrigens unmittelbar (und zwar nicht nur für zwei unabhängige Variable, sondern für eine beliebige Zahl derselben) aus einem allgemeineren Satze, welchen ich anderweitig[1]) veröffentlicht habe. Aus dem angeführten Satz folgt sofort, daß wir auf Grund der versuchsweise gemachten Annahme, unsere Behauptung sei nicht richtig, zu einem unmöglichen Resultat gekommen sind. Der am Anfang dieser Nummer ausgesprochene Satz ist daher erwiesen.

Indem wir den am Schluß der Nr. 15 ausgesprochenen Satz und das eben gefundene Resultat verbinden, erkennen wir die Richtigkeit des folgenden Theorems:

Die Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten von Saturn und Trabant seien so gewählt, daß bei Fortlassung des Ringes und Vernachlässigung der Einwirkung des Trabanten auf den Saturn der Trabant um den Saturn eine Ellipse beschreiben würde, deren große Halbachse a und lineare Exzentrizität e den Bedingungen $a + e \lesseqgtr P$, $a - e \gtreqless p$ genügen. Der Ring umschließe zu Anfang die Saturnkugel ohne Berührung (dann liegt der Trabant außerhalb des Ringes ohne Berührung) und die Drehungsgeschwindigkeit des Ringes um den Schwerpunkt sei dem absoluten Betrage nach $\lesseqgtr \Phi$. Bei diesen Anfangsbedingungen kann die Bewegung der drei Körper nur durch einen Zusammenstoß zwischen Saturn und

1) P. Bohl, Über die Bewegung eines mechanischen Systems in der Nähe einer Gleichgewichtslage. § 4, I, Journal für Mathematik. Bd. 127.

Ring ein Ende finden, nicht aber durch einen Zusammenstoß von Ring und Trabant. Für die gesamte Dauer der Bewegung ist die Entfernung von Saturn und Trabant zwischen den Grenzen q und Q eingeschlossen. Man kann jedoch die im Vorhergehenden noch unbestimmt gelassene Anfangsgeschwindigkeit des Ringschwerpunkts stets so wählen, daß es zu einem Zusammenstoß überhaupt nicht kommt, daß somit die Bewegung ohne Ende fortbesteht.

Vorausgesetzt ist hierbei, daß die zu unserer Verfügung stehenden Kleinheitsgrade geeignet gewählt sind.

Wirbelströme in Stäben von rechteckigem Querschnitt.

Von Dipl.-Ing. P. Debye in Aachen.

§ 1. Problemstellung.

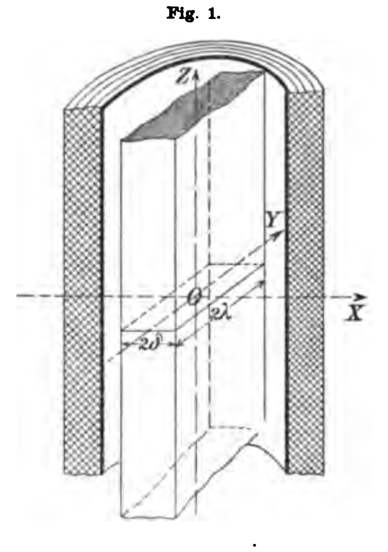
Bekanntlich ist es in der Elektrotechnik üblich, größere Eisenmassen, die von einem zeitlich wechselnden magnetischen Felde durchsetzt werden, zu unterteilen in der Absicht die Wirbelstromverluste zu vermindern. Für die Praxis ist es deshalb von Wichtigkeit die Verluste im voraus berechnen zu können und so zu beurteilen, ob die Unterteilung weit genug getrieben ist. Zum Aufbau des Eisenkörpers verwendet man immer Bleche, also Leiter, deren Querschnitt senkrecht zur Richtung der magnetischen Kraftlinien von einem langgestreckten Rechteck gebildet wird. Nimmt man für die Rechnung die eine Seite dieses Rechtecks geradezu als unendlich lang an, so bietet das Problem der Berechnung der Wirbelstromverluste keine Schwierigkeiten. In dieser Form wurde es gelöst von J. J. Thomson.[1]) Es soll nun im folgenden gezeigt werden, daß auch dann, wenn man jene Abstraktion nicht macht, also den Fall eines Rechtecks betrachtet, dessen Seitenlängen beliebig sind, die strenge Lösung des Problems konstruiert werden kann. Diese setzt uns dann in den Stand den Fehler anzugeben, der bei der gewöhnlichen Rechnungsweise begangen wird.

Wir legen demgemäß der Rechnung den durch Fig. 1 veranschaulichten Fall zugrunde. Im Innern einer von einem Wechselstrom durchflossenen Spule, die in der Richtung ihrer Achse, der Z-Richtung, unendlich lang ist, befindet sich ein sich in der Z-Richtung

1) Electrician 28. 1892, S. 597.

ebenfalls unendlich weit erstreckender Leiter von rechteckigem Querschnitt. Seine Leitfähigkeit[1]) sei σ, seine Permeabilität μ, die Längen der Rechtecksseiten 2δ und 2λ. Im folgenden Paragraphen werden wir zeigen, daß die Berechnung der Verteilung der elektrischen und magnetischen Kraft im Innern des Leiters zusammenfällt mit der Aufgabe: eine Lösung u der Gleichung

Fig. 1.



$$\triangle u + k^2 u = 0$$

zu konstruieren, die auf dem Rande des Rechtecks bestimmte vorgeschriebene Werte annimmt, und werden eine Methode angeben, die es ermöglicht, für beliebig vorgeschriebene Randwerte die Funktion u in Form einer Reihe darzustellen. Viel mühsamer als die Herstellung dieser Lösung ist ihre Verwendung zur Ableitung praktisch brauchbarer Formeln für die wirkliche Berechnung der Wirbelstromwärme.

§ 2. Die Differentialgleichung des Problems.

Nehmen wir die Abhängigkeit von der Zeit als rein harmonisch an, sodaß wir schreiben könnnen $\mathfrak{H}_x = \Xi e^{i\omega t}$, $\mathfrak{E}_x = X e^{i\omega t}$, usw., wobei wir wie üblich erst am Schluß der Rechnung wieder auf die reellen Teile zurückgehen, so führen bekanntlich die allgemeinen Maxwellschen Gleichungen:

$$\frac{\mu}{c}\dot{\mathfrak{H}} = -\operatorname{rot}\mathfrak{E}, \qquad \frac{\varepsilon}{c}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{\sigma}{c}\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H},$$

für jede der Größen Ξ, X, usw. auf eine Gleichung der Form

$$\triangle u + k^2 u = 0,$$

wobei im Innern des Stabes:

$$k^2 = k_i^2 = \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \frac{\mu\sigma\omega i}{c^2}$$

und im freien Äther:

$$k^2 = k_a^2 = \frac{\omega^2}{c^2}.$$

---

1) Wir benutzen durchweg rationelle Heavisidesche Einheiten (vgl. Enc. d. M. W. Art. V 13 von H. A. Lorentz Nr. 7) und geben erst zum Schluß die Umrechnung auf die praktischen Einheiten an.

Nun haben wir es in der gesamten Wechselstromtechnik mit „quasistationären" Vorgängen zu tun, deren Wellenlänge $2\pi c/\omega$ außerordentlich groß ist gegenüber den Abmessungen des in Betracht kommenden Teiles des Feldes, hier insbesondere gegenüber den Seiten des Rechtecks, sodaß wir setzen können:

$$k_i^2 = -\frac{\mu\sigma\omega}{c^2} i, \qquad k_a^2 = 0,$$

was auf die Vernachlässigung der Verschiebungsströme hinauskommt. Bei unserem Wirbelstromproblem, wie es durch Fig. 1 veranschaulicht wird, haben wir speziell:

$$\mathfrak{H}_x = 0, \qquad \mathfrak{H}_y = 0, \qquad \mathfrak{H}_z = Z e^{i\omega t}.$$

Nach dem oben Gesagten genügt jetzt $Z = u$ im Innern des Stabes der Differentialgleichung:

$$(1) \qquad \Delta u + k^2 u = 0, \qquad \left(k^2 = -\frac{\mu\sigma\omega}{c^2} i\right),$$

während im Außenraum gilt:

$$(2) \qquad \Delta u = 0.$$

Gleichung (2) lösen wir für das Gebiet zwischen Spule und Stab durch den speziellen Ansatz:

$$(3) \qquad u = H = \text{const.};$$

gleichzeitig ist dann u im Inneren des Leiters vollkommen bestimmt durch Gleichung (1) und die Bedingung, auf dem ganzen Rande des Rechtecks den konstanten Wert H anzunehmen.

Die mit dem zeitlich veränderlichen, in der Z-Richtung verlaufenden magnetischen Felde notwendig verknüpften elektrischen Kraftkomponenten: $\mathfrak{E}_x = X e^{i\omega t}$ und $\mathfrak{E}_y = Y e^{i\omega t}$, sind, da $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ist, gemäß der Maxwellschen Gleichung:

$$\frac{\varepsilon}{c}\dot{\mathfrak{E}} + \frac{\sigma}{c}\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

(wieder mit Vernachlässigung des Verschiebungsstromes) bestimmt durch

$$(4) \qquad \frac{\sigma}{c} X = \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\sigma}{c} Y = -\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Durch X und Y ist der Verlauf der Wirbelströme gegeben. Übrigens kann man leicht zeigen, daß ihre Kenntnis nicht nötig ist, wenn man nur die Gestalt der Stromkreise im Innern des Stabes bestimmen will. Beachtet man nämlich, daß auf einer Linie $\mathfrak{H}_z = \text{const.}$, die Komponente von rot $\mathfrak{H}$ senkrecht zu dieser Linie und damit nach der vorstehenden

Maxwellschen Gleichung auch die Komponente von $\mathfrak{E}$ senkrecht zu dieser Linie verschwindet, so sieht man, daß Stromlinien und Niveaulinien von $\mathfrak{H}_z$ zusammenfallen.

§ 3. Konstruktion der Funktion u.

Zur Konstruktion der gesuchten Lösung von (1) gibt es zwei verschiedene Wege. Der erste beruht auf dem bekannten Satz, daß man die Auffindung einer Lösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, für die beliebige Randwerte vorgeschrieben sind, zurückführen kann auf die Bestimmung einer Greenschen Funktion G, d. h. einer Lösung der Gleichung:

$$\Delta G + k^2 G = 0,$$

welche auf dem Rande des betrachteten Gebietes verschwindet und im ganzen Inneren stetig und endlich ist mit Ausnahme eines beliebig gewählten Punktes, wo sie logarithmisch unendlich wird. Durch diese Funktion G ist dann u einfach bestimmt nach der Gleichung[1]):

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int u_r \frac{\partial G}{\partial n} ds,$$

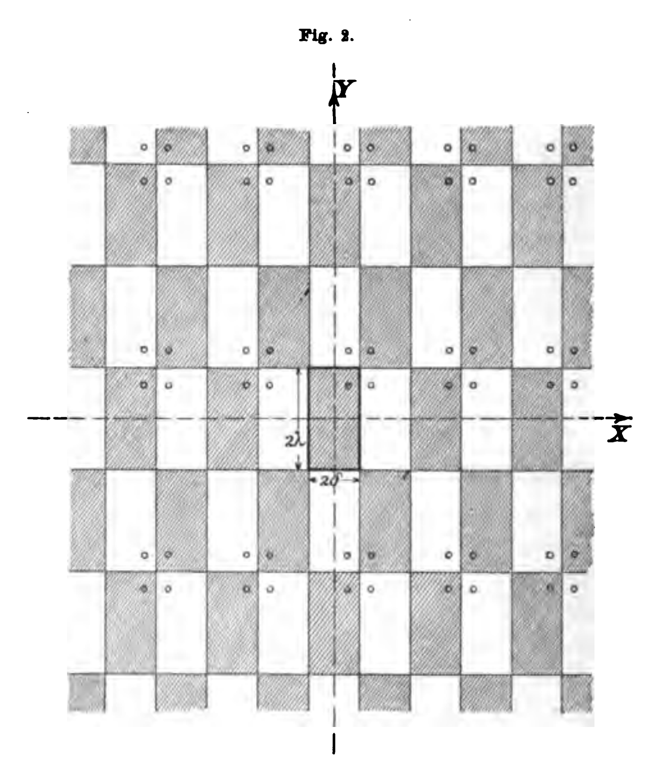
wobei u_r der Wert von u auf dem Rande, $\frac{\partial}{\partial n}$ eine Differentiation nach der äußeren Normalen bedeutet und die Integration über den ganzen Rand zu erstrecken ist.

Da der in unserem Fall vorliegende Bereich ein Rechteck ist und wir mit Rechtecken die ganze x, y Ebene einfach und lückenlos überdecken können, liegt hier die Möglichkeit vor, durch Anwendung des aus der Funktionentheorie wohlbekannten Spiegelungsverfahrens die Greensche Funktion aus einer unendlichen Anzahl Elementarlösungen aufzubauen. Man gehe aus von einer Elementarlösung von $\Delta u + k^2 u = 0$, die nur von dem Abstande des Aufpunktes von einem willkürlichen festen Pol abhängt und in diesem logarithmisch unendlich wird, die also in unserem Falle aus einer geeigneten linearen Zusammensetzung der beiden Besselschen Funktionen J und K vom Index Null bestehen würde. Dann betrachte man die bekannnte schachbrettartige Fig. 2, nehme im Inneren des Grundrechtecks einen beliebigen Punkt x_0, y_0 an und erzeuge durch fortgesetzte Spiegelung an den Seiten des Grundrechtecks eine doppelt unendliche Anzahl von Spiegelpunkten, wie in Fig. 2 angedeutet. Definiert man jetzt zu jedem dieser Punkte die zugehörige Elementarlösung $aJ + bK$, die in dem betreffenden

1) Vgl. z. B. F. Pockels: Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, S. 251 (auch S. 280), Leipzig 1891.

Punkte ihren Pol hat, mit positivem oder negativem Zeichen, je nachdem der erzeugende Pol in einem schraffierten oder nicht schraffierten Rechteck liegt, so ist die Summe dieser Elementarfunktionen, nachdem man noch das Verhältnis der Konstanten a und b so gewählt hat, daß die Reihe konvergiert, die gesuchte Greensche Funktion. Indem man die Besselschen Funktionen durch ihre in der komplexen Ebene verlaufenden Integraldarstellungen definiert, kann man die Summation unter

Fig. 2.



dem Integralzeichen ausführen, und man bekommt schließlich für u eine Formel, die, wie ich mich überzeugt habe, mit der jetzt auf viel einfacherem Wege abzuleitenden übereinstimmt.

Der zweite Weg beruht auf der Möglichkeit die gesuchte Lösung u additiv aus höchstens vier einfacheren Lösungen der vorgelegten Differentialgleichung zusammenzusetzen, die nicht mehr wie die Greensche Funktion doppeltperiodisch sind, sondern sich nur entweder in der x-Richtung oder y-Richtung periodisch verhalten und von denen dann jede einen Teil der Grenzbedingungen befriedigt. In unserem Falle, wo auf den einander gegenüberliegenden Rechtecksseiten dieselben Randbedingungen vorgeschrieben sind, reduzieren sich die vier Funk-

tionen auf zwei, die im folgenden angegeben werden sollen. Der allgemeine Fall beliebiger Randbedingungen läßt sich dann leicht in entsprechender Weise erledigen.

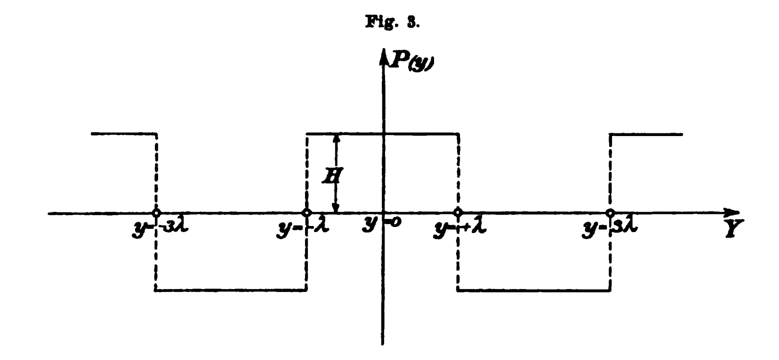
Wir setzen $u = u_1 + u_2$ und verlangen z. B. für u_1, daß

a) $\triangle u_1 + k^2 u_1 = 0$,

b) diese Funktion die Periode 4λ in der y-Richtung habe und

c) in Übereinstimmung mit Forderung b) auf dem Rande des unendlich langen von den Geraden $x = \pm\delta$ begrenzten Streifens gleich

Fig. 3.



der in Fig. 3 dargestellten periodischen Funktion $P(y)$ wird. Die Funktion u_2 bestimmen wir durch ganz analoge Bedingungen; sie wird in x periodisch mit der Periode 4δ.

Die Funktionen u_1 und u_2 sind nun aber leicht anzugeben. Stellen wir nämlich, um u_1 zu bilden, $P(y)$ durch die Fouriersche Reihe dar:

$$P(y) = \frac{4H}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{\lambda} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\frac{y}{\lambda} + \frac{1}{5}\cos\frac{5\pi}{2}\frac{y}{\lambda} - + \cdots\right) \tag{5}$$

dann ist u_1 gegeben durch

$$u_1 = \frac{4H}{\pi}\left(f_1(x)\cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{\lambda} - \frac{1}{3}f_3(x)\cos\frac{3\pi}{2}\frac{y}{\lambda} + \frac{1}{5}f_5(x)\cos\frac{5\pi}{2}\frac{y}{\lambda} - + \cdots\right),$$

wenn wir $f_n(x)$ bestimmen durch die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 f_n}{dx^2} + \left(k^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4\lambda^2}\right) f_n = 0 \tag{6}$$

mit der Bedingung, daß $f_n(x) = 1$ sei für $x = \pm\delta$. Setzen wir

$$p_n = +\sqrt{k^2\lambda^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4}}, \tag{7}$$

so wird

$$f_n(x) = \frac{\cos p_n \frac{x}{\lambda}}{\cos p_n \frac{\delta}{\lambda}}, \tag{8}$$

wobei n die Reihe aller ungeraden ganzen Zahlen durchläuft, also

$$(9) \qquad u_1 = \frac{4H}{\pi}\left(\frac{\cos p_1 \frac{x}{\lambda}}{\cos p_1 \frac{\delta}{\lambda}} \cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{\lambda} - \frac{1}{3}\frac{\cos p_3 \frac{x}{\lambda}}{\cos p_3 \frac{\delta}{\lambda}} \cos\frac{3\pi}{2}\frac{y}{\lambda} + \cdots\right).$$

Ebenso wird, wenn wir definieren:

$$(10) \qquad q_n = +\sqrt{k^2\delta^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4}},$$

und wieder n die Reihe aller ungeraden ganzen Zahlen durchlaufen lassen:

$$(11) \qquad u_2 = \frac{4H}{\pi}\left(\frac{\cos q_1 \frac{y}{\delta}}{\cos q_1 \frac{\lambda}{\delta}} \cos\frac{\pi}{2}\frac{x}{\delta} - \frac{1}{3}\frac{\cos q_3 \frac{y}{\delta}}{\cos q_3 \frac{\lambda}{\delta}} \cos\frac{3\pi}{2}\frac{x}{\delta} + \cdots\right).$$

Hiermit ist also $u = u_1 + u_2$ gefunden.

§ 4. Spaltung der Lösung in ihren reellen und imaginären Teil.

Wie schon in § 2 bemerkt wurde ist die magnetische Kraft $\mathfrak{H}_z$ gleich dem reellen Teil von $ue^{i\omega t}$; denken wir uns jetzt u_1 resp. u_2 in der Form geschrieben:

$$(12) \quad u_1 = F_1(x, y) + iF_1'(x, y), \quad \text{resp.} \quad u_2 = F_2(x, y) + iF_2'(x, y),$$

so wird:

$$(13) \qquad \mathfrak{H}_z = (F_1 + F_2)\cos\omega t - (F_1' + F_2')\sin\omega t.$$

Aus dieser Darstellung ist ersichtlich, daß die Niveaulinien von $\mathfrak{H}_z$ und damit die Stromlinien ihre Gestalt periodisch mit der Zeit ändern, wenn nicht $F_1 + F_2$ proportional $F_1' + F_2'$ ist, was nicht der Fall. Die reell geschriebenen Formeln für $\mathfrak{H}_z$ sind natürlich nicht mehr so übersichtlich wie (9) und (11); um sie zu erhalten setzen wir:

$$(14) \quad p_n = \sqrt{k^2\lambda^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4}} = \sqrt{-\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}\lambda^2 i - \frac{\pi^2 n^2}{4}} = -a_n + b_n i,$$

dann wird, wenn wir noch die Abkürzung $\varkappa^2 = \frac{\mu\sigma\omega}{c^2}$ benutzen:

$$(15) \qquad \begin{cases} a_n = \sqrt[4]{(\varkappa\lambda)^4 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^4}\,\sin\varphi_n/2, \\ b_n = \sqrt[4]{(\varkappa\lambda)^4 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^4}\,\cos\varphi_n/2, \end{cases}$$

wobei φ_n im ersten Quadranten liegt und durch die Gleichung bestimmt ist:

$$(15\text{a}) \qquad \operatorname{tg}\varphi_n = 4\frac{\varkappa^2\lambda^2}{\pi^2 n^2}.$$

Mit Benutzung der Größen a_n und b_n schreibt sich jetzt u_1 in der Form[1])

$$(16)\quad u_1 = F_1 + iF_1' = \frac{4H}{\pi}\sum \pm \frac{1}{n} \frac{\cos a_n \frac{x+\delta}{\lambda}\,\mathfrak{Cos}\, b_n \frac{x-\delta}{\lambda} + \cos a_n \frac{x-\delta}{\lambda}\,\mathfrak{Cos}\, b_n \frac{x+\delta}{\lambda}}{\cos 2a_n \frac{\delta}{\lambda} + \mathfrak{Cos}\, 2b_n \frac{\delta}{\lambda}} \cos \frac{\pi n}{2}\frac{y}{\lambda}$$

$$+ i\frac{4H}{\pi}\sum \pm \frac{1}{n} \frac{\sin a_n \frac{x+\delta}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\, b_n \frac{x-\delta}{\lambda} + \sin a_n \frac{x-\delta}{\lambda}\,\mathfrak{Sin}\, b_n \frac{x+\delta}{\lambda}}{\cos 2a_n \frac{\delta}{\lambda} + \mathfrak{Cos}\, 2b_n \frac{\delta}{\lambda}} \cos \frac{\pi n}{2}\frac{y}{\lambda}.^{1)}$$

Definieren wir analog α_n, β_n, ψ_n durch die Formeln

$$(17)\quad \begin{cases} \alpha_n = \sqrt[4]{(\varkappa\delta)^4 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^4}\, \sin \psi_n/2\,, \\ \beta_n = \sqrt[4]{(\varkappa\delta)^4 + \left(\frac{\pi n}{2}\right)^4}\, \cos \psi_n/2\,, \\ \operatorname{tg} \psi_n = 4\frac{\varkappa^2\delta^2}{\pi^2 n^2}\,, \end{cases}$$

sodaß:

$$(18)\quad q_n = \sqrt{k^2\delta^2 - \frac{\pi^2 n^2}{4}} = \sqrt{-\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}\delta^2 i - \frac{\pi^2 n^2}{4}} = -\alpha_n + \beta_n i;$$

dann wird:

$$(19)\quad u_2 = F_2 + iF_2' = \frac{4H}{\pi}\sum \pm \frac{1}{n} \frac{\cos \alpha_n \frac{y+\lambda}{\delta}\,\mathfrak{Cos}\, \beta_n \frac{y-\lambda}{\delta} + \cos \alpha_n \frac{y-\lambda}{\delta}\,\mathfrak{Cos}\, \beta_n \frac{y+\lambda}{\delta}}{\cos 2\alpha_n \frac{\lambda}{\delta} + \mathfrak{Cos}\, 2\beta_n \frac{\lambda}{\delta}} \cos \frac{\pi n}{2}\frac{x}{\delta}$$

$$+ i\frac{4H}{\pi}\sum \pm \frac{1}{n} \frac{\sin \alpha_n \frac{y+\lambda}{\delta}\,\mathfrak{Sin}\, \beta_n \frac{y-\lambda}{\delta} + \sin \alpha_n \frac{y-\lambda}{\delta}\,\mathfrak{Sin}\, \beta_n \frac{y+\lambda}{\delta}}{\cos 2\alpha_n \frac{\lambda}{\delta} + \mathfrak{Cos}\, 2\beta_n \frac{\lambda}{\delta}} \cos \frac{\pi n}{2}\frac{x}{\delta},$$

und man bekommt den reellen Ausdruck von $\mathfrak{H}_z$, indem man die durch (16) und (19) definierten Werte von F_1, F_1', F_2, F_2' in (13) einsetzt.

§ 5. Grenzfälle und spezielle Beispiele des Feldes.

Wir wollen zunächst den Grenzfall unendlich langsamer Schwingungen betrachten; da jetzt $\omega = 0$ zu setzen ist, wird

$$p_n = q_n = \frac{\pi n}{2} i,$$

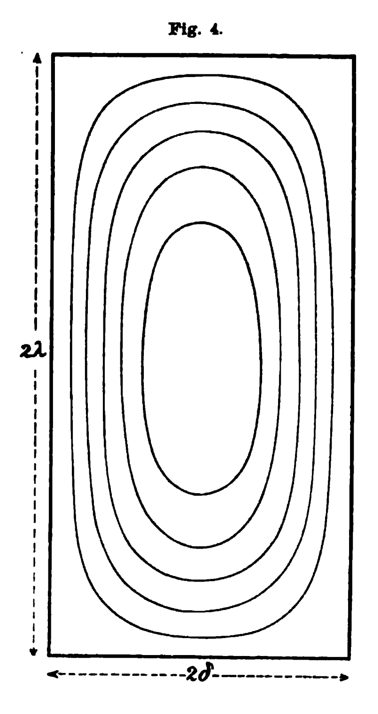
1) Hier und im folgenden besagt das Zeichen $\pm$, daß die Glieder $n = 1, 5, 9, \ldots$ mit dem positiven, die Glieder $n = 3, 7, 11, \ldots$ mit dem negativen Zeichen zu rechnen sind.

und wir erhalten aus (9) und (11)

$$(20)\quad u = u_1 + u_2 = \frac{4H}{\pi}\sum \pm \frac{1}{n}\left(\frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi n}{2}\frac{x}{\lambda}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi n}{2}\frac{\delta}{\lambda}}\cos\frac{\pi n}{2}\frac{y}{\lambda} + \frac{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi n}{2}\frac{y}{\delta}}{\mathfrak{Cos}\,\frac{\pi n}{2}\frac{\lambda}{\delta}}\cos\frac{\pi n}{2}\frac{x}{\delta}\right).$$

Andererseits kann in diesem Falle die Lösung keine andere sein, als $u = H$. Es liefert daher die vorstehende Reihe eine merkwürdige Darstellung für $\pi/4$ im Inneren des Rechtecks. Daß dem so ist, läßt sich in der Tat nach den Grundsätzen der Potentialtheorie einfach beweisen. (Die Reihe genügt nämlich der Gleichung $\Delta u = 0$ und wird auf dem ganzen Rande des Rechtecks konstant gleich $\pi/4$.) Für den Fall unendlich langsamer Schwingungen erhalten wir also, wie es sein muß, das ungestörte homogene Magnetfeld.

Fig. 4.



Als zweiten Grenzfall nehmen wir das Thomsonsche Problem, dessen Lösung sich aus unserem Resultat ergeben muß, wenn wir $\lambda = \infty$ setzen.

Für diesen Fall wird nämlich $u_2 = 0$, da $q_n \frac{\lambda}{\delta}$ für $\lambda = \infty$ einen unendlich großen imaginären Bestandteil hat; weiter wird

$$p_1 = p_3 = \cdots = p_n = k\lambda,$$

sodaß (9) ergibt:

$$u_1 = \frac{4H}{\pi}\frac{\cos kx}{\cos k\delta}\left(\cos\frac{\pi}{2}\frac{y}{\lambda} - \frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\frac{y}{\lambda} + - \cdots\right).$$

Die in Klammern stehende Reihe hat aber für $-\lambda < y < +\lambda$, d. h. hierfür $-\infty < y < +\infty$ den Wert $\frac{\pi}{4}$; daher wird:

$$(21)\qquad u = u_1 = H\frac{\cos kx}{\cos k\delta},$$

wie schon von Thomson angegeben wurde.

Für den Fall beliebiger Frequenz und beliebiger Querschnittsabmessungen setzen uns die Formeln (13), (16) und (19) in den Stand, das magnetische Feld im Innern des Stabes zu berechnen.

Nach § 2 ist dann auch der Verlauf der Wirbelströme gegeben, da Niveau-Linien der $\mathfrak{H}$-Fläche und Wirbelstromlinien zusammenfallen. Die Rechnung bietet keine Schwierigkeiten mehr: im allgemeinen konvergieren die Reihen (16) und (19) gut, nur in der Nähe des Randes

muß man eine größere Anzahl Glieder berücksichtigen. In Fig. (4) wurde der Verlauf der Wirbelströme, für den Augenblick $t = 0$, gezeichnet für einen Kupferstab mit den Querschnittsabmessungen: $\delta = 2$ cm $\lambda = 4$ cm und einer Leitfähigkeit $\sigma = 4\pi c^2 5{,}83 \cdot 10^{-4} = 7{,}33 \cdot 10^{-3} c^2$ gemessen in rationellen Einheiten, entsprechend einer elektromagnetischen Leitfähigkeit $\sigma^{\text{magn.}} = 5{,}83 \cdot 10^{-4}$. Das Feld macht 50 Vollschwingungen pro sec., sodaß $\omega = 2\pi \cdot 50$ zu setzen ist und wir also erhalten $\varkappa^2 = 2{,}30$ cm^{-2}. Die $\mathfrak{H}$-Fläche wurde bestimmt durch die numerische Berechnung ihrer Ordinaten in 25 über den vierten Teil des Rechtecks verteilten Punkten.

§ 6. Die Stromwärmeverluste.

Die in einem Leiter erzeugte Joulesche Wärme ist bekanntlich gegeben durch den Ausdruck

$$Q = \sigma \int_S \mathfrak{E}^2 dS, \tag{22}$$

wo dS ein Volumenelement bedeutet und die Integration über das ganze Volumen des Leiters zu erstrecken ist. Nun sagt uns aber der Poyntingsche Satz, daß die dem elektromagnetischen Felde so entzogene Energie in den Leiter durch seine Oberfläche hineingeströmt ist; er gibt uns also die Möglichkeit das Volumenintegral durch ein für die Zwecke der Ausführung der Integration besser geeignetes Oberflächenintegral zu ersetzen. Definieren wir nämlich den Strahlungsvektor $\mathfrak{S}$ durch die Formel:

$$\mathfrak{S} = c[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}],$$

so lautet bekanntlich der Poyntingsche Satz, wenn W_m resp. W_e die in dem betrachteten Raume enthaltene magnetische resp. elektrische Energie bedeutet:

$$\int_\varsigma \mathfrak{S}_n d\varsigma + Q + \dot{W}_m + \dot{W}_e = 0, \tag{23}$$

wobei ς die Oberfläche des Raumes, n die nach außen gerichtete Normale bedeutet. Hier gehen wir zu den zeitlichen Mittelwerten:

$$\mathfrak{S}^m = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} \mathfrak{S}\, dt \quad \text{und} \quad Q^m = \frac{\omega}{2\pi}\int_{t_0}^{t_0+\frac{2\pi}{\omega}} Q\, dt$$

über und erhalten aus (23) wegen der Periodizität von W_e und W_m

$$\int_\varsigma \mathfrak{S}_n^m d\varsigma = - Q^m, \tag{24}$$

wobei jetzt die Integration über den Rand s des Rechtecks zu erstrecken ist und der Raum, für den Q^m berechnet wird, von zwei Ebenen $z = \text{const}$ im gegenseitigen Abstande 1 begrenzt gedacht wird. Das Vektorprodukt $c[\mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H}] = \mathfrak{S}$ reduziert sich in unsrem Falle, da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ senkrecht aufeinander stehen, auf das Produkt ihrer Absolutwerte; da weiter noch $\mathfrak{E}$ sowohl wie $\mathfrak{H}$ in der Oberfläche des Stabes liegen, so wird mit Berücksichtigung von (4)[1]):

$$
(25) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_n = -\dfrac{c^2}{\sigma} \mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} e^{i\omega t}\right) \mathfrak{R}(H e^{i\omega t}) & \text{für } x = \pm \delta, \\[2ex] \mathfrak{S}_n = \dfrac{c^2}{\sigma} \mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} e^{i\omega t}\right) \mathfrak{R}(H e^{i\omega t}) & \;\;\text{„} \quad y = \pm \lambda. \end{cases}
$$

Der zeitliche Mittelwert hiervon lautet:

$$
(26) \qquad \begin{cases} \mathfrak{S}_n^m = -\dfrac{c^2}{2\sigma} H \cdot \mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) & \text{für } x = \pm \delta, \\[2ex] \mathfrak{S}_n^m = \dfrac{c^2}{2\sigma} H \cdot \mathfrak{R}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \;\;\text{„} \quad y = \pm \lambda, \end{cases}
$$

sodaß (24) wird:

$$
(27) \qquad Q^m = \frac{c^2}{\sigma} H \cdot \mathfrak{R}\left[\int_{-\lambda}^{+\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=\delta} dy + \int_{-\delta}^{+\delta} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=\lambda} dx\right].
$$

Die Ausführung der Integration liefert auf Grund von (9) und (11) für Q^m die Reihe:

$$
(28) \qquad Q^m = -\frac{16}{\pi^2} \frac{H^2 c^2}{\sigma} \mathfrak{R}\Bigg[\left(\frac{p_1^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{p_1} \operatorname{tg} p_1 \frac{\delta}{\lambda} + \frac{q_1^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{q_1} \operatorname{tg} q_1 \frac{\lambda}{\delta}\right)
$$
$$
+ \left(\frac{\left(\frac{p_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{p_3} \operatorname{tg} p_3 \frac{\delta}{\lambda} + \frac{\left(\frac{q_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{q_3} \operatorname{tg} q_3 \frac{\lambda}{\delta}\right) + \cdots\Bigg]
$$

Will man, was sich allerdings im allgemeinen nicht empfiehlt, die Funktionen in der eckigen Klammer durch ihren reellen Teil ersetzen, so erhält man:

$$
(29) \quad Q^m = 4\frac{H^2 c^2}{\sigma}\Bigg\{\sum \frac{4}{\pi^2 n^2} \frac{b_n \mathfrak{Sin}\, 2 b_n \frac{\delta}{\lambda} - a_n \sin 2 a_n \frac{\delta}{\lambda}}{\mathfrak{Cos}\, 2 b_n \frac{\delta}{\lambda} + \cos 2 a_n \frac{\delta}{\lambda}} - \sum \frac{1}{a_n^2 + b_n^2} \frac{b_n \mathfrak{Sin}\, 2 b_n \frac{\delta}{\lambda} + a_n \sin 2 a_n \frac{\delta}{\lambda}}{\mathfrak{Cos}\, 2 b_n \frac{\delta}{\lambda} + \cos 2 a_n \frac{\delta}{\lambda}}
$$
$$
+ \sum \frac{4}{\pi^2 n^2} \frac{\beta_n \mathfrak{Sin}\, 2 \beta_n \frac{\lambda}{\delta} - \alpha_n \sin 2 \alpha_n \frac{\lambda}{\delta}}{\mathfrak{Cos}\, 2 \beta_n \frac{\lambda}{\delta} + \cos 2 \alpha_n \frac{\lambda}{\delta}} - \sum \frac{1}{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \frac{\beta_n \mathfrak{Sin}\, 2 \beta_n \frac{\lambda}{\delta} + \alpha_n \sin 2 \alpha_n \frac{\lambda}{\delta}}{\mathfrak{Cos}\, 2 \beta_n \frac{\lambda}{\delta} + \cos 2 \alpha_n \frac{\lambda}{\delta}}\Bigg\}
$$

---

1) $\mathfrak{R}$ bedeutet hier und im folgenden den reellen Teil.

wobei n wieder die Reihe aller ungeraden positiven ganzen Zahlen durchläuft.

Ein sehr viel übersichtlicherer Ausdruck ergibt sich aber, wenn wir in (28) die tg-Funktionen durch ihre Partialbruchentwicklung ersetzen, die bekanntlich lautet:

$$(30)\qquad \operatorname{tg} x = 2x\left(\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{1}{\left(\frac{3\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \frac{1}{\left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 - x^2} + \cdots\right).$$

Setzt man diese Reihe in (28) ein, so ergibt sich mit Berücksichtigung von (14) und (18) für Q^m die Doppelsumme:

$$(31)\qquad Q^m = \frac{32}{\pi^2}\frac{H^2c^2}{\sigma}\frac{2\varkappa\delta}{\pi}\frac{2\varkappa\lambda}{\pi}\Re\left[i\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{\nu^2 + \frac{\delta^2}{\lambda^2}n^2 + \frac{4\varkappa^2\delta^2}{\pi^2}i}\right.$$
$$\left. + i\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{\nu^2 + \frac{\lambda^2}{\delta^2}n^2 + \frac{4\varkappa^2\lambda^2}{\pi^2}i}\right],$$

oder indem wir zur Abkürzung setzen:

$$(31\text{a})\qquad \alpha = \frac{\delta}{\lambda}, \quad \frac{2\varkappa\delta}{\pi} = \varepsilon_1, \quad \frac{2\varkappa\lambda}{\pi} = \varepsilon_2:$$

$$(31\text{b})\qquad Q^m = \frac{32}{\pi^2}\frac{H^2c^2}{\sigma}\varepsilon_1\varepsilon_2\Re\left[i\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{\nu^2 + \alpha^2n^2 + \varepsilon_1^2 i}\right.$$
$$\left. + i\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{\nu^2 + \frac{n^2}{\alpha^2} + \varepsilon_2^2 i}\right].$$

n und ν durchlaufen beide die Reihe aller ungeraden positiven ganzen Zahlen.

§ 7. Grenzfälle der Wirbelstromverluste.

Um zu übersehen, wie Q^m von den verschiedenen Umständen abhängt, wollen wir für den Stromwärmeverlust Näherungsformeln für drei verschiedene Fälle ableiten:

a) $\varepsilon_1 = \frac{2\varkappa\delta}{\pi}$, sowohl wie $\varepsilon_2 = \frac{2\varkappa\lambda}{\pi}$ kleiner wie 1,

b) ε_1, sowohl wie ε_2 groß gegen 1,

c) ε_1 kleiner wie 1, ε_2 groß gegen 1.

a) Wir betrachten zunächst den Fall a); dieser tritt allgemein gesprochen ein, wenn die Querschnittsabmessungen oder auch die Schwingungszahlen nicht zu groß sind. Hier gilt für alle Werte von ν, n und α: $\varepsilon_1^2 < \nu^2 + \alpha^2n^2$ und $\varepsilon_2^2 < \nu^2 + n^2/\alpha^2$. Dementsprechend entwickeln

wir unterhalb der Σ-Zeichen nach Potenzen der Größen $\varepsilon_1^2/(\nu^2+\alpha^2 n^2)$, resp. $\varepsilon_2^2/\left(\nu^2+\frac{n^2}{\alpha^2}\right)$ und erhalten:

$$(32)\quad Q^m=\frac{32}{\pi^2}\frac{H^2c^2}{\sigma}\varepsilon_1\varepsilon_2\Big[\varepsilon_1^2\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{(\nu^2+\alpha^2n^2)^2}-\varepsilon_1^6\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{(\nu^2+\alpha^2n^2)^4}+-\cdots$$
$$+\varepsilon_2^2\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{(\nu^2+n^2/\alpha^2)^2}-\varepsilon_2^6\sum_n\frac{1}{n^2}\sum_\nu\frac{1}{(\nu^2+n^2/\alpha^2)^4}+-\cdots\Big].$$

Indem wir den Faktor $\varepsilon_1\varepsilon_2$ aus der Summe herausziehen und nach (31a) $\varepsilon_1/\varepsilon_2=\alpha$ resp. $\varepsilon_2/\varepsilon_1=1/\alpha$ setzen, erhalten wir hierfür:

$$(33)\qquad Q^m=\frac{32}{\pi^2}\frac{H^2c^2}{\sigma}\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\left[A_1(\alpha)-\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2A_3(\alpha)+\varepsilon_1^4\varepsilon_2^4A_5(\alpha)-+\cdots\right].$$

Hierbei ist die Reihe der Funktionen $A_m(\alpha)$ des Verhältnisses der Seitenlängen $\alpha=\delta/\lambda$ definiert durch die Formeln:

$$(33\text{a})\qquad \begin{cases} A_1(\alpha)=\sum_n\frac{1}{n^2}\left\{\sum_\nu\frac{\alpha}{(\nu^2+\alpha^2n^2)^2}+\sum_\nu\frac{1/\alpha}{(\nu^2+n^2/\alpha^2)^2}\right\},\\ A_3(\alpha)=\sum_n\frac{1}{n^2}\left\{\sum_\nu\frac{\alpha^3}{(\nu^2+\alpha^2n^2)^4}+\sum_\nu\frac{1/\alpha^3}{(\nu^2+n^2/\alpha^2)^4}\right\},\\ A_5(\alpha)=\sum_n\frac{1}{n^2}\left\{\sum_\nu\frac{\alpha^5}{(\nu^2+\alpha^2n^2)^6}+\sum_\nu\frac{1/\alpha^5}{(\nu^2+n^2/\alpha^2)^6}\right\},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

Schließlich ersetzen wir noch ε_1 und ε_2 durch ihre Werte $\frac{2\delta}{\pi}\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}}$ resp. $\frac{2\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}}$, sodaß (33) übergeht in

$$(34)\qquad Q^m=\frac{512}{\pi^6}\mu^2H^2\omega^2\frac{\sigma}{c^2}\lambda^2\delta^2\Big[A_1(\alpha)-\left(\frac{4}{\pi^2}\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}\lambda\delta\right)^2A_3(\alpha)+\cdots$$
$$\cdots\pm\left(\frac{4}{\pi^2}\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}\lambda\delta\right)^{m-1}A_m(\alpha)\cdots\Big].$$

Alle Funktionen A_m verschwinden für $\alpha=0$ und $\alpha=\infty$ und haben, da $A(\alpha)=A(1/\alpha)$ ist, ein Maximum bei $\alpha=1$. In Fig. 5 sind $A_1(\alpha)$ und $A_3(\alpha)$ als Funktionen von α eingetragen; in den meisten Fällen reichen nämlich zwei Glieder der Reihe (34) vollkommen aus. Nehmen wir als Beispiel einen Kupferstab mit den Abmessungen $2\delta=1$ cm, $2\lambda=2$ cm, der insofern für die Rechnung bereits ungünstig ist, als die Werte ε_1 und ε_2 der 1 nahe liegen, so haben wir zu setzen $\omega=2\pi\cdot 50$, $\frac{\sigma}{c^2}=7{,}33\cdot10^{-3}$, $\alpha=\delta/\lambda=0{,}5$, sodaß (34) für die im Mittel pro Zeiteinheit und Längeneinheit des Stabes erzeugte Wärme ergibt:

$$Q^m=96{,}1\,H^2\,[0{,}402-0{,}015+\cdots]=37{,}3\,H^2\ \text{erg/cm}\cdot\text{sec}.$$

Messen wir alle Größen nicht mehr in rationellen, sondern in elektromagnetischen Einheiten, indem wir setzen

$$\sigma = 4\pi c^2 \sigma^{\text{magn.}} \qquad H = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} H^{\text{magn.}}$$

und der Kürze halber den Index „magn." wieder fortlassen, so erhalten wir für die im Mittel pro Zeiteinheit und Längeneinheit eines Stabes erzeugte Wärme:

$$(34\text{a}) \quad Q^m = \frac{512}{\pi^6} 10^{-7} \mu^2 H^2 \omega^2 \sigma \lambda^2 \delta^2 \left[A_1(\alpha) - \left(\frac{16}{\pi} \mu \sigma \omega \lambda \delta \right)^2 A_3(\alpha) + \cdots \right] \text{Watt/cm.}$$

b) Dieser Fall tritt im allgemeinen ein, wenn die Schwingungszahlen oder die Querschnittsabmessungen groß sind. Eine erste Näherung

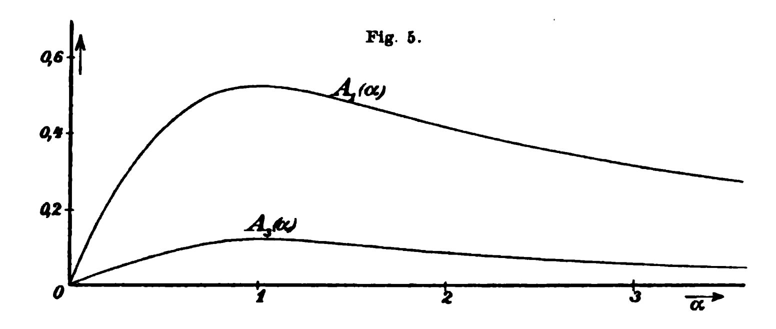


Fig. 5.

erhalten wir am einfachsten aus (29). Indem wir nämlich auf Grund von (15) resp. (17) für den vorliegenden Fall durchweg setzen:

$$a_n = b_n = \varkappa \lambda \sqrt{\tfrac{i}{2}} \quad \text{resp.} \quad \alpha_n = \beta_n = \varkappa \delta \sqrt{\tfrac{i}{2}},$$

sehen wir, daß die zweite Summe gegen die erste und die vierte gegen die zweite zu vernachlässigen ist. Ebenso können wir in der ersten und dritten Summe sin neben Sin und cos neben Cos streichen, sodaß (29) ergibt:

$$(35) \quad Q^m = 4 \frac{H^2 c^2}{\sigma} \left(\varkappa \lambda \sqrt{\tfrac{i}{2}} + \varkappa \delta \sqrt{\tfrac{i}{2}} \right) \sum \frac{4}{\pi^2 n^2} = \frac{H^2}{4} \sqrt{\frac{2 \mu \omega}{\sigma / c^2}} (4\lambda + 4\delta),$$

oder in elektromagnetischen Einheiten:

$$(35\text{a}) \qquad Q^m = \frac{H^2}{32\pi} \sqrt{\frac{2 \mu \omega}{\pi \sigma}} (4\lambda + 4\delta).$$

Wie es zu erwarten war, wird hier Q^m proportional dem Umfange des Querschnittes, entsprechend dem Umstande, daß bei sehr großen Schwingungszahlen der Strom auf eine dünne Schicht in unmittelbarer Nähe der Oberfläche beschränkt ist. (Skineffect).

c) Mit diesem Fall haben wir es zu tun bei den in der Praxis angewandten Eisenblechen. Ihre Dicke ist immer klein und beträgt 0,5 bis 1 mm, die Breite ist im allgemeinen sehr groß und beträgt auch bei Eisenprüfern, wo die schmalsten Bleche vorkommen, immerhin noch einige cm. Setzen wir $\omega = 2\pi \cdot 50$ entsprechend der in der elektrotechnischen Praxis üblichen Periodenzahl und als Mittelwert im Anschluß an J. J. Thomson $\mu = 500$, so wird die charakteristische Größe $\varepsilon_1 = \frac{2\varkappa\delta}{\pi} = 0{,}218$ bis $0{,}436$, wenn wir $\sigma = 1{,}22 \cdot 10^{-3} c^2$ setzen, entsprechend dem sechsten Teile der Leitfähigkeit von Kupfer. Aus dieser orientierenden Rechnung ist ersichtlich, daß wir auch hier die erste Doppelsumme von (31b) nach Potenzen von $\varepsilon_1^2/(\nu^2 + \alpha^2 n^2)$ entwickeln können. Dasselbe gilt aber auch von der zweiten Doppelsumme; der kleinste Wert von $\nu^2 + \frac{n^2}{\alpha^2}$ ist nämlich $1 + 1/\alpha^2 > \frac{1}{\alpha^2}$, so daß:

$$\frac{\varepsilon_2^2}{\nu^2 + n^2/\alpha^2} < \frac{\varepsilon_2^2}{1/\alpha^2} = \varepsilon_1^2 < 1.$$

Gleichung (32) resp. (34) gilt also auch für diesen Fall, und es erübrigt nur noch, Näherungsformeln für die Funktionen $A_m(\alpha)$, resp. für die in (32) auftretenden Doppelsummen, für kleine Werte von α abzuleiten. Hierbei werden die mit einer Potenz von ε_1 multiplizierten Summen S_{2m}, in denen nur positive Potenzen von α auftreten, anders behandelt werden müssen, wie die mit einer Potenz von ε_2 multiplizierten S'_{2m}, in denen die wegen der Kleinheit von α großen negativen Potenzen von α vorkommen. Da die vorliegenden Summen uns nämlich Funktionen definieren, die für $\alpha = \pm i\frac{\nu}{n}$ resp. $\alpha = \pm i\frac{n}{\nu}$ unendlich werden, für die also der Nullpunkt der komplexen α-Ebene ein wesentlich singulärer Punkt ist[1]), ist es unmöglich, sie um diesen Punkt in Potenzreihen zu entwickeln. Um dennoch Näherungsfunktionen zu konstruieren werden wir bei den Summen S_{2m} sowohl die Summation nach ν, wie diejenige nach n unter Zuhilfenahme einer Integraldarstellung ausführen; bei den Summen S'_{2m} dagegen wird die Summation nach ν allein genügen.

Wir gehen aus von der Funktion

$$f(\alpha n) = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^2 + \alpha^2 n^2}, \tag{36}$$

---

1) Sowie jeder Punkt der imaginären Achse, die deshalb die natürliche Grenze unserer Funktion bildet.

aus der sich alle Summen S_{2m} durch fortgesetzte Differentiation ableiten lassen nach der Formel:

$$(37)\quad S_{2m} = \sum_n \frac{1}{n^2} \sum_\nu \frac{1}{(\nu^2 + \alpha^2 n^2)^{2m}}$$
$$= -\frac{1}{2^{2m-1}} \frac{1}{(2m-1!)} \sum_n \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\alpha n} \frac{d}{d(\alpha n)}\right)^{2m-1} f(\alpha n).$$

In (36) ersetze man jetzt jeden Summanden durch eine Integraldarstellung von der Form:

$$(38)\qquad \frac{1}{\nu^2 + \alpha^2 n^2} = \frac{1}{2\nu}\left(\frac{1}{\nu + i\alpha n} + \frac{1}{\nu - i\alpha n}\right) = \frac{1}{\nu}\int_0^\infty e^{-\xi\nu} \cos \xi \alpha n \, d\xi.$$

Führt man dann die Summation nach ν aus, indem man setzt:

$$(39)\qquad \sum_\nu \frac{1}{\nu} e^{-\xi\nu} = \int_\xi^\infty d\eta \sum_\nu e^{-\nu\eta} = \frac{1}{2}\int_\xi^\infty \frac{d\eta}{\mathfrak{Sin}\,\eta} = -\frac{1}{2}\log \mathfrak{Tg}\,\frac{\xi}{2},$$

unter „$\mathfrak{Tg}$" den „hyperbolischen Tangens" verstanden, so erhält man zunächst für $f(\alpha n)$ die Darstellung:

$$(36\text{a})\qquad f(\alpha n) = -\int_0^\infty \cos 2\xi\alpha n \cdot \log \mathfrak{Tg}\,\xi \, d\xi.$$

Hieraus findet man dann nach (37):

$$(40)\qquad S_2 = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\infty \xi \log \mathfrak{Tg}\,\xi \sum_n \frac{\sin n 2\alpha\xi}{n^3} d\xi.$$

Ebenso ergibt sich:

$$(40\text{a})\qquad S_4 = -\frac{1}{8}\frac{1}{\alpha^5}\int_0^\infty \xi \log \mathfrak{Tg}\,\xi \sum_n \frac{\sin n 2\alpha\xi}{n^7} d\xi$$
$$+\frac{1}{4}\frac{1}{\alpha^4}\int_0^\infty \xi^2 \log \mathfrak{Tg}\,\xi \sum_n \frac{\cos n 2\xi\alpha}{n^6} d\xi$$
$$+\frac{1}{6}\frac{1}{\alpha^3}\int_0^\infty \xi^3 \log \mathfrak{Tg}\,\xi \sum_n \frac{\sin n 2\xi\alpha}{n^5} d\xi,$$

usw.

Die hier auftretenden Summen nach n sind Fourier-Reihen für Funktionen, die innerhalb des Gebietes $0 < 2\alpha\xi < \pi$ durch rationale ganze Funktionen von $\alpha\xi$ dargestellt werden können; in den Gebieten $\pi < 2\alpha\xi < 2\pi$ usw. sind dann ihre Werte wegen der Periodizität

der Darstellung mitbestimmt. Man überzeugt sich leicht durch fortgesetzte Integration der Reihe

$$\sum \frac{\sin n\, 2\alpha\xi}{n} = \frac{\pi}{4}$$

nach $2\alpha\xi$, daß für $0 < 2\alpha\xi < \pi$

$$(41)\left\{\begin{aligned}
\sum_n \frac{\sin n\, 2\alpha\xi}{n^3} &= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2^2}{2!}\alpha^2\xi^2 - \pi\alpha\xi\right),\\
\sum_n \frac{\sin n\, 2\alpha\xi}{n^5} &= +\frac{\pi}{4}\left(\frac{2^4}{4!}\alpha^4\xi^4 - \frac{\pi}{2}\frac{2^3}{3!}\alpha^3\xi^3 + \frac{\pi^3}{24}\frac{2}{1}\alpha\xi\right),\\
\sum_n \frac{\sin n\, 2\alpha\xi}{n^7} &= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2^6}{6!}\alpha^6\xi^6 - \frac{\pi}{2}\frac{2^5}{5!}\alpha^5\xi^5 + \frac{\pi^3}{24}\frac{2^3}{3!}\alpha^3\xi^3 - \frac{\pi^5}{240}\frac{2}{1}\alpha\xi\right),\\
\sum_n \frac{\cos n\, 2\alpha\xi}{n^6} &= -\frac{\pi}{4}\left(\frac{2^5}{5!}\alpha^5\xi^5 - \frac{\pi}{2}\frac{2^4}{4!}\alpha^4\xi^4 + \frac{\pi^3}{24}\frac{2^2}{2!}\alpha^2\xi^2 - \frac{\pi^5}{240}\right).
\end{aligned}\right.$$

Ist nun α klein, so erstreckt sich das Intervall, für das die Formeln (41) gelten, von Null bis zu dem großen Werte $\xi = \frac{\pi}{2\alpha}$; andererseits verschwindet der in den Integralen (40) resp. (40a) vor den Summen nach n stehende Faktor für große Werte von ξ wie die Exponentialfunktion. Wir führen deshalb die Integration von 0 bis ∞ schrittweise aus, indem wir sie zerlegen in Teile, die sich erstrecken von 0 bis $\pi/2\alpha$, von $\pi/2\alpha$ bis $2\pi/2\alpha$, usw. Vernachlässigen wir durchweg Glieder, die für $\alpha = 0$ verschwinden, wie $e^{-\pi/\alpha}$, so brauchen wir nur das Intervall von 0 bis $\pi/2\alpha$ zu berücksichtigen, und wir erhalten aus (40) und (40a) mit Benutzung von (41):

$$(42)\quad\left\{\begin{aligned}
S_2 &= \frac{\pi}{2}\alpha\int_0^{\pi/2\alpha}\xi^3\log\mathfrak{Tg}\,\xi\,d\xi - \frac{\pi^2}{4}\int_0^{\pi/2\alpha}\xi^2\log\mathfrak{Tg}\,\xi\,d\xi,\\
S_4 &= \frac{\pi}{72}\alpha\int_0^{\pi/2\alpha}\xi^7\log\mathfrak{Tg}\,\xi\,d\xi - \frac{\pi^2}{90}\int_0^{\pi/2\alpha}\xi^6\log\mathfrak{Tg}\,\xi\,d\xi,
\end{aligned}\right.$$

Für die weitere Ausrechnung in der hier gewünschten Näherung ist es bequem $\log\mathfrak{Tg}\,\xi$ nach (39) wieder zu ersetzen durch die Reihe:

$$-2\sum_n \frac{e^{-2n\xi}}{n},$$

sodaß wir allgemein mittels fortgesetzter partieller Integration schreiben können:

$$(43)\qquad \int\xi^p\log\mathfrak{Tg}\,\xi\,d\xi = \xi^p\sum_n\frac{e^{-2n\xi}}{n^2} + \frac{p}{2}\xi^{p-1}\sum_n\frac{e^{-2n\xi}}{n^3}$$
$$+\frac{p(p-1)}{2^2}\xi^{p-2}\sum_n\frac{e^{-2n\xi}}{n^4} + \cdots + \frac{p(p-1)\cdots 1}{2^p}\sum_n\frac{e^{-2n\xi}}{n^{p+2}}.$$

Bei der weiteren Auswertung von S_2, S_4 behalten wir abermals nur die Glieder bei, die nicht mit einer Exponentialfunktion multipliziert sind, die also der unteren Grenze 0 der Integrationen in (42) entsprechen; so wird schließlich:

$$(44)\qquad \begin{cases} S_2 = \frac{\pi^2}{8}\sum_n \frac{1}{n^4} - \frac{3\pi}{8}\alpha\sum_n \frac{1}{n^5}, \\ S_4 = \frac{\pi^2}{8}\sum_n \frac{1}{n^8} - \frac{35}{64}\pi\alpha\sum_n \frac{1}{n^9}. \end{cases}$$

Es erübrigt jetzt noch auch für die Summen

$$S'_{2m} = \sum_n \frac{1}{n^2}\sum_\nu \frac{1}{\left(\nu^2 + \frac{n^2}{\alpha^2}\right)^{2m}}$$

Näherungsformeln für kleine Werte von α abzuleiten. Dieses gelingt leicht folgendermaßen. Man gehe wieder aus von der zu (36) analogen Funktion

$$(45)\qquad f\left(\frac{n}{\alpha}\right) = \sum_\nu \frac{1}{\nu^2 + \frac{n^2}{\alpha^2}},$$

aus der sich alle Summen S'_{2m} durch fortgesetzte Differentiation ableiten lassen nach der aus (37) durch Vertauschung von $n\alpha$ mit n/α entstehenden Formel:

$$(46)\qquad S'_{2m} = \sum_n \frac{1}{n^2}\sum_\nu \frac{1}{\left(\nu^2 + \frac{n^2}{\alpha^2}\right)^{2m}}$$
$$= -\frac{1}{2^{2m-1}}\frac{1}{(2m-1)!}\sum \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n/\alpha}\frac{d}{d(n/\alpha)}\right)^{2m-1} f\left(\frac{n}{\alpha}\right).$$

In (45) führe man jetzt auf Grund von (30) nur die Summation nach ν aus. Man erhält, indem man nachher wieder den $\mathfrak{Tg}$ entwickelt:

$$(47)\qquad f\left(\frac{n}{\alpha}\right) = \sum_\nu \frac{1}{\nu^2 + \frac{n^2}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{4}\frac{1}{n/\alpha}\,\mathfrak{Tg}\,\frac{\pi}{2}\frac{n}{\alpha}$$
$$= \frac{\pi}{4}\frac{1}{n/\alpha}\left(1 - 2e^{-\pi n/\alpha} + 2e^{-2\pi n/\alpha} + \cdots\right)$$

Anwendung von (46) ergibt jetzt, wenn wieder die Glieder, die für $\alpha = 0$ wie $e^{-\pi/\alpha}$ verschwinden, vernachlässigt werden:

$$(48)\qquad S'_2 = \frac{\pi}{8}\alpha^3\sum_n \frac{1}{n^5}, \qquad S'_4 = \frac{5\pi}{64}\alpha^7\sum_n \frac{1}{n^9}.$$

Führt man die durch (44) und (48) definierten Werte in (32) ein, und berücksichtigt, daß $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \alpha$, so erhält man schließlich für den Wirbelstromverlust pro Zeiteinheit und pro Längeneinheit des Bleches die Formel:

$$(49)\quad Q^m = \frac{32}{\pi^2}\frac{H^2c^2}{\sigma}\varepsilon_1\varepsilon_2\Big[\varepsilon_1^2\Big(\frac{\pi^2}{8}\sum_n\frac{1}{n^4} - \alpha\frac{\pi}{4}\sum_n\frac{1}{n^5}\Big) - \varepsilon_1^6\Big(\frac{\pi}{8}\sum_n\frac{1}{n^8} - \alpha\frac{15\pi}{32}\sum_n\frac{1}{n^9}\Big)\cdots\Big]$$

oder indem wir die Summen durch ihre Zahlenwerte ersetzen und die Bedeutung von ε_1 und ε_2 eintragen:

$$(50)\quad Q^m = \tfrac{2}{3}\mu^2H^2\omega^2\frac{\sigma}{c^2}\delta^3\lambda\Big[(1 - 0{,}630\,\delta/\lambda) - \Big(\frac{4}{\pi}\frac{\mu\sigma\omega}{c^2}\delta^2\Big)^2(0{,}985 - 1{,}178\,\delta/\lambda) + \cdots\Big]$$

Mißt man die Größen in elektromagnetischen Einheiten, so findet man für die pro cm^3 und pro sec. entwickelte Wärmemenge den Wert:

$$(50\text{a})\quad q^m = \frac{Q^m}{4\lambda\delta} = \tfrac{1}{6}\cdot 10^{-7}\,\mu^2H^2\omega^2\sigma\delta^2\Big[(1 - 0{,}630\,\delta/\lambda) - \Big(\frac{16}{\pi}\mu\sigma\omega\delta^2\Big)^2(0{,}985 - 1{,}178\,\delta/\lambda) + \cdots\Big]\ \text{Watt/cm}^3.$$

Die Formeln (49), (50) und (50a) zeigen, daß die in der Elektrotechnik angewandte Formel:

$$q^m = \text{const.}\cdot\mathfrak{B}^2\cdot\delta^2$$

sich als erste Näherung aus der theoretischen Rechnung ergibt. Die Abweichung von diesem Werte, verursacht durch Berücksichtigung der zweiten Näherung, beträgt im allgemeinen nur sehr wenig (wenige Prozente). Der Korrektionsfaktor $0{,}630\,\delta/\lambda$ wurde schon auf Grund einer näherungsweisen Rechnung angegeben von Herrn Rüdenberg.[1]) Unsere Formel zeigt, daß dieser allein im allgemeinen nicht genügt, da das Glied $0{,}982\left(\frac{16}{\pi}\mu\sigma\omega\delta^2\right)^2$ von derselben und für einigermaßen breite oder dicke Bleche sogar von überwiegender Größenordnung ist. In dem von Herrn Rüdenberg gegebenen Beispiel ist allerdings der Faktor $(1 - 0{,}630\,\delta/\lambda)$ maßgebend. Durch das Vorhergehende sind jetzt die drei Grenzfälle: $\varkappa\delta$ sowohl wie $\varkappa\lambda$ klein, $\varkappa\delta$ sowohl wie $\varkappa\lambda$ groß, und $\varkappa\delta$ klein, $\varkappa\lambda$ groß vollständig erschöpft. Die Gleichungen (34) resp. (34a), (35) resp. (35a) und (50) resp. (50a) geben uns in

1) Elektrotechnische Zeitschrift 1906, Heft 6.

jedem dieser Fälle geeignete Näherungsformeln für die Ausrechnung der Wirbelstromwärme. Tritt nicht gerade einer dieser extremen Fälle auf, so ist es natürlich immer möglich auf die allgemeingültige Gleichung (29) oder (31) zurückzugreifen. Schließlich sei noch bemerkt, daß der berechnete, im Innern des Stabes stattfindende, Energieverbrauch sich als eine Vermehrung des Widerstandes der umgebenden Spule bemerkbar machen wird in einem aus den oben zitierten Formeln für jeden Fall leicht ableitbaren Betrag. Ebenso zeigt sich die Veränderung des ursprünglich vorhandenen homogenen magnetischen Feldes in einer Verminderung des Selbstinduktionskoeffizienten der Spule; auch der Betrag dieser Änderung läßt sich natürlich auf Grund der allgemeinen Formeln für das Feld (9) und (11) oder (16) und (19) in entsprechender Weise wie die Wirbelstromwärme berechnen.

Ein Näherungsverfahren in der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Karl Fuchs in Preßburg.

I.

In der Methode der kleinsten Quadrate soll die Summe von gewissen Quadraten ein Minimum werden; wir schreiben diese Summe so:

$$
\begin{aligned}
f = {} & (a_1 x + b_1 y + \cdots - l_1)^2 \\
& + (a_2 x + b_2 y + \cdots - l_2)^2 \\
& \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Es gilt die Werte der Unbekannten $xy \ldots$ so zu bestimmen, daß die Funktion f ein Minimum wird. Wir wollen uns dem Minimum *stufenweise* nähern, derart, daß wir immer nur *eine* Variable ändern. Es gilt nun zu berechnen, *um wieviel* man den Wert der Variablen ändern muß, um den Wert der Funktion f möglichst herabzudrücken.

1. Zunächst schreiben wir den Variablen irgend welche angenäherte Werte $x_0 y_0 \ldots$ zu, und schreiben entsprechend:

$$f_0 = (a_1 x_0 + b_1 y_0 + \cdots - l_1)^2 + (a_2 x_0 + \cdots)^2 + \cdots \tag{2}$$

Die in den Klammern stehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit $p_1 p_2 \ldots$ und schreiben:

$$f_0 = p_1^2 + p_2^2 + \cdots \tag{3}$$

Wenn wir die Variable x um den Betrag ξ_0 ändern, dann ändert sich die Funktion f und wird zu f_1:

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad f_1 &= (p_1 + a_1 \xi_0)^2 + (p_2 + a_2 \xi_0)^2 + \cdots \\
&= p_1^2 + p_2^2 + \cdots \\
&\quad + 2\xi_0 (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots) \\
&\quad + \xi_0^2 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots).
\end{aligned}
$$

Die Änderung Δf_0 der Funktion f_0 hat also folgenden Wert:

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad \Delta f_0 &= 2\xi_0 (p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots) \\
&\quad + \xi_0^2 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots).
\end{aligned}
$$

Die Änderung Δf_0 wird somit durch eine *Parabel* dargestellt, und sie hat ihren größten negativen Wert bei

$$
(6) \qquad \xi_0 = -\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}.
$$

Wenn ξ_0 doppelt so groß genommen wird, ist aber Δf_0 wieder gleich Null, wie für $\xi_0 = 0$. Wenn wir also x *ungefähr* um den Wert (6) abnehmen lassen, dann haben wir den Wert der Funktion f jedenfalls *herabgesetzt*, und das ist ja unser Zweck. Wenn wir aber x um irgend einen uns *bequemen* Wert ξ_0 ändern, dann ändern sich auch die Polynome $p_1 p_2 \ldots$ um folgende Beträge:

$$
(7) \qquad \Delta p_1 = a_1 \xi_0, \quad \Delta p_2 = a_2 \xi_0, \ldots
$$

Wenn wir diese Inkremente zu den alten Werten von $p_1, p_2, \ldots$ dazuschlagen, dann finden wir die neuen Werte der Polynome:

$$
(8) \qquad p_1' = p_1 + \Delta p_1, \quad p_2' = p_2 + \Delta p_2, \ldots
$$

Ein *bequemer* Wert von ξ_0 ist vor allem ein *einstelliger* Wert, z. B. 40, 4, 0,4 usw., weil wir dann die Inkremente $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots$ nach (7) bequem genau berechnen können, und genau dem gewählten Wert ξ_0 entsprechend *müssen* sie berechnet werden. Wenn wir die neuen Werte $p_1', p_2', \ldots$ der Polynome berechnet haben, ist der *erste Akt* beendet.

Es folgt nun der *zweite Akt*, indem wir etwa die Variable y ändern. Das *beste* Inkrement η ist analog (6) gegeben durch

$$
(9) \qquad \eta = -\frac{p_2' b_1 + p_2' b_1 + \cdots}{b_1^2 + b_2^2 + \cdots}.
$$

Wir entscheiden uns nun für einen bequemen Wert η, der dem Werte (9) nahe liegt, und berechnen die neuen *Änderungen* der Polynome:

$$
(10) \qquad \Delta p_1' = b_1 \eta, \quad \Delta p_2' = b_2 \eta, \ldots
$$

Aus diesen aber berechnen wir die neuen *Werte* der Polynome:

$$p_1'' = p_1' + \Delta p_1', \quad p_2'' = p_2' + \Delta p_2', \ldots \tag{11}$$

Jetzt ist der zweite Akt beendet, und es folgt der dritte, indem wir etwa z ändern usw., dann fangen wir wieder mit x an usw.

Hiermit ist der Grundgedanke der Näherungsmethode entwickelt. Wenn wir als allgemeines Zeichen eines Inkrementes $\xi, \eta, \ldots$ den Buchstaben λ, als allgemeines Zeichen der entsprechenden Konstanten $a, b, \ldots$ den Buchstaben k anwenden, dann ist der Ausdruck für das *beste* Inkrement:

$$\lambda = -\frac{p_1 k_1 + p_2 k_2 + \cdots}{k_1^2 + k_2^2 + \cdots}. \tag{12}$$

Diese besten Inkremente werden immer kleiner und kleiner, und endlich so klein, daß wir abbrechen können. Im Laufe des Näherungsverfahrens haben wir die Variable x wiederholt geändert und Inkremente $\xi_0, \xi_1, \ldots$ gefunden; der wahrscheinlichste Wert von x ist dann:

$$x = x_0 + \xi_0 + \xi_1 + \cdots \tag{13}$$

Analog ist der wahrscheinlichste Wert von y gegeben durch:

$$y = y_0 + \eta_0 + \eta_1 + \cdots$$

usw. Die letzten Inkremente sind stets verschwindend klein.

2. Im beschriebenen Näherungsverfahren kann man mancherlei Vereinfachungen vornehmen. Die nächstliegende ist die folgende. Wir haben einmal ein Inkrement ξ_0 nach (6) berechnet. Nachdem wir dann verschiedene andere Variable verbessert haben, wollen wir wieder einmal x um ein Inkrement ξ_1 verbessern. Seitdem haben die Polynome ihre Werte aber wiederholt geändert, und haben jetzt neue Werte $p_1', p_2', \ldots$ gegen die alten Werte $p_1, p_2, \ldots$, und es gilt:

$$\xi_1 = -\frac{p_1' a_1 + p_2' a_2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}. \tag{14}$$

Wenn die neuen Werte $p_1', p_2', \ldots$ gegen die alten Werte $p_1, p_2, \ldots$ die Inkremente $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots$ haben, dann kann (14) auch so geschrieben werden:

$$\xi_1 = -\frac{(p_1 + \Delta p_1)a_1 + (p_2 + \Delta p_2)a_2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$$

oder:

$$\xi_1 = \xi_0 - \frac{a_1 \Delta p_1 + a_2 \Delta p_2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}. \tag{15}$$

Nach dieser Formel rechnen wir aber namentlich gegen Ende der Rechnung mit ungleich kleineren Zahlen, als nach der vollen Formel (14). Das gilt für alle Variablen.

3. Eine zweite Vereinfachung ist die folgende. Wir haben fortwährend Brüche nach der Formel (12) zu berechnen. Diese Berechnung ist immer umständlich, auch wenn wir wissen, daß wir λ *nicht* genau zu kennen brauchen. Wir können nun die Werte λ genügend genau *ohne* Rechnung mittels einer *Wage* bestimmen.

Der Anschaulichkeit wegen nehmen wir nicht (12), sondern (6) zum Ausgangspunkt und schreiben (6) so:

$$p_1 a_1 + p_1 a_2 + \cdots + \xi_0 (a_1^2 + a_2^2 + \cdots) = 0.$$

Das heißt in Worten: Wenn auf einen Hebel das Gewicht a_1 am Arme p_1, das Gewicht a_2 am Arme p_2 ... wirkt, und wir *äquilibrieren* mittels eines Laufgewichtes $[a^2]$, dann ist der Arm ξ_0 dieses Laufgewichtes die gesuchte Größe. Als Hebel nehmen wir am zweckmäßigsten ein rechteckiges dünnes Brett, dessen *lange* Mittellinie die Achse ist, und auf das wir Gewichte a_1, a_2, ... in die Achsenabstände $p_1, p_2, \ldots$ legen und dann mit einem Gewicht $[a^2]$ äquilibrieren. Wenn wir nicht ein ξ, sondern ein η, d. h. eine Änderung der Variablen y suchen, dann brauchen wir Gewichte b_1, b_2, ... und $[b^2]$ usw. Da besondere Genauigkeit nicht erforderlich ist, benutzen wir zweckmäßig Gewichtstücke von 1—100 Einheiten; wir brauchen dann keine kombinierten Gewichte.

Nach (15) müssen wir gegen Ende der Rechnung zur Bestimmung von

$$\varDelta \xi_0 = -\frac{a_1 \varDelta p_1 + a_2 \varDelta p_2 + \cdots}{a_1^2 + a_2^2 + \cdots}$$

die Gewichte a_1, a_2, ... auf sehr kurze Arme $\varDelta p_1$, $\varDelta p_2$ einstellen, und da müßte die Wage versagen. Wir geben dann den Gewichten die fünffachen, zehnfachen, ... Arme, und erhalten dann das fünffache, zehnfache, ... $\varDelta \xi_0$; wir erhalten also mit der unvollkommenen Wage sehr genaue Werte. Anderseits können die Gewichte $[k^2]$ sehr groß sein, sodaß wir lieber mit den halben Gewichten äquilibrieren, und als Arm dann 2λ erhalten; derartige Kunstgriffe gibt die Übung.

Es ist leicht ein sehr handliches Wagesystem zu bauen, in das die den Koeffizienten a_1, a_2, ..., b_1, b_2, ... entsprechenden Gewichte nur *einmal* eingefügt werden, und das jederzeit *sämtliche* möglichen Inkremente $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ anzeigt, sodaß wir jederzeit das *ausgiebigste* Inkrement erkennen können.

4. Nun kann ein Überblick über die Arbeit gegeben werden. Als Vorarbeit haben wir die Quadrate von sämtlichen Koeffizienten und deren Summen zu bestimmen:

$$[a^2], \quad [b^2], \ldots$$

Als erste Annäherung geben wir den Variablen $x, y, \ldots$ etwa die Werte Null, in welchem Falle in (3) laut (2) gilt:

$$p_1 = -l_1, \quad p_2 = -l_2, \ldots$$

Zu rechnen haben wir im ganzen Näherungsverfahren im wesentlichen nur die Inkremente $\Delta p_1, \Delta p_2, \ldots$ nach dem Vorbilde (7), und auch da haben wir nur Multiplikationen mit einstelligen Zahlen, wenn wir so abgerundete Inkremente λ nehmen.

Hiermit wären die Hauptsachen gesagt; wir sehen, daß sowohl die umständliche Koeffizientenbildung, als auch das umständliche Eliminationsverfahren wegfällt. Wenn die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist, dann wird f schließlich auf Null reduziert, und unser Verfahren ist ein stufenweises *Eliminieren.*

Preisaufgabe der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft für das Jahr 1910.

Die meisten Aufgaben der Elektrostatik sind reduzierbar auf die Ermittelung der Greenschen Massenbelegungen, und es sind daher diese Belegungen für die Theorie der Elektrostatik, sowie überhaupt für die ganze Potentialtheorie von hervorragender Wichtigkeit.

Durch neuerdings publizierte Untersuchungen (Berichte der Kgl. Sächsischen Ges. d. W. Math.-phys. Kl. Jahrg. 1906, S. 483—558) dürfte wohl außer Zweifel gesetzt sein, daß in der Theorie des logarithmischen Potentials für jedwede geschlossene Kurve die dem Innen- und Außenraum entsprechenden beiden Greenschen Belegungen reduzierbar sind auf eine einzige Belegung, auf die sogenannte „Grundbelegung“, und daß Analoges auch gelte in der Theorie des Newtonschen Potentials für jedwede geschlossene Oberfläche.

Immerhin lassen die in Rede stehenden Untersuchungen bis jetzt noch vieles zu wünschen übrig. Demgemäß stellt die Gesellschaft folgende Aufgabe:

Es soll eine Arbeit geliefert werden, durch welche jene Theorie der „Grundbelegung“ in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.

Preis 1500 Mark.

Bücherschau.

Konrad Zindler. Liniengeometrie mit Anwendungen. II. Band mit 24 Figuren, VII u. 252 S. 8⁰. Leipzig 1906, G. J. Göschensche Verlagshandlung. Sammlung Schubert LI. Preis geb. *M*. 8.—.

Das Zindlersche Lehrbuch wird nach seiner Vollendung die wichtigsten Ergebnisse liniengeometrischer Forschung (im Sinne J. Plückers) in allgemein verständlicher Form systematisch zusammenfassen. Nachdem der Stoff dem Verfasser offenbar unter der Feder anschwillt, sind jetzt schon drei Bände in Aussicht genommen. Da der vorliegende Band im wesentlichen nur differentialgeometrische Untersuchungen enthält und der dritte Band die Theorie der quadratischen Komplexe, der algebraischen Kongruenzen und die Anwendungen auf Mechanik bringen soll, so dürfte aber wahrscheinlich noch ein vierter Band nötig werden, selbst wenn auf die liniengeometrischen Forschungen E. Studys nicht näher eingegangen werden sollte.

Der zur Besprechung vorliegende zweite Band[1]) zerfällt in drei Abschnitte, von denen der erste die Regelflächen, der zweite die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen und der dritte die allgemeine Theorie der Komplexe behandelt. Der Verfasser geht bei der analytischen Untersuchung dieser drei liniengeometrischen Grundgebilde von deren Parameterdarstellung aus, indem er nämlich die Koordinaten („Zeiger") einer Geraden als Funktionen von ein, zwei oder drei unabhängigen Parametern gegeben annimmt. Die für diese Funktionen vorausgesetzten Eigenschaften hätten genauer präzisiert werden sollen. Neben den Parameterwerten werden zur Festlegung eines Strahls in einem der drei Grundgebilde noch sogenannte *natürliche Bestimmungsstücke* verwendet.

Denkt man sich eine Regelfläche durch eine solche Bewegung einer Erzeugenden entstanden, bei der der Zentralpunkt sich längs des Gemeinlotes mit der benachbarten Erzeugenden bewegt, so dienen als natürliche Bestimmungsstücke einer Erzeugenden deren Winkelgeschwindigkeit ω, die Translationsgeschwindigkeit ϑ ihres Zentralpunktes, die Geschwindigkeit σ, mit der sich dieser Punkt längs der Erzeugenden verschiebt, und die Winkelgeschwindigkeit η der asymptotischen Ebene. Sind diese Geschwindigkeiten als Funktionen eines Parameters t *(die natürlichen Gleichungen der Regelfläche)* und gewisse Anfangsbedingungen gegeben, so ist durch deren Verhältnisse die Regelfläche bis auf ihre Lage im Raum bestimmt. Durch Nullsetzen einer der vier Geschwindigkeiten gelangt der Verfasser zu 4 Arten der Abbildung einer Regelfläche, die er bezw. *zylindrisch*, *abwickelbar*, *orthoid* und *konoid* nennt. Die Bestimmung einer Regelfläche aus ihren natürlichen Gleichungen wird

1) Bezüglich des I. Bandes vgl. Z. f. Math. u. Phys. 51 (1904), S. 106—108.

näher betrachtet und eine ausgezeichnete Erzeugungsweise einer allgemeinen Regelfläche daraus abgeleitet (Satz 19). Beachtenswert erscheint die in § 13 gegebene Einteilung der singulären Erzeugenden von Regelflächen in 15 Arten, jenachdem nämlich eine oder mehrere der Geschwindigkeiten ω, ϑ, σ, η in dieser Erzeugenden, durch Null gehend, ihr Vorzeichen ändern. Die algebraischen Regelflächen, insbesondere die 3. Ordnung werden kurz behandelt.

Der zweite Abschnitt beginnt mit der Einführung des folgenden *natürlichen Zeigersystems* für gerade Linien. Wird auf einer orientierten Geraden s_0 ein Ausgangspunkt O angenommen und durch sie eine Ausgangsebene gelegt, so dienen als Zeiger irgend eines Strahls s der Winkel $\omega = \widehat{s_0 s}$, die Länge a des Gemeinlotes zwischen s_0 und s, der Winkel α, den dieses Lot mit der Ausgangsebene einschließt, und der Abstand z des auf s_0 befindlichen Lotfußpunktes von O. Durch Annahme einer hinreichend kleinen oberen Grenze für a und den absoluten Betrag von ω definiert man eine *Umgebung* des Strahls s_0.

Sind z, a, α, ω als Funktionen eines Parameters t gegeben, wobei zu $t = 0$ der Strahl s_0 gehören soll, so ist $P = \lim \frac{a}{\omega}$ (für $t = 0$) der *Verteilungsparameter* der so definierten Regefläche in s_0, während $\lim z$ und $\lim \alpha$ die Lage des Zentralpunktes und der Zentralebene bestimmen. Die drei Zahlen z, α, P kennzeichnen eine *Fortschreitungsrichtung* im Linienraum und heißen deren Zeiger. Jede Regelfläche durch s_0 bestimmt bekanntlich auf diesem Strahl eine Korrelation; mit diesen Korrelationen kann man nach Koenigs (Sur les propr. inf. de l'espace réglé, 1882) analog wie mit den Fortschreitungsrichtungen operieren; durch Einführung der letzteren erzielte der Verfasser jedoch größere Anschaulichkeit.

Zur Untersuchung einer Kongruenz in der Umgebung eines ihrer Strahlen s werden die Richtungszeiger z und P als Funktionen von α betrachtet. Den extremen Werten von z entsprechen auf s die *Grenzpunkte*, während die zugehörigen Werte von α die *Hauptebenen* durch den Strahl bestimmen. Hamiltons und Kummers differentialgeometrische Sätze über Strahlenkongruenzen ergeben sich nun recht elegant. Der Verfasser gelangt auf diesem Wege aber auch zu neuen Ergebnissen. Als solches sei erwähnt, daß die Extreme von P in s zu jenen der Kongruenz angehörigen Regelflächen durch s gehören, deren Zentralebenen die Winkel zwischen den Hauptebenen von s halbieren (§ 22). Diese Zentralebenen werden die *Krümmungsebenen* von s genannt. Ferner gehören dazu die Aufstellung der Gleichung der Grenzfläche (Ort der Grenzpunkte) eines Strahlnetzes, insbesondere eines Rotationsnetzes, und die Aufstellung der Differentialgleichungen der *Hauptfläche* und der *Krümmungsfläche* einer Kongruenz, d. h. jener Regelflächen der Kongruenz, deren Zentraltangenten immer in eine Haupt- oder in eine Krümmungsebene fallen. Beachtung verdient ferner § 29, der sich mit den Umdrehungs- und Schraubungskongruenzen (entstehend durch Drehung oder Schraubung einer Regelfläche) beschäftigt. Jedoch ist mit dieser Aufzählung der Inhalt des zweiten Abschnittes durchaus nicht erschöpft.

Hinsichtlich des dritten, fast den halben Band einnehmenden Abschnittes sei nur erwähnt, daß darin der obige Richtungsbegriff weitere Anwendungen auf Komplexe findet, daß insbesondere Begriffsbildungen, die von F. Klein

und Koenigs herrühren, eingehende und zum Teil originelle Behandlung erfahren. Gerade die Arbeiten von Koenigs haben in Deutschland bisher weniger Beachtung gefunden.

Aus all diesem ergibt sich, daß auch dieser zweite Band von Zindlers Liniengeometrie bestens empfohlen werden kann. Die Originalarbeiten sind nie einfach ausgezogen sondern neuerdings durchgearbeitet. An manchen Stellen wird im Leser freilich der Wunsch auftauchen, der Verfasser hätte den Gegenstand noch etwas breiter dargestellt.

Wien, im März 1907. E. Müller.

P. Zechs Aufgabensammlung zur theoretischen Mechanik nebst Auflösungen. 3. Auflage. Von Dr. C. Cranz unter Mithilfe von Ritter von Eberhard. Stuttgart 1906, Metzler. Br. ℳ 4,60, geb. ℳ 5,20.

Unter den wesentlichen Verbesserungen und Erweiterungen, welche dieses Buch in seiner neuen Gestalt aufweist, ist hervorzuheben:

Neu hinzugekommen sind zu einer Reihe von Aufgaben die Auflösungen (z. B. IX 18—22). Die Schwierigkeit der betreffenden Aufgaben läßt dies auch recht notwendig erscheinen. Sie stammen meist aus Prüfungen und sind seinerzeit von C. W. v. Baur gestellt worden, daher mit der Bemerkung (W. C.) versehen. (Eine Erklärung dieses (W. C.), wie sie im Vorwort zur 2. Auflage enthalten ist, fehlt im Vorwort zur dritten; der volle Name ist nur der letzten Aufgabe (XI, 3) beigefügt).

Neu ausgeführt sind die Figuren, auch etwa 20 neu hinzugekommen. War im Vorwort zur 2. Auflage zu lesen: „Die Figuren wurden ausnahmslos vom Verfasser selbst gezeichnet, ein Umstand, der, wie er hofft, als Entschuldigungsgrund für manche technische Unvollkommenheit gelten kann", so kann jetzt davon nicht mehr die Rede sein. Die gut gezeichneten Figuren werden wesentlich zum Verständnis der Auflösungen beitragen. Schon eine Vergrößerung der Figuren war ein dringendes Erfordernis; aber auch durch ihre klare Anordnung zeichnen sie sich gegen die früheren aus, sowie durch ihre Korrektheit. (Eine fast auffallende Ausnahme bilden hier die Figuren 47 und 49, wo die Zusammensetzung der Parabeln aus Kreisbögen zu große Abweichungen von der richtigen Kurve hervorgerufen hat und Ähnliches gilt von der Ellipse in Figur 111.)

Die Nachteile, welche der gegenüber der zweiten Auflage etwas kleinere Druck mit sich bingt, werden völlig aufgewogen durch seine größere Schärfe, und die Verbreiterung der Druckseite gestattete so an manchen Stellen eine übersichtlichere Anordnung der Formeln.

War das Buch schon in seiner früheren Gestalt ein wichtiges Hilfsmittel für den Studierenden der Ingenieurwissenschaften, wie den Mathematiker zum Studium der theoretischen Mechanik, so wird es in seinem neuen Kleid zusamt mit den Verbesserungen des Inhalts gewiß noch leichter sich neue Freunde verschaffen.

Stuttgart. E. Stübler.

Berichtigung zum dritten Hefte dieses Bandes.

S. 267, Z. 4 v. u. muß es heißen: dem Ausbau der Anlage und der Abhaltung von Vorlesungen betraut . . .



JAN 10 1922
FEB -6 1928
MAR -7 1939
FEB 7 '52 H
JUL '67 H
CANCELLED

